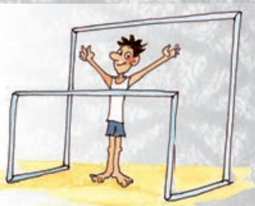
Matematika

11-12

emelt szint

Matematika



Matematika 11-12 emelt szint

Hatvány, gyök, logaritmus

Vektorok és trigonometria

Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek

Koordináta-geometria

Kombinatorika és gráfok

Valószínűség-számítás és statisztika

Térgeometria

Analízis

Halmazok és logika

Út a tudáshoz

Matematika 11–12 emelt szint

A könyvet írta:
Schultz János középiskolai tanár
Tarcsay Tamás középiskolai tanár

Lektorálta:
Dr. Németh József egyetemi docens
Somfai Zsuzsa középiskolai tanár
Sörös Katalin középiskolai tanár

Az OH által kirendelt szakértő:
Dr. Hillné Benkó Katalin
Maus Pál

Felelős szerkesztő:
Szabóné Mihály Hajnalka
Tarcsay Tamás

Tördelés:
Siklós Róbert

Korrektúra:
Nemcsók Adrienn

Képek:
A szerzők saját fotói
Nemzetközi képügynökségek

Ábrák:
Kelcz Roland

Illusztrációk:
Falcione Sarolta

Borítóterv és layout:
Daróczi Sándor

Második kiadás, változatlan utánnyomás
Kiadói kód: MX-350
Tankönyvi engedélyszám: KHF/5525-21/2010. (2010. 10. 05. – 2015. 08. 31.)
Kerettanterv: 17/2004 (V.20.) OM rendelet 3. számú melléklete
Tömeg: 700 g
Terjedelem: 400 oldal (35,75 ív)
A tankönyv tartóskönyv-minősítéssel rendelkezik.

ISBN 978 963 948 935 6

Matematika

11-12

emelt szint

Előszó

A hazai tankönyvpiacon hiánypótló könyvet vehet kezébe most az olvasó, amely az emelt szintű matematika érettségi vizsgára való sikeres felkészítést, illetve a felsőoktatás matematikaképzésébe való sikeres bekapcsolódás elősegítését tartja elsődleges céljának.

A tankönyv az emelt szintű tananyag azon részét tartalmazza, amelyet a 11. és 12. osztályban szokás tanítani, tanulni. Egyre nyilvánvalóbbá válik, hogy az emelt szintű matematika érettségi vizsga előbb-utóbb feltétele lesz a műszaki, közgazdasági, informatikai és matematika alapszakos egyetemi képzésnek. A tartalmi követelmények természetesen változhatnak, ezért néhány esetben, ahol ezt feltétlenül indokoltnak éreztük, túlléptünk a szorosan értelmezett emelt szintű érettségi tananyagon. Ezeket a részeket kék színnel jelöltük meg, ugyanis az emelt szintű érettségi vizsgára való készülés mellett annak a lehetőségét is szeretnénk biztosítani olvasóink számára, hogy a felsőfokú intézményekben a matematikatanulmányok elkezdése ne okozzon nagyobb nehézséget. Ebből a szempontból különösen fontosnak tartjuk a könyv *Analízis, Kombinatorika,* illetve *Valószínűség-számítás* című fejezeteit, amelyek anyaga minden, a természettudományos képzésben részt vevő diák számára nélkülözhetetlen. Ezek azok az anyagrészek, amelyek a korábbi érettségi-felvételi rendszerben szinte egyáltalán nem szerepeltek, míg a kétszintű érettségi rendszerben a tananyag jelentős hányadát alkotják. (Analízis, függvények: 20%, Valószínűség-számítás, statisztika: 15%, Kombinatorika: 25%.) Általában azokban a fejezetekben, amelyek előzményei korábbi osztályok tananyagában szerepelnek, ismétlésképpen röviden áttekintjük az ott tárgyalt ismereteket is.

A fejezetek végén *Oldjuk meg!* címmel gyakorlófeladatokat is közlünk, amelyek részletes megoldásait a könyvhöz kapcsolódó digitális tananyagban fogjuk közreadni. Azoknak a feladatoknak a végeredményeit, amelyek egyszerűen adódnak, a könyv függelékében találhatjuk meg. A feladatsorok végén általában jelentős számú, további megoldandó problémát ajánlunk az olvasó figyelmébe a Maxim Könyvkiadó *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12. évfolyam* című feladatgyűjteményéből. Előfordul az is, hogy az interneten megtalálható adatbázisokra mutató címeket adunk meg. Ezeken a helyeken vagy további feladatokat, vagy a témához kapcsolódó érdekességeket, további ismereteket találhatunk.

A fejezetek sorrendje igyekszik a tanári munkánk során szerzett tapasztalatainknak megfelelően egymásra építve tárgyalni a tananyagot. Ezt a célt szolgálják a különböző fejezetekben lévő kidolgozott példák kapcsán megtalálható hivatkozások is. Természetesen bizonyos részek sorrendjét fel lehet cserélni, pl. *Trigonometria – Hatvány, gyök, logaritmus*. Az iskolai munka során a szaktanár feladata lesz, hogy eldöntse, mely fejezeteket tárgyalják 11. osztályban, és melyeket 12. osztályban. Ez nagyban függ a heti óraszámtól és a tanított csoport felkészültségétől. A könyvhöz kapcsolódó *Digitális kiegészítő tananyagok és tanári kézikönyv* című DVD-n megjelenő kiadványban szerepelni fog egy lehetséges felépítés és tanmenet, rendszerező, ismétlő összefoglalások, valamint számos tankönyvi ábra GeoGebra programmal készített változata is. Ez a program hasznos segédeszköz lehet több matematikai tudományág tanítása során.

Úgy gondoljuk, hogy könyvünket jól lehet használni olyan középiskolás csoportokban, amelyek tagjai matematika irányú továbbtanulást céloznak meg, de az egyéni készülést is jól támogató eszköz ez a kiadvány.

Köszönetünket fejezzük ki a lektoroknak, akik tanácsaikkal, javaslataikkal nagyban elősegítették, hogy a könyv egységesebb, használhatóbb és teljesebb legyen.

A Szerzők

Hogyan használjuk?

Jelmagyarázat

Tankönyvünk az emelt szintű érettségi vizsga követelményeinek szem előtt tartásával készült. A leckék felépítése, szerkezete egyszerű, az áttekinthetőséget a különböző háttérszínezések és ikonok is segítik.

1. példa A tankönyvben szereplő kidolgozott példákat zöld háttérszínű keretbe foglaltuk.

2. példa A szigorúan vett emelt szinten túlmutató kidolgozott példákat jelölő ikont és a példa sorszámát kék színnel jelöltük a zöld háttérszínű keretben.

Közvetlenül a kidolgozott példák alatt szerepel azok részletes megoldása, amelyben **félkövér kiemelésekkel** hívtuk fel a figyelmet az újonnan megjelenő **fogalmakra, megállapításokra, módszerekre.**

Definíció Az új fogalmakat, axiómákat sárga háttérszínű keretbe foglaltuk. Itt írtuk le a fogalmakkal kapcsolatban használt matematikai jelöléseket is.

Tétel A tételeket narancssárga háttérszínű keretben fogalmaztuk meg.

Tétel A szigorúan vett emelt szinten túlmutató tételeket jelölő ikont és a Tétel szót kék színnel jelöltük a narancssárga háttérszínű keretben.

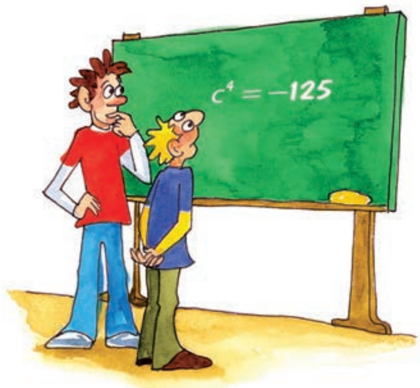
A tételek többsége után azok bizonyítása is megtalálható.

A szigorúan vett emelt szinten túlmutató ismeretekre, illetve az Oldjuk meg! azon feladataira, amelyek megoldása ilyen ismereteket igényel, világoskék háttérrel hívtuk fel a figyelmet.

A tankönyvben szereplő szakkifejezések jegyzéke a könnyebb áttekinthetőség, kereshetőség kedvéért a kötet végén a Függelékben található meg, amelyben *dőlt* betűvel jelöltük azokat az új fogalmakat, amelyek a 9.-es és a 10.-es tananyagban még nem fordultak elő.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék



I. fejezet

Hatvány, gyök, logaritmus

Alapozzunk!

1. A racionális kitevős hatvány

1.1. ábra Mit jelent ez?

A hatvány fogalmával már általános iskolás tanulmányaink során találkoztunk. Ha *a* tetszőleges **valós szám** és *x* 1-től különböző **pozitív egész szám**, akkor a^x-nel (*a*: alap, *x*: kitevő) jelöltük az olyan *x* tényezős szorzatot, melynek minden tényezője *a*. Abban is megállapodtunk, hogy $a^1 = a$.

A 9. osztályban már továbbléptünk. Értelmeztük a 0 kitevős hatványt. Ekkor azonban az alapra megszorítást kellett tenni. A **nullától különböző valós** *a* számra $a^0 = 1$. Ebből következően a kitevő már tetszőleges **természetes szám** lehetett.

Itt sem álltunk meg, értelmeztük a negatív egész kitevős hatványt is. Ha *a* nullától különböző valós szám és *x* pozitív egész szám, akkor $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$. Ekkorra már a kitevő tetszőleges **egész szám** lehetett.

A pozitív egész kitevős hatvány definíciója még egészen kézenfekvőnek tűnt (négyzet területe, kocka térfogata stb.), de az ezután következő definíciók meglepetést okozhattak. A 9. osztályban esett szó arról, hogy azért így adtuk meg a meghatározásokat, hogy a szűkebb kitevőhalmaz esetében bebizonyított azonosságok a bővebben is azonosságok maradjanak. Ezt az elvárást *permanencia-elv*nek neveztük.

Természetesnek tűnhet a továbblépés: bővítsük a kitevőhalmazt, értelmezzük a racionális kitevős hatványt! Következetesen ragaszkodjunk a permanenciaelvhez! Ehhez vegyük számba **a hatványozás azonosságait**! (A kifejezések értelmezési tartományának meggondolását az olvasóra bízzuk.)


1.2. ábra Repetitio est mater studiorum

1. $a^x a^y = a^{x+y}$ (azonos alapú hatványok szorzata)
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (azonos alapú hatványok hányadosa)
3. $a^x b^x = (ab)^x$ (azonos kitevőjű hatványok szorzata)
4. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ (azonos kitevőjű hatványok hányadosa)
5. $(a^x)^y = a^{xy}$ (hatvány hatványa)

1. példa Milyen meghatározást adnánk a következő racionális kitevős hatványokra?

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $(-2)^{\frac{4}{3}}$ c) $(-5)^{\frac{3}{4}}$ d) $2^{-\frac{3}{2}}$ e) $11^{\frac{5}{7}}$

Megoldás:

a) Legyen $a = 3^{\frac{1}{2}}$! Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát, és alkalmazzuk az 5. azonosságot!

$$a^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$a^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2}$$

$$a^2 = 3^1$$

$$a^2 = 3$$

1.3. ábra Melyiket válasszuk?

Két olyan valós szám van, amelynek a négyzete 3. Természetes, hogy $a = \sqrt{3}$, azaz a $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ meghatározást adjuk.

b) Legyen $b = (-2)^{\frac{4}{3}}$! Emeljük harmadik hatványra az egyenlet mindkét oldalát, és alkalmazzuk az 5. azonosságot!

$$b^3 = \left((-2)^{\frac{4}{3}}\right)^3$$

$$b^3 = (-2)^{\frac{4}{3}\cdot 3}$$

$$b^3 = (-2)^4$$

Egyetlen olyan valós szám van, amelynek a köbe $(-2)^4$, így $b = \sqrt[3]{(-2)^4}$, azaz a $(-2)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^4}$ meghatározást adhatjuk.

c) Legyen $c = (-5)^{\frac{3}{4}}$! Emeljük negyedik hatványra az egyenlet mindkét oldalát, és alkalmazzuk az 5. azonosságot!

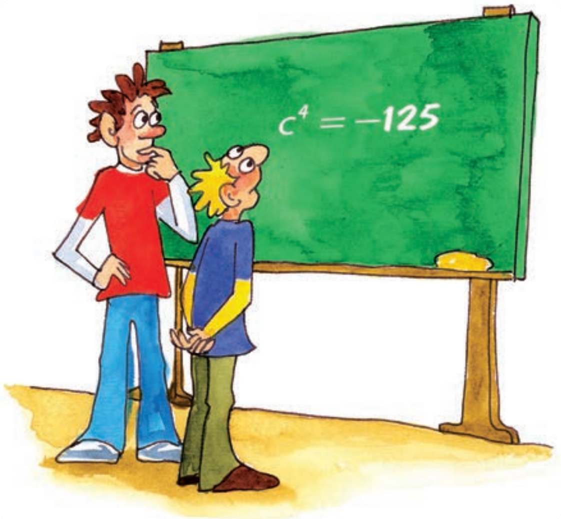
$$c^4 = \left((-5)^{\frac{3}{4}}\right)^4$$

$$c^4 = (-5)^{\frac{3}{4}\cdot 4}$$

$$c^4 = (-5)^3$$

$$c^4 = -125$$

A kapott egyenletnek nincs valós megoldása, így a $(-5)^{\frac{3}{4}}$ hatvány a permanenciaelvnek megfelelő módon nem értelmezhető.



1.4. ábra Van megoldás?

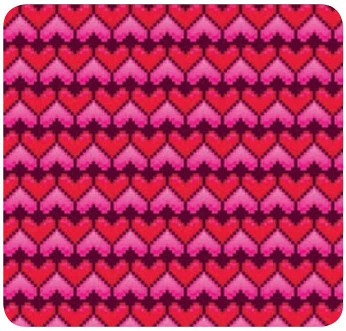
d) Legyen $d = 2^{-\frac{3}{2}}$! Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát, és alkalmazzuk az 5. azonosságot!

$$d^2 = \left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^2$$

$$d^2 = 2^{-\frac{3}{2}\cdot 2}$$

$$d^2 = 2^{-3}$$

A negatív egész kitevős hatvány definíciója szerint: $d^2=\frac{1}{2^3}$. Ennek az egyenletnek két valós megoldása van. Válasszuk közülük a pozitívot, így $2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2^3}}$.



1.5. ábra Permanencia

e) Legyen $e=11^{\frac{5}{7}}$! Emeljük hetedik hatványra az egyenlet mindkét oldalát, és alkalmazzuk az 5. azonosságot!

$$e^7=\left(11^{\frac{5}{7}}\right)^7$$

$$e^7=11^{\frac{5}{7}\cdot 7}$$

$$e^7=11^5$$

$$e=\sqrt[7]{11^5}$$

Innen $11^{\frac{5}{7}}=\sqrt[7]{11^5}$ az egyetlen – a permanenciaelvnek megfelelő – értelmezési lehetőség.

A példából is látható, hogy a negatív alap a törtkitevős hatvány megadásakor problémát okoz, ezért csak **pozitív valós** alapra adjuk meg a definíciót, ami a példa alapján természetesnek tűnhet.

Definíció Ha a pozitív valós szám, p természetes szám és q 1-nél nagyobb pozitív egész szám, akkor $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$. Ha r pozitív racionális szám, akkor $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$.

Megmutatható, hogy a hatványozás mindegyik azonossága érvényben marad e definíció esetében. Egyet közülük megnézünk, a többbin érdemes gyakorlásképpen gondolkodni.

Legyen a pozitív valós szám, p és m természetes szám, illetve q és n 1-nél nagyobb pozitív egész szám!

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[qn]{a^{pn}}\cdot\sqrt[qn]{a^{qm}}=\sqrt[qn]{a^{pn}\cdot a^{qm}}=\sqrt[qn]{a^{pn+qm}}=a^{\frac{pn+qm}{qn}}=a^{\frac{pn}{qn}+\frac{qm}{qn}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}$$

A bizonyítás során a racionális kitevős hatvány definícióját, a gyökvonás azonosságait, valamint az egész kitevős hatványokra vonatkozó azonosságot használtuk.

2. példa Az alábbi szorzatok értéke egy-egy racionális szám. Adjuk meg ezeket a racionális számokat!

a) $4^{\frac{2}{3}}\cdot 32^{\frac{1}{3}}$ b) $\left(2^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}\right)$ c) $\dfrac{7^{\frac{3}{4}}\cdot 12^{\frac{2}{3}}\cdot 20^{\frac{1}{3}}}{14^{\frac{3}{4}}\cdot 45^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}$

Megoldás:

a) Legyen $x = 4^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{\frac{1}{3}}$! A hatványok alapjait prímtényezőkre bontva: $x = \left(2^2\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(2^5\right)^{\frac{1}{3}}$. Alkalmazva a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot: $x = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}}$. Az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság szerint: $x = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$.

b) Legyen $y = \left(2^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(2^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}\right)$! A valós számok szorzása disztributív az összeadásra nézve, így:

$$y = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} - 6^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}.$$

Alkalmazzuk az azonos alapú és azonos kitevőjű hatványok szorzatára, valamint a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságokat, és végezzünk összevonásokat:

$$y = 2^{\frac{3}{3}} + 12^{\frac{1}{3}} + 9^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} - 18^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{3}{3}} = 2 + 12^{\frac{1}{3}} + 18^{\frac{1}{3}} - 12^{\frac{1}{3}} - 18^{\frac{1}{3}} - 3 = 2 - 3 = -1.$$

Szemfülesebb olvasóink felfedezhették, hogy az

$$\left(a^2 + ab + b^2\right) \cdot (a - b) = a^3 - b^3$$

azonosságot $a = 2^{\frac{1}{3}}$ és $b = 3^{\frac{1}{3}}$ esetre alkalmazva gyorsabban eredményre jutottunk volna.

1.6. ábra Ismerni kell ahhoz, hogy használni tudjuk!

c) Legyen $z = \dfrac{7^{\frac{3}{4}} \cdot 12^{\frac{2}{3}} \cdot 20^{\frac{1}{3}}}{14^{\frac{3}{4}} \cdot 45^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}$! Ahol lehet, a hatványok alapjait prímtényezőkre bontjuk, és alkalmazzuk az azonos kitevőjű hatványok szorzatára vonatkozó azonosságot:

$$z = \frac{7^{\frac{3}{4}} \cdot \left(2^2 \cdot 3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(2^2 \cdot 5\right)^{\frac{1}{3}}}{(2 \cdot 7)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(3^2 \cdot 5\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{3}{4}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}.$$

Egyszerűsítünk, és alkalmazzuk az azonos alapú hatványok szorzatára és a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságokat:

$$z = \frac{\left(2^2\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{4}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^2}{2} = 2.$$

Oldjuk meg!

1. Az alábbi szorzat értéke egy pozitív egész szám. Határozzuk meg ezt a számot!

$$\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(54^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{2}{3}} - 6\right)$$

2. Az alábbi szorzat értéke egy egész szám. Adjuk meg ezt a számot!

$$\left(8^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(2^{\frac{3}{8}} + 9^{\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(2^{\frac{3}{4}} + 81^{\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(2^{\frac{3}{2}} + 9^{3}\right)$$

3. A következő szorzat értéke egy racionális szám. Határozzuk meg ezt a számot!

$$\frac{7}{33}\cdot 15^{\frac{7}{5}}\cdot 175^{\frac{1}{5}}\cdot 7^{\frac{2}{5}}\cdot 21^{-\frac{2}{5}}\cdot 35^{-\frac{6}{5}}\cdot 5^{-\frac{3}{5}}$$

1.7. ábra Melyik nagyobb?

4. Melyik nagyobb: a $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ vagy a $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$?

5. Írjuk fel egyetlen racionális kitevős hatványként a következő kifejezést ($a > 0$)!

$$\sqrt{a^2\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt[5]{a^6}}}$$

6. Írjuk fel egyetlen racionális kitevős hatványként a következő kifejezést ($a > 0$)!

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt{a^5}}}}{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[4]{a^5}}}$$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 116., 118., 121. és 122. feladatok

2. A valós kitevős hatvány

A racionális kitevős hatvány értelmezése után vizsgálhatjuk a következő függvényt:

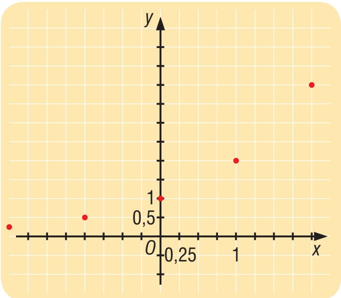
$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$. E függvény hozzárendelési szabályában a kitevőben szerepel a változó, ezért **exponenciális függvény**nek nevezzük.

A racionális kitevős hatvány definíciójából következően a függvénynek csak pozitív értékei vannak, $R_f\subseteq\mathbb{R}^+$.

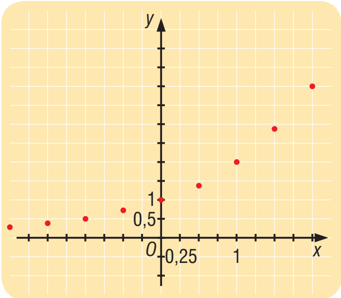
A függvénynek nincs maximuma, hiszen ha csak a pozitív egész kitevős 2 alapú hatványokat vizsgáljuk, azoknak sincs maximumuk, sőt nem is korlátosak felülről.

A függvénynek nincs minimuma, hiszen a pozitív egész kitevős 2 alapú hatványok reciprokai tetszőleges pozitív számnál kisebbek lehetnek.

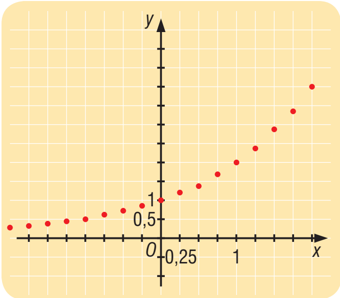
Következzen néhány olyan ábra, amely az f függvény grafikonjának részhalmaza. A $[-2;2]$ intervallumon különböző (d) lépésenként ábrázoltuk az $(x;2^x)$ pontokat.



2.1. ábra $d=1$

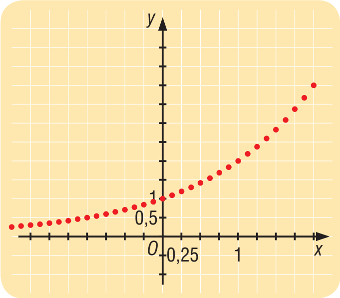


2.2. ábra $d=\frac{1}{2}$

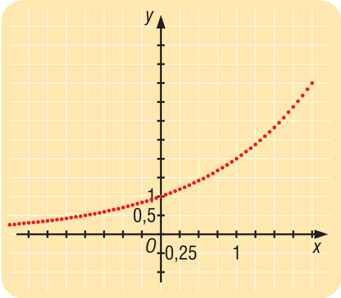


2.3. ábra $d=\frac{1}{4}$

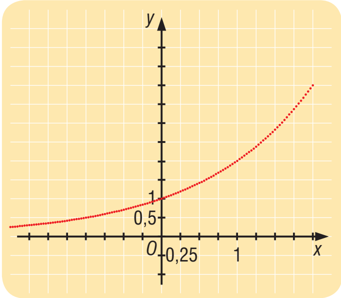
MatEm_Book.indb 16 2012.07.05. 11:36:47



2.4. ábra $d = \frac{1}{8}$



2.5. ábra $d = \frac{1}{16}$



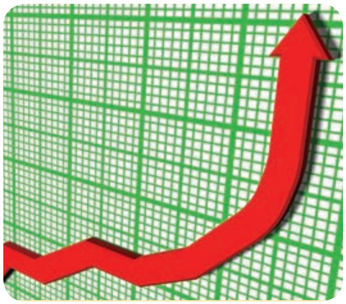
2.6. ábra $d = \frac{1}{32}$

Ezekből az ábrákból sejthető, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a racionális számok halmazán. Ez a sejtés bizonyítható is.

Ebből következik, hogy a függvény egyedül csak 0-hoz rendeli az 1 értéket.

Ha a 2.6. ábrára tekintünk, akkor kedvünk lenne folytonos vonallal rajzolni a grafikont. Tehetjük ezt? Nyilvánvalóan nem, hiszen az f csak a racionális számok halmazán van értelmezve, így az irracionális számokhoz nem rendel semmit.

Ha mégis ezt akarjuk tenni, akkor értelmezni kell az irracionális kitevős hatványt. Mit várunk el ettől a definíciótól?



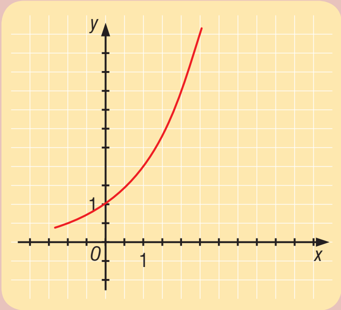
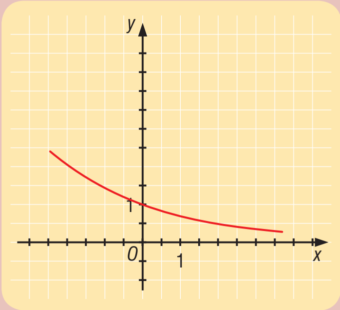
2.7. ábra „Exponenciális”

- A permanenciaelvnek tegyen eleget!
- Az 1-től különböző pozitív alapú exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza legyen!
- Az 1-től különböző pozitív alapú exponenciális függvény a valós számok halmazán szigorúan monoton legyen! (Ha az alap 1-nél nagyobb, akkor növekvő, ha 1-nél kisebb, akkor csökkenő.)
- Az 1-től különböző pozitív alapú exponenciális függvény bármely valós helyen folytonos legyen! (Ez a matematikus megfogalmazása annak, hogy a függvény grafikonja folytonos vonallal legyen lerajzolható.)

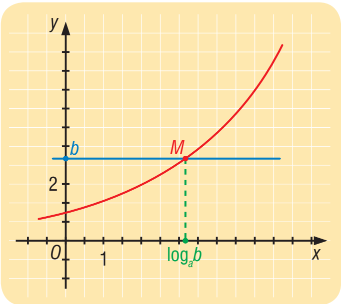
Az ezeknek a feltételeknek megfelelő definíció – nem egyszerű módszerekkel – megadható. Visszatérünk rá, ha a hozzá szükséges ismereteket a matematikai analízis (kalkulus) területéről már megszereztük.

Addig fogadjuk el, hogy a fenti követelményeknek eleget téve értelmezhetjük a valós kitevős hatványt!

Legyen most a egytől különböző (az $a = 1$ esetén konstans függvény lenne) valós szám, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Összefoglaljuk a függvénytulajdonságokat:

	Ha $a > 1$	Ha $1 > a > 0$
Grafikon:	 **2.8. ábra**	 **2.9. ábra**
Értékkészlet:	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
Menete:	szigorúan monoton nő	szigorúan monoton csökken
Szélsőérték:	nincs	nincs

3. A logaritmus



3.1. ábra Van olyan valós kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapjuk

A hatványozás valós kitevőre való kiterjesztése után látni fogjuk, hogy ha a egytől különböző pozitív szám, akkor az a alapú exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza. Ez azt jelenti, hogy bármely b pozitív valós szám eleme az a alapú exponenciális függvény értékkészletének, azaz lesz egyetlen (a függvény szigorúan monoton) olyan valós kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapjuk. Ez külön nevet is kapott:

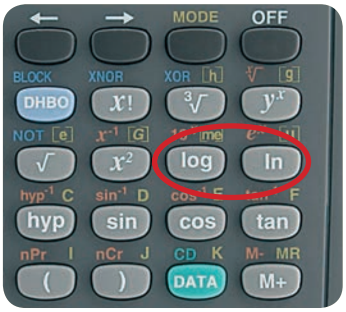
MatEm_Book.indb 18 2012.07.05. 11:36:55

Definíció Ha a 1-től különböző pozitív valós szám és b pozitív valós szám, akkor $\log_a b$ („a alapú logaritmus b”) az a kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapjuk, azaz $a^{\log_a b}=b$. Az a a logaritmus alapja, a b pedig a logaritmus numerusza.

1. példa Adjuk meg a következő logaritmusokat egyetlen valós számként!

a) $\log_2 4$ b) $\log_3 \dfrac{1}{81}$ c) $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}$ d) $\log_{1954} 1$ e) $\log_{2009} 2009$ f) $\log_{\sqrt[3]{16}} 2$

Megoldás:



3.2. ábra Logaritmus a számológépen

a) $\log_2 4=2$, mert $2^2=4$. A logaritmus definícióját használtuk.

b) $\log_3 \dfrac{1}{81}=-4$, mert $3^{-4}=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{81}$.

Más módon: $\log_3 \dfrac{1}{81}=\log_3 \dfrac{1}{3^4}=\log_3\left(3^{-4}\right)=-4$. A logaritmus és a negatív egész kitevős hatvány definícióját használtuk.

c) $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}=\log_5 \dfrac{1}{\sqrt[4]{5^3}}=\log_5 \dfrac{1}{5^{\frac{3}{4}}}=\log_5\left(5^{-\frac{3}{4}}\right)=-\dfrac{3}{4}$. A logaritmus és a racionális kitevős hatvány definícióját használtuk.

d) $\log_{1954} 1=0$, mert $1954^0=1$. Tekintettel arra, hogy bármely 0-tól különböző szám nulladik hatványa 1.

Tétel Ha a 1-től különböző pozitív valós szám, akkor $\log_a 1=0$.

e) $\log_{2009} 2009=1$, mert $2009^1=2009$. Tekintettel arra, hogy bármely valós szám első hatványa önmaga,

Tétel ha a 1-től különböző pozitív valós szám, akkor $\log_a a=1$.

f) Legyen

$$\log_{\sqrt[3]{16}} 2=y;$$

$$2=\left(\sqrt[3]{16}\right)^y;$$

$$2=2^{\frac{4y}{3}}.$$

A 2 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$\frac{4y}{3}=1,$$

$$y=\frac{3}{4},$$

így $\log_{\sqrt[3]{16}} 2=\frac{3}{4}.$

2. példa Adjuk meg a következő számokat egyetlen valós számként!

a) $3^{2+\log_{27}4}$ b) $16^{1-\log_2 5}$ c) $25^{2+\log_5 3-\log_{125}4}$

Megoldás:
Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait és a logaritmus definícióját!

a) $3^{2+\log_{27}4}=3^2\cdot 3^{\log_{27}4}=9\cdot\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{27}4}=9\cdot 27^{\frac{1}{3}\cdot\log_{27}4}=9\cdot\left(27^{\log_{27}4}\right)^{\frac{1}{3}}=9\cdot 4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2916}.$

b) $16^{1-\log_2 5}=\frac{16}{\left(2^{\log_2 5}\right)^4}=\frac{16}{5^4}=\frac{16}{625}.$

c) $25^{2+\log_5 3-\log_{125}4}=\frac{25^2\cdot\left(5^{\log_5 3}\right)^2}{\left(125^{\log_{125}4}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{625\cdot 9}{4^{\frac{2}{3}}}=\frac{5625}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{5625\cdot\sqrt[3]{4}}{4}.$

3. példa Adjuk meg a következő logaritmusokat egyetlen valós számként!

a) $\log_3 9$; $\log_3 27$; $\log_3 243$.

b) $\lg 10$; $\lg\frac{1}{100}$; $\lg\frac{1}{10}$. (A 10 alapú logaritmus jele: lg.)

c) ld 8; ld 16; ld 128. (A 2 alapú logaritmus jele: ld.)

d) $\log_5 125$; $\log_5\frac{1}{5}$; $\log_5 25$.

3.3. ábra $\mathrm{pH}=-\log_{10}[\mathrm{H}^+]$

Megoldás:
A logaritmus definíciója miatt:

a) $\log_3 9=2$; $\log_3 27=3$; $\log_3 243=5$.

b) $\lg 10=1$; $\lg\frac{1}{100}=-2$; $\lg\frac{1}{10}=-1$.

c) $\mathrm{ld}\,8=3$; $\mathrm{ld}\,16=4$; $\mathrm{ld}\,128=7$.

d) $\log_5 125=3$; $\log_5\frac{1}{5}=-1$; $\log_5 25=2$.

A 3. példában az első két oszlopban levő logaritmusok numeruszainak szorzata a harmadik oszlopban levő logaritmus numerusza, a megoldásokban az első két oszlopban levő logaritmusok összege pedig a harmadik oszlopban levő logaritmussal egyezik meg. Megsejthető a következő:

Tétel Ha a 1-től különböző pozitív valós szám, b és c pozitív valós számok, akkor $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$, azaz a szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusainak összegével.

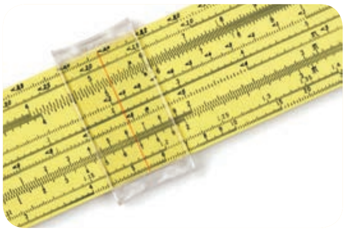
Bizonyítás:

A logaritmus definíciója szerint: $a^{\log_a(b\cdot c)}=b\cdot c.$ (1)

A logaritmus definíciója és az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság szerint:

$$a^{\log_a b+\log_a c}=a^{\log_a b}\cdot a^{\log_a c}=b\cdot c. \qquad (2)$$

Az (1)-ből és (2)-ből: $a^{\log_a(b\cdot c)}=a^{\log_a b+\log_a c}$. Tekintettel arra, hogy az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c.$



3.4. ábra Logarléc

Ha a 3. példa 2. és 3. oszlopát vetjük össze az 1. oszloppal, akkor megsejthetjük a következőt:

Tétel Ha a 1-től különböző pozitív valós szám, b és c pozitív valós számok, akkor $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$, azaz a hányados logaritmusa egyenlő a számláló logaritmusának és a nevező logaritmusának különbségével.

Bizonyítás:

A logaritmus definíciója szerint: $a^{\log_a\left(\frac{b}{c}\right)}=\frac{b}{c}.$ (1)

A logaritmus definíciója és az azonos alapú hatványok hányadosára vonatkozó azonosság szerint:

$$a^{\log_a b-\log_a c}=\frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}}=\frac{b}{c}. \qquad (2)$$

Az (1)-ből és (2)-ből: $a^{\log_a\left(\frac{b}{c}\right)}=a^{\log_a b-\log_a c}$. Tekintettel arra, hogy az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c.$

3.5. ábra $X_{\mathrm{dB}}=10\log_{10}\left(\frac{X}{X_0}\right)$

A korábbi példákban szerepeltek hatványok logaritmusai is.

Tétel Ha a 1-től különböző pozitív valós szám, b pozitív valós szám, c tetszőleges valós szám, akkor $\log_a\left(b^c\right)=c\cdot\log_a b$, azaz a hatvány logaritmusa egyenlő a hatványkitevőnek és a hatványalap logaritmusának a szorzatával.

Bizonyítás:

A logaritmus definíciója szerint: $a^{\log_a\left(b^c\right)} = b^c$. (1)

A logaritmus definíciója és a hatvány hatványára vonatkozó azonosság szerint:

$$a^{c\cdot\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^c = b^c. \qquad (2)$$

Az (1)-ből és (2)-ből: $a^{c\cdot\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^c = b^c$. Tekintettel arra, hogy az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, $\log_a\left(b^c\right) = c\cdot\log_a b$.

A logaritmusokat eddigi példáinkban a definíció és a hatványozás azonosságainak alkalmazásával sikerült megadni egyetlen valós számként. Ez annak volt köszönhető, hogy a logaritmus numerusza az alap racionális kitevős hatványa volt. Ha ez nincs így, akkor számológépekre vagy táblázatokra kell hagyatkozni. Ekkor a logaritmusok közelítő értékét kaphatjuk meg.

4. példa Adjuk meg a következő logaritmusok négy tizedesjegyre kerekített értékét!

a) $\lg 16$; $\lg 2$; $\log_2 16$.

b) $\ln 81$; $\ln 9$; $\log_9 81$.

(Az ln a természetes alapú logaritmus jele. Ennek alapszáma az e-vel jelölt irracionális szám – Euler-féle szám –, amelyről az Analízis című fejezetben sok szó esik majd.)

c) $\lg 123$; $\lg e$; $\ln 123$.

d) $\log_5 625$; $\log_5 25$; $\log_{25} 625$.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00000
2	2,25000
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827

3.6. ábra Az Euler-szám közelítése

Megoldás:

a) $\lg 16 \approx 1,2041$; $\lg 2 \approx 0,3010$; $\log_2 16 = 4$.

b) $\ln 81 \approx 4,3944$; $\ln 9 \approx 2,1972$; $\log_9 81 = 2$.

c) $\lg 123 \approx 2,0899$; $\lg e \approx 0,4343$; $\ln 123 \approx 4,8122$.

d) $\log_5 625 = 4$; $\log_5 25 = 2$; $\log_{25} 625 = 2$.

Van-e kapcsolat az egy sorban levő logaritmusok között? A figyelmes szemlélőnek feltűnhet, hogy az első oszlopban levő logaritmus a másik két oszlopban levő logaritmusok szorzata. Ez általánosan is igaz.

Tétel Ha a és b 1-től különböző pozitív valós szám, valamint c pozitív valós szám, akkor $\log_a b\cdot\log_b c = \log_a c$.

Bizonyítás:

A logaritmus definíciója szerint: $a^{\log_a c} = c$. (1)

A logaritmus definíciója és a hatvány hatványára vonatkozó azonosság szerint:

$$a^{\log_a b\cdot\log_b c} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b c} = b^{\log_b c} = c. \qquad (2)$$

Az (1)-ből és (2)-ből: $a^{\log_a b \cdot \log_b c} = a^{\log_a c}$. Tekintettel arra, hogy az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

Ezt az azonosságot szokták ilyen alakban is írni: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$. Arra is használható, hogy egy adott alapú logaritmust kifejezzük egy más alapú logaritmussal.

5. példa A következő összeg értéke egy egész szám. Határozzuk meg ezt a számot!

$$\log_{2010}\frac{1}{2}+\log_{2010}\frac{2}{3}+\log_{2010}\frac{3}{4}+\ldots+\log_{2010}\frac{n}{n+1}+\ldots+\log_{2010}\frac{2008}{2009}+\log_{2010}\frac{2009}{2010}$$

Megoldás:

Legyen

$$a=\log_{2010}\frac{1}{2}+\log_{2010}\frac{2}{3}+\log_{2010}\frac{3}{4}+\ldots+\log_{2010}\frac{n}{n+1}+\ldots$$
$$\ldots+\log_{2010}\frac{2008}{2009}+\log_{2010}\frac{2009}{2010}!$$

Alkalmazzuk a szorzat logaritmusára vonatkozó tételt!

$$a=\log_{2010}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2009}\cdot\frac{2009}{2010}\right)$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket és alkalmazva a hatvány logaritmusára vonatkozó tételt:

$$a=\log_{2010}\frac{1}{2010}=\log_{2010}\left(2010^{-1}\right)=-\log_{2010}2010=-1.$$

3.7. ábra „Teleszkopikus szorzat”

6. példa Adjuk meg a következő szám egész részét!

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1)\cdot\ldots\cdot\log_{2008}2009\cdot\log_{2009}2010$$

Megoldás:

Legyen $b=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1)\cdot\ldots\cdot\log_{2008}2009\cdot\log_{2009}2010$! Írjuk át az összes logaritmust kettes alapra!

$$b=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_2 2009}{\log_2 2008}\cdot\frac{\log_2 2010}{\log_2 2009}.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket: $b=\log_2 2010$.

Tudjuk, hogy $1024<2010<2048$, $1024=2^{10}$, $2010=2^b$ és $2048=2^{11}$. A 2 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, így $10<b<11$, azaz $[b]=10$.

7. példa Adjuk meg egyetlen valós számként ($a>0$ és $a\neq 1$)!

$$\log_a\sqrt{a^2\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt[5]{a^6}}}$$

Megoldás:

Legyen $c=\log_a\sqrt{a^2\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt[5]{a^6}}}$. A gyökvonás azonosságait alkalmazva:

$$c=\log_a\sqrt{a^2\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt[5]{a^6}}}=\log_a\left(a\cdot\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[30]{a^6}\right)=\log_a\left(a\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a}\right).$$

A törtkitevős hatványról tanultak szerint:

$$c=\log_a\left(a\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a}\right)=\log_a\left(a\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{5}}\right)=\log_a\left(a^{\frac{15}{15}+\frac{10}{15}+\frac{3}{15}}\right)=\log_a\left(a^{\frac{28}{15}}\right).$$

Alkalmazva a hatvány logaritmusára vonatkozó tételt:

$$c=\log_a\left(a^{\frac{28}{15}}\right)=\frac{28}{15}\log_a a=\frac{28}{15}.$$

8. példa Legyen $p=\lg 2009$ és $q=\lg 287$! Fejezzük ki p és q segítségével a $\lg 1681$-et!

3.8. ábra 1681. Bahcsiszeráji béke

Megoldás:

$$p=\lg 2009=\lg\left(7^2\cdot 41\right)=\lg\left(7^2\right)+\lg 41=2\lg 7+\lg 41. \qquad (1)$$

$$q=\lg 287=\lg(7\cdot 41)=\lg 7+\lg 41. \qquad (2)$$

Vonjuk ki a (2) egyenlet kétszereséből az (1) egyenletet!

$\lg 41=2q-p$.

Ugyanakkor $\lg 1681=\lg\left(41^2\right)=2\cdot\lg 41=2(2q-p)=4q-2p$.

Oldjuk meg!

1. Adjuk meg egyetlen valós számként $(a>0$ és $a\neq 1)$!

$$\log_a\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt{a^5}}}}{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[4]{a^5}}}$$

3.9. ábra 1003. II. Szilveszter pápa halála

2. Adjuk meg egyetlen valós számként!

$$\log_{2009}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2008}\right)\cdot\log_{2009}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2008}\right)\cdot\log_{2009}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2008}\right)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\log_{2009}\left(\operatorname{tg}\frac{1003\pi}{2008}\right)$$

3. Melyik nagyobb: az $\frac{1}{4}+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ vagy az $\frac{1}{2}$?

4. Az a olyan szám, amelyre $\log_3(\log_{81}a)=\log_{81}(\log_3 a)$. Adjuk meg a $(\log_3 a)^3$-t egyetlen valós számként!

5. Az a és b olyan számok, amelyekre

$$\log_{81} a+\log_9\left(b^2\right)=10;$$
$$\log_{81} b+\log_9\left(a^2\right)=14.$$

Adjuk meg az $(ab)^9$-t egyetlen valós számként!

6. A következő különbség egy racionális szám. Határozzuk meg ezt a számot!

$$\log_5\left(\log_7\sqrt[5]{7}\right)-\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{\sqrt[5]{7}}\right)$$

7. Adjuk meg a következő számot egyetlen valós számként!

$$3^{2+\log_9 25}+25^{1-\log_5 2}-10^{\lg 4}$$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 170., 175., 177., 178., 182., 183., 184. és 185. feladatok

4. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

Az alábbi feladatokban felhasználjuk az exponenciális, valamint a logaritmusfüggvény szigorúan monoton tulajdonságát, valamint a hatványozás és a logaritmus azonosságait. A függvények tulajdonságaival kapcsolatos ismereteket könyvünk Analízis című fejezete tartalmazza részletesen.

1. példa Oldjuk meg a valós számok körében!

$$\sqrt[5]{2^{x-1}}=0,25^{x^2-1}$$

Megoldás:
Írjuk fel mindkét oldalt a 2 hatványaként:

$$2^{\frac{x-1}{5}}=\left(2^{-2}\right)^{x^2-1},$$
$$2^{\frac{x-1}{5}}=2^{-2x^2+2}.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt:

$$\frac{x-1}{5}=-2x^2+2,$$

ahonnan

$$x-1=-10x^2+10,$$
$$10x^2+x-11=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1=1,\ \ x_2=-1{,}1.$ Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, így pontosan ezek a megoldásai az eredeti egyenletnek is.

MatEm_Book.indb 25 2012.07.05. 11:37:58

2. példa Oldjuk meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán!

$$\sqrt{9^x - 8 \cdot 3^x + 24} = 3^{x+1}$$

Megoldás:

Ha bevezetjük a $3^x = a(>0)$ helyettesítést, akkor rendezés után:

$$\sqrt{a^2 - 8a} = 3a - 24.$$

Négyzetre emelést követően:

$$a^2 - 8a = 9a^2 - 144a + 576,$$
$$0 = 8a^2 - 136a + 576,$$
$$0 = a^2 - 17a + 72.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a_1 = 9$, $a_2 = 8$. Az elsőből $x = 2$, felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát. Mivel x természetes szám, ezért $a = 8$ nem felel meg. Tehát az eredeti egyenlet egyetlen természetes szám megoldása a 2. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás valóban helyes.

3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$\frac{4^x + 9^x}{6^x} = \frac{13}{6}$$

Megoldás:

A nevezőkkel való szorzás és rendezés után:

$$6 \cdot 4^x + 6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x = 0.$$

Bevezetve a $2^x = a(>0)$, $3^x = b(>0)$ helyettesítéseket, felszínre kerül az egyenlet szerkezete:

$$6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0.$$

Osztva b^2-tel:

$$6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\frac{a}{b} + 6 = 0.$$

Ennek az $\frac{a}{b}$-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai: $\frac{3}{2}$ és $\frac{2}{3}$. Innen

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1, \text{ illetve } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Leftrightarrow x = 1,$$

az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát felhasználva. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott megoldások helyesek.

4. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Megoldás:

Végezzük el a $64^x = a(>0), 64^y = b(>0)$ helyettesítéseket! Ekkor az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12, \\ ab = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

A második egyenletből: $b = \dfrac{4\sqrt{2}}{a}$, amit behelyettesítve kapjuk, hogy

$$a^2 + \frac{32}{a^2} = 12 \Leftrightarrow a^4 - 12a^2 + 32 = 0.$$

Ennek az a^2-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a^2 = 4$, $a^2 = 8$. Mivel $a > 0$, így innen $a = 2 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$ vagy $a = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = 2$. Figyelembe véve, hogy $64 = 2^6$ és $2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$, valamint az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát:

$$64^x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6},\ 64^y = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4},$$

illetve

$$64^x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4},\ 64^y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{6}.$$

Mivel a mondott feltételek mellett ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, így pontosan ez a két megoldáspár elégíti ki az eredeti egyenletrendszer egyenleteit is.

5. példa Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok körében!

$$\left(\frac{2009}{2010}\right)^{x^2-5x+4} < 1$$

Megoldás:

Mivel $1 = \left(\dfrac{2009}{2010}\right)^0$, továbbá az $x \mapsto \left(\dfrac{2009}{2010}\right)^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton csökken (az alap 1-nél kisebb pozitív szám!), ezért az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens az alábbival:

$$x^2 - 5x + 4 > 0.$$

Ennek megoldásai: $x < 1$ vagy $x > 4$.

6. példa Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a pozitív valós számok halmazán!

$$(x+1)^{x^2-7x+12} > 1$$

Megoldás:

Előrebocsátjuk, hogy a bal oldalon szereplő függvény nem exponenciális függvény, ezért elvi hibás minden olyan megoldás, amely ennek pl. a szigorúan monoton növekedésére hivatkozik. (A függvény növekedési viszonyai differenciálszámítás segítségével tisztázhatók.)

Mivel az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton növekvő, **valamint az egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív számok állnak**, ezért az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha tekintjük mindkét oldal 10 alapú logaritmusát:

$$\left(x^2-7x+12\right)\lg\left(x+1\right)>0.$$

Mivel x pozitív, így $\lg\left(x+1\right)>0,$ következésképpen elegendő megmondani, mikor teljesül

$$x^2-7x+12>0.$$

A bal oldalon álló másodfokú polinomfüggvénynek a 3 és 4 számok a zérushelyei, így a megoldások:

$$0<x<3 \text{ vagy } 4<x.$$

7. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$\lg\sqrt{x-1}+\lg\sqrt{2x+6}=\lg\left(x+3\right)$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt $x>1,$ $x>-3,$ így az egyenlet értelmezési tartománya: $x>1.$ Azonosságot alkalmazva:

$$\lg\sqrt{\left(x-1\right)\left(2x+6\right)}=\lg\left(x+3\right).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva:

$$\left(x-1\right)\cdot\left(2x+6\right)=\left(x+3\right)^2,$$

innen

$$x^2-2x-15=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1=-3, x_2=5,$ melyek közül csak $x=5$ eleme az értelmezési tartománynak, így csakis ez lehet megoldás. Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ez valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

8. példa Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok körében!

$$\log_3\log_8\log_2\left(x+9\right)=-1+\log_3 2$$

Megoldás:

Mivel a jobb oldalon a logaritmus definíciója, illetve azonosság miatt:

$$\log_3 2-\log_3 3=\log_3\frac{2}{3},$$

így a logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva az eredeti egyenletből

$$\log_8\log_2\left(x+9\right)=\frac{2}{3}.$$

Innen

$$\log_2\left(x+9\right)=8^{\frac{2}{3}}=4.$$

A logaritmus értelmezése miatt ebből

$$x+9=16 \Leftrightarrow x=7.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.

9. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1$$

Megoldás:
A logaritmus értelmezése miatt: $x > 0$, $x \neq 1$. Térjünk át 2 alapú logaritmusra:

$$\log_4(x+12) = \frac{\log_2(x+12)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x+12)}{2} \text{ és } \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x},$$

így

$$\frac{\log_2(x+12)}{2}\cdot\frac{1}{\log_2 x} = 1,$$

$$\log_2(x+12) = \log_2 x^2.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva adódik, hogy

$$x+12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, melyek közül csak $x = 4$ eleme az értelmezési tartománynak, így csakis ez lehet a megoldás. Behelyettesítve könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ez valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

10. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 2 \\ x^y = \dfrac{1}{125} \end{cases}$$

Megoldás:
A logaritmus értelmezése miatt x és y csak pozitív számok lehetnek. Felhasználva a logaritmus definícióját, az első egyenletet átalakíthatjuk a következő módon:

$$\log_5 x + y = 2 \Leftrightarrow \log_5 x = 2 - y \Leftrightarrow x = 5^{2-y}.$$

Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\left(5^{2-y}\right)^y = 5^{-3},$$

$$5^{-y^2+2y} = 5^{-3},$$

$$y^2 - 2y = 3,$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0,$$

miközben felhasználtuk az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát. Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai $y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{5}$ és $y_2 = -1$, de ez utóbbi nem lehetséges. Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a kapott megoldáspár valóban kielégíti az egyenleteket.

11. példa Határozzuk meg a valós számok halmazának legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x)=\sqrt{\log_{0,5}\left(6x^2-x-1\right)}$$

hozzárendelés értelmezhető!

Megoldás:
A logaritmus értelmezése miatt

$$6x^2-x-1>0,$$

$$6\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)>0, \text{ ahonnan}$$

$$x>\frac{1}{2} \text{ vagy } x<-\frac{1}{3}.$$

(Felhasználtuk a másodfokú polinom gyöktényezős alakját.) A négyzetgyök értelmezése miatt

$$\log_{0,5}\left(6x^2-x-1\right)\geq 0.$$

Mivel $0=\log_{0,5}1$, továbbá a 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$6x^2-x-1\leq 1,$$

$$6x^2-x-2\leq 0,$$

$$6\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\leq 0, \text{ ahonnan}$$

$$-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{2}{3}.$$

Összevetve a két egyenlőtlenséget, adódik a megoldás:

$$-\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{3} \text{ vagy } \frac{1}{2}<x\leq\frac{2}{3}.$$

Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5^{2x}-4\cdot 5^x-5=0$ b) $9^{x+\sqrt{x^2+2}}-4\cdot 3^{x-1+\sqrt{x^2+2}}=69$ c) $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\sqrt{6^x}$

d) $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$ e) $\log_2(1-x)-\log_2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=4$ f) $\log_{\sqrt[4]{x}}x+\log_3 x-\log_{\frac{1}{3}}x=8$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases}\left(2^{x^2+2x-4}\right)^{y^2}=\dfrac{1}{16}\\ \sqrt{3^x}=\sqrt[6]{27^{y-1}}\end{cases}$ b) $\begin{cases}y^{x^2+7x+12}=1\\ x+y=6\end{cases}$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

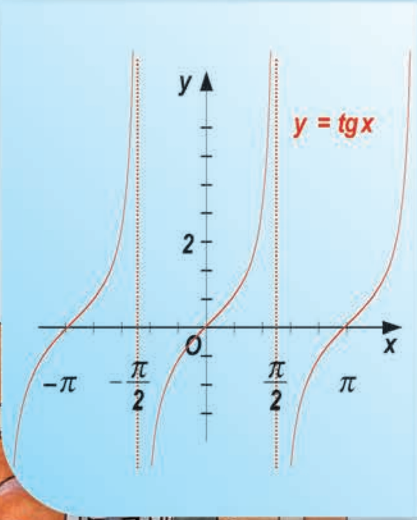
a) $7^{\frac{2x-1}{x+1}}>343$ b) $\lg\dfrac{x-3}{4-x}<0$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 135–165., illetve 190–223. feladatok

MatEm_Book.indb 30 2012.07.05. 11:38:46

II. fejezet

Vektorok és trigonometria



Szöges ellentét

1. Vektorok

A 9. osztályban már találkoztunk a **vektor** fogalmával, amely az ott tanult definícióval ekvivalens módon így is megadható:

Definíció A vektor azoknak és csak azoknak az irányított szakaszoknak a halmaza, melyek ugyanazt az eltolást határozzák meg. (Az identikus transzformációt megadó vektort **nullvektor**nak nevezzük.)

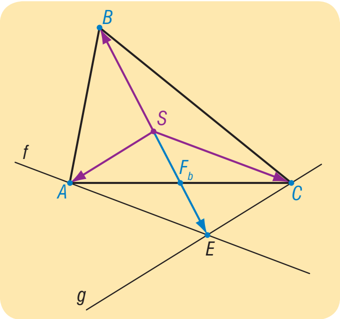
Ebből következik, hogy a nem nullvektorok jellemzői a **nagyság**uk (hosszuk vagy **abszolút érték**ük) $\left(|\vec{v}|\right)$ és **irány**uk. A nullvektor abszolút értéke nulla, $\left(|\vec{0}|=0\right)$.

Ugyancsak megismertük **a vektorok összeadásának** két – egymással ekvivalens – módját (háromszögmódszer, paralelogrammamódszer). Ismételjük át két példa segítségével a tanultakat!

1. példa a) Egy háromszögben szerkesszük meg a súlypontból a csúcsokba mutató vektorok összegét!
b) Bizonyítsuk a szerkesztés alapján megfogalmazódó sejtésünket!

Megoldás:
a) A szerkesztés elvégzése után megfogalmazható a következő sejtés:

Tétel Bármely háromszög súlypontjából a háromszög csúcsaiba mutató vektorok összege nullvektor.



1.1. ábra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SE}$

b) Legyenek a háromszög csúcsai *A*, *B* és *C*, súlypontja pedig *S*! Adjuk össze paralelogrammamódszerrel az $\overrightarrow{SA}$ és $\overrightarrow{SC}$ vektorokat! Legyen az összeg $\overrightarrow{SE}$! Az *AECS* négyszög paralelogramma, a paralelogramma átlói pedig felezik egymást, ezért az *AC* szakasz F_b felezőpontja illeszkedik az *SE* szakaszra, és $SF_b=\dfrac{SE}{2}$. A háromszög súlypontjára vonatkozó ismert tétel szerint *S* illeszkedik az BF_b szakaszra, és $SF_b=\dfrac{SB}{2}$.

Ebből következően az $\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ és $\overrightarrow{SB}$ vektorok egymás **ellentett vektor**ai, így az összegük nullvektor.

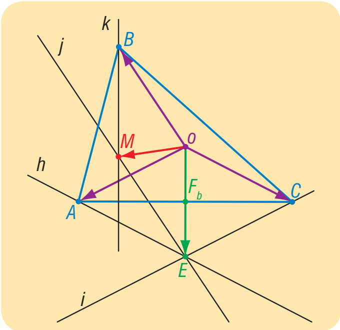
Tekintettel arra, hogy a vektorok összeadása **kommutatív** és **asszociatív**, nincs kitüntetett szerepe annak, hogy melyik két vektor összeadásával kezdjük a megoldást.

2. példa a) Egy háromszögben szerkesszük meg a körülírt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összegét! A kapott összegvektort vegyük fel a körülírt kör középpontjából indítva!
b) Szerkesszük meg a háromszög magasságpontját!
c) Bizonyítsuk a szerkesztés alapján megfogalmazódó sejtésünket!

Megoldás:
a) – b) A szerkesztés elvégzése után megfogalmazható a következő sejtés:

Tétel Bármely háromszög körülírt körének középpontjából a háromszög csúcsaiba mutató vektorok összege a körülírt kör középpontjából a háromszög magasságpontjába mutat.

c) Legyenek a háromszög csúcsai A, B és C, körülírt körének középpontja pedig O! Adjuk össze paralelogrammamódszerrel az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OC}$ vektorokat! Legyen az összeg $\overrightarrow{OE}$! Az $AECO$ négyszög rombusz, a rombusz átlói pedig merőlegesen felezik egymást, azaz $AC \perp OE$.
Adjuk össze paralelogrammamódszerrel az $\overrightarrow{OE}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokat! Legyen az összeg $\overrightarrow{OM}$!
Ekkor $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. A paralelogrammamódszer miatt: $BM \parallel OE$, azaz $AC \perp BM$, ami azt jelenti, hogy M eleme a háromszög B-re illeszkedő magasságvonalának.
Az $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC}$ vektorok összegéből kiindulva – mivel a vektorösszeadás kommutatív és asszociatív – a három vektor összege ugyancsak $\overrightarrow{OM}$. Ebben az esetben hasonló gondolatmenettel az adódik, hogy M eleme a háromszög A-ra illeszkedő magasságvonalának. A magasságvonalak egyeneseinek metszéspontja pedig a magasságpont.



1.2. ábra Mi az M pont?

Két **vektor különbségéről** is tanultunk már a 9. osztályban. Emlékeztetőül oldjuk meg a következő példát!

3. példa Milyen (nullvektortól különböző) vektorokra igaz a következő állítás? Két vektor összege és különbsége merőleges egymásra.

Megoldás:
A két vektor által meghatározott vektorparalelogramma rombusz, hiszen átlói merőlegesek egymásra. Ebből következik, hogy a vizsgált vektorok egyenlő nagyságúak.

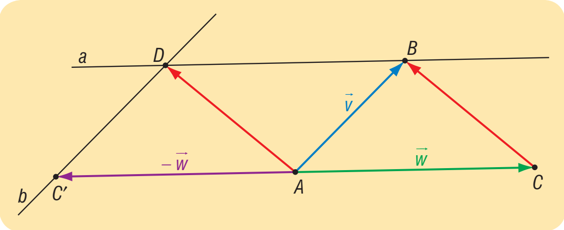
Megjegyzés:
A kapott eredmény megfordítása is igaz, azaz ha két nem nullvektor egyenlő abszolút értékű és nem párhuzamosak, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra.

A **vektorok valós számmal való szorzása** és annak tulajdonságai is ismertek a 9. osztályból.

Megjegyzés:
Vektor számmal való szorzása nem művelet, hiszen nem egy halmaz összes rendezett elempárjához rendel egy elemet a halmazból.

Felmerülhet a kérdés, hogy a kivonás művelet-e? Érdemes elgondolkodni ezen.

Az összeadást és a kivonást kapcsolja össze a következő tétel, amelynek bizonyítását az olvasóra bízzuk, csak egy ábrát adunk segítségül.



1.3. ábra $\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$

Tétel Legyen $\vec{v}$ és $\vec{w}$ két tetszőleges vektor! Ekkor igaz, hogy $\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$.

A későbbiekben gyakran használatos lesz a következő tétel:

Tétel Két nem nullvektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha létezik pontosan egy olyan 0-tól különböző valós szám, amellyel az egyik vektort megszorozva a másik vektort kapjuk. $\left(v \parallel w \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, k\vec{v}=\vec{w}\right)$

Bizonyítás:
a) Ha van olyan 0-tól különböző k valós szám, melyre $k\vec{v}=\vec{w}$, akkor $\vec{v} \parallel \vec{w}$, a számmal való szorzás definíciója alapján nyilvánvaló.

b) Legyen $\vec{v} \parallel \vec{w}$!

Ha $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}$, akkor legyen $k=\frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$! Ekkor $|k\vec{v}|=|k|\cdot|\vec{v}|=\frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}|\vec{v}|=|\vec{w}|$ és $k\cdot\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}$. Ebből következően $k\vec{v}=\vec{w}$.

Ha $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{w}$, akkor legyen $k=-\frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$! Ekkor $|k\vec{v}|=|k|\cdot|\vec{v}|=\frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}|\vec{v}|=|\vec{w}|$ és $k\cdot\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}$. Ebből következően $k\vec{v}=\vec{w}$.

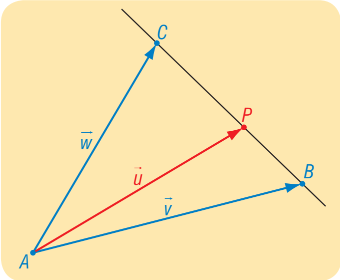
4. példa Legyen $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ és $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$ két tetszőleges nem nullvektor, az ε tetszőleges valós szám! Az $\vec{u}=\varepsilon\vec{v}+(1-\varepsilon)\vec{w}=\overrightarrow{AP}$. Milyen állítás fogalmazható meg a P pontra vonatkozóan?

Megoldás:
Néhány konkrét ε esetére elvégezve a szerkesztést, megfogalmazható az a sejtés, hogy P illeszkedik a BC egyenesre. Igazoljuk az állítást!

MatEm_Book.indb 34 2012.07.05. 11:39:15

$$\overrightarrow{CP} = \vec{u} - \vec{w} = \varepsilon\vec{v} + (1-\varepsilon)\vec{w} - \vec{w} =$$
$$= \varepsilon\vec{v} + \vec{w} - \varepsilon\vec{w} - \vec{w} = \varepsilon\vec{v} - \varepsilon\vec{w} = \varepsilon\left(\vec{v} - \vec{w}\right) =$$
$$= \varepsilon\overrightarrow{CB}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a C, P és B pontok kollineárisak.



1.4. ábra C, P és B kollineárisak

Nézzük meg a 3. példa eredményét néhány speciális esetben!

- Ha $\varepsilon = \frac{1}{2}$, akkor $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ és $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \frac{\vec{v}+\vec{w}}{2}$.
  (A CB szakasz felezőpontjába mutató vektor.)
- Ha $\varepsilon = \frac{1}{3}$, akkor $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ és $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w} = \frac{\vec{v}+2\vec{w}}{3}$.
  (A CB szakasz C-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektor.)
- Ha $\varepsilon = \frac{2}{3}$, akkor $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ és $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = \frac{2\vec{v}+\vec{w}}{3}$.
  (A CB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektor.)
- Ha $\varepsilon = -1$, akkor $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CB}$ és $\vec{u} = -\vec{v} + 2\vec{w}$.
  (A B pont C-re vonatkozó tükörképébe mutató vektor.)
- Ha $\varepsilon = 2$, akkor $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CB}$ és $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$.
  (A C pont B-re vonatkozó tükörképébe mutató vektor.)
- Ha $\varepsilon = \frac{1}{4}$, akkor $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ és $\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w} = \frac{\vec{v}+3\vec{w}}{4}$.
  (A CB szakasz C-hez közelebbi negyedelőpontjába mutató vektor.)
- Ha a P olyan pontja a CB szakasznak, hogy $\frac{CP}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}$, ahol λ és μ adott pozitív számok, akkor
  $$\overrightarrow{CP} = \frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{PB} = \frac{\lambda}{\mu}\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}\right) = \frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{CB} - \frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{CP}.$$

Ebből következően:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)\overrightarrow{CP} = \frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{CB};$$
$$(\mu + \lambda)\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CB};$$
$$\overrightarrow{CP} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\overrightarrow{CB}.$$

Legyen ezért $\varepsilon = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$! Ekkor $\vec{u} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\vec{v} + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)\vec{w} = \frac{\mu\vec{w} + \lambda\vec{v}}{\mu + \lambda}$.

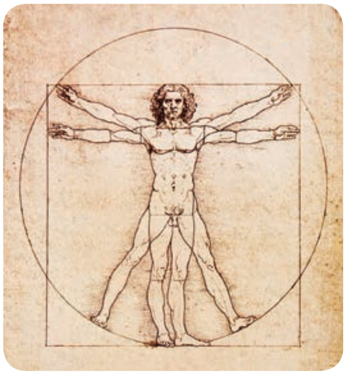
(A CB szakaszt adott arányban osztó P pontba mutató vektor.)

Oldjuk meg!

1. Az A, B, C, D, E és F egy szabályos hatszög egymást követő csúcsai. Adjuk meg az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ összeget!

2. Egy tetszőleges *O* pontból egy $ABC_\triangle$ csúcsaiba az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok mutatnak. Fejezzük ki ezek segítségével az $\overrightarrow{OS}$ vektort, ahol *S* a háromszög súlypontja!

3. Egy $ABC_\triangle$ körülírt körének *O* középpontjából a háromszög csúcsaiba az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok mutatnak. Fejezzük ki ezek segítségével az $\overrightarrow{OM_a}$ vektort, ahol M_a a háromszög *M* magasságpontjának a *BC* oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe!



1.5. ábra Köré írt kör

4. Igazoljuk, hogy bármely háromszög körülírt körének *O* középpontja, *S* súlypontja és *M* magasságpontja kollineárisak (egy egyenesre illeszkednek), és *S* az *OM* szakasz *O*-hoz közelebbi harmadolópontja! (Euler-egyenes)

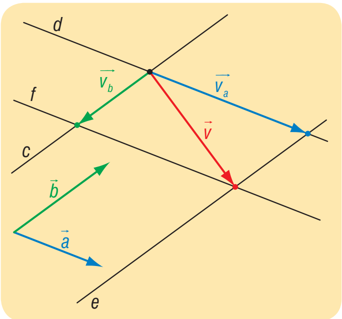
5. Egy tetszőleges *O* pontból egy $ABC_\triangle$ csúcsaiba az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok mutatnak. A háromszög oldalai a szokásos jelölésekkel *a*, *b* és *c*. Fejezzük ki ezen adatok segítségével az $\overrightarrow{OK}$ vektort, ahol *K* a háromszögbe írt kör középpontja!

6. Egy tetszőleges *O* pont nem illeszkedik az $ABC_\triangle$ egyik oldalegyenesére sem. Az $OBC_\triangle$ súlypontja S_a, az $OAC_\triangle$ súlypontja S_b, és az $OAB_\triangle$ súlypontja S_c. Bizonyítsuk be, hogy az AS_a, BS_b és CS_c szakaszok egy pontban metszik egymást!

További feladatok:
Fuksz Éva – Riener Ferenc: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9-10.* Maxim Könyvkiadó.: 764., 767., 756. és 759. feladatok

2. A vektorok koordinátái

Legyen most két rögzített, nem párhuzamos vektor $\vec{a}$ és $\vec{b}$ úgy, hogy egyik sem nullvektor! A 9. osztályos tanulmányainkból tudjuk, hogy bármelyik $\vec{v}$ vektor egyértelműen előállítható $\vec{a}$-ral és $\vec{b}$-ral párhuzamos vektorok összegeként (vektorok felbontása összetevőkre). Ez azt jelenti, hogy létezik pontosan egy olyan $\left(\vec{v_a};\vec{v_b}\right)$ vektorpár, melyre: $\vec{v}=\vec{v_a}+\vec{v_b}$, ahol $\vec{v_a}\parallel\vec{a}$ és $\vec{v_b}\parallel\vec{b}$. Így egy korábbi – párhuzamos nem nullvektorokra vonatkozó – tételből következően igaz az is, hogy létezik pontosan egy olyan $\left(k_a;k_b\right)$ valós számpár, melyre: $\vec{v}=k_a\vec{a}+k_b\vec{b}$. Ezt úgy is szoktuk fogalmazni, hogy a $\vec{v}$ vektor egyértelműen állítható elő az $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ bázis vektorainak lineáris kombinációjaként. A $\left(k_a;k_b\right)$ számpárt a $\vec{v}$ vektor $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ bázisban vett koordinátáinak nevezzük. (A nullvektor mindkét koordinátája 0.)

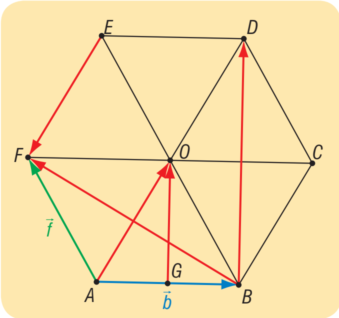


2.1. ábra Vektorok felbontása összetevőkre

Az előzőekből következik, hogy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést adtunk meg a sík vektorai és a rendezett valós számpárok halmaza között.

1. példa Az A, B, C, D, E és F egy szabályos hatszög egymást követő csúcsai, a középpontja O, az AB oldal felezőpontja G. Legyen $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ és $\vec{f}=\overrightarrow{AF}$! Adjuk meg a következő vektorok koordinátáit a $(\vec{b};\vec{f})$ bázisban: $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{GO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BF}$!

Megoldás:



2.2. ábra A vizsgált vektorok

$$\overrightarrow{AO}=\vec{b}+\vec{f},\ \text{így}\ \overrightarrow{AO}(1;1).$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\vec{b}=2\overrightarrow{AO}-\vec{b}=2\left(\vec{b}+\vec{f}\right)-\vec{b}=\vec{b}+2\vec{f},\ \text{így}$$
$$\overrightarrow{BD}(1;2).$$

A GO középvonal az ABD háromszögben, ezért

$$\overrightarrow{GO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+2\vec{f}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{f},\ \text{így}\ \overrightarrow{GO}\left(\frac{1}{2};1\right).$$

Más módon is megkaphatjuk ezt az eredményt:

$$\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{f}.$$

$$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AO}=-\left(\vec{b}+\vec{f}\right)=-\vec{b}-\vec{f},\ \text{így}\ \overrightarrow{EF}(-1;-1).$$

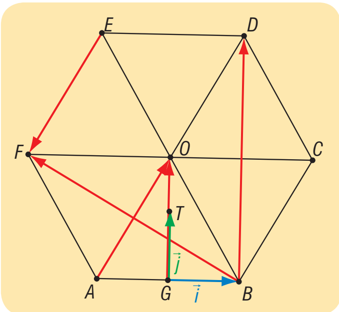
$$\overrightarrow{BF}=\vec{f}-\vec{b}=-\vec{b}+\vec{f},\ \text{így}\ \overrightarrow{BF}(-1;1).$$

A vektorok koordinátái – az előzőekből következően – függnek a bázistól. A bázis szabadon választható. Gyakori az olyan speciális $(\vec{i};\vec{j})$ bázis alkalmazása, melyre igaz, hogy $\vec{i}\perp\vec{j}$, és $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ (egymásra merőleges egységvektorok, ortonormált bázis).

2. példa Az A, B, C, D, E és F egy 2 oldalhosszúságú szabályos hatszög egymást követő csúcsai, a középpontja O, az AB oldal felezőpontja G. Legyen $\vec{i}=\overrightarrow{GB}$ és $\vec{j}=\overrightarrow{GT}$, ahol T a GO szakasz azon pontja, melyre $GT=1$! Adjuk meg a következő vektorok koordinátáit az $(\vec{i};\vec{j})$ bázisban: $\overrightarrow{GO}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BF}$!

Megoldás:

Az $ABC_\triangle$ szabályos, magassága az oldal felének $\sqrt{3}$-szorosa, $\overrightarrow{GO}=\sqrt{3}\vec{j}$, így $\overrightarrow{GO}\left(0;\sqrt{3}\right)$.



2.3. ábra Ugyanazon vektorok más bázisban

$$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{GO}=2\sqrt{3}\vec{j},\ \text{így}\ \overrightarrow{BD}\left(0;2\sqrt{3}\right).$$

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GO}=\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j},\ \text{így}\ \overrightarrow{AO}\left(1;\sqrt{3}\right).$$

$$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AO}=-\left(\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}\right)=-\vec{i}-\sqrt{3}\vec{j},\ \text{így}\ \overrightarrow{EF}\left(-1;-\sqrt{3}\right).$$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}-2\overrightarrow{AB}=$$
$$=\left(\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}\right)-2\cdot 2\vec{i}=-3\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}.$$

$$\text{Így}\ \overrightarrow{BF}\left(-3;\sqrt{3}\right).$$

A továbbiakban a vektorok koordinátáit az $(\vec{i};\vec{j})$ bázisra fogjuk vonatkoztatni. (Ha ettől eltérnénk, akkor azt a megfelelő bázis megadásával jelezzük.)

Tétel Ha $\vec{a}(a_1;a_2)$ és $\vec{b}(b_1;b_2)$ vektorok és k valós szám, akkor

a) $\vec{a}+\vec{b}(a_1+b_1;a_2+b_2)$;

b) $k\vec{a}(ka_1;ka_2)$;

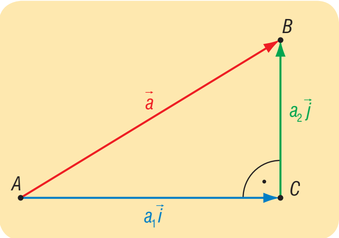
c) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

Bizonyítás:

A koordináták definíciója szerint: $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ és $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$.

a) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}$.

b) $k\vec{a}=k(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})=(ka_1)\vec{i}+(ka_2)\vec{j}$.



2.4. ábra A vektor abszolút értéke

A vektorok összeadásának és számmal való szorzásának tulajdonságait használtuk.

c) A Pitagorasz-tétel szerint

$|\vec{a}|=\sqrt{|a_1\vec{i}|^2+|a_2\vec{j}|^2}$. Alkalmazva a vektor számmal való szorzásának definícióját, valamint azt, hogy a bázisvektorok hossza 1,

$$|\vec{a}|=\sqrt{(|a_1|\cdot|\vec{i}|)^2+(|a_2|\cdot|\vec{j}|)^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Oldjuk meg!

1. Az $ABCD$ négyzet középpontja O, az AB oldal felezéspontja F. Legyen $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ és $\vec{f}=\overrightarrow{OF}$! Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit az $(\vec{a},\vec{f})$ bázisban!

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BC}$

2. Az $ABC\triangle$ súlypontja S, $\vec{a}=\overrightarrow{SA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{SB}$. Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit az $(\vec{a},\vec{b})$ bázisban!

a) $\overrightarrow{SC}$ b) $\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BC}$

3. Szinusz és koszinusz

Ismert, hogy a nem nullvektoroknak két jellemző adatuk van: a nagyságuk és az irányuk. Állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban csak olyan vektorokat vizsgálunk, melyeknek a hossza 1 (egységvektorok)! Az egységvektorok legfeljebb csak az irányukban különbözhetnek egymástól.

Az irányt egy szöggel, például az $\vec{e}$ vektor $\vec{i}$ egységvektorral bezárt szögével (α irányszög) jellemezhetjük. Az α tetszőleges valós szám lehet, ha az irányszöget forgásszögnek tekintjük. (A pozitív forgásirány az óramutató járásával ellentétes.)

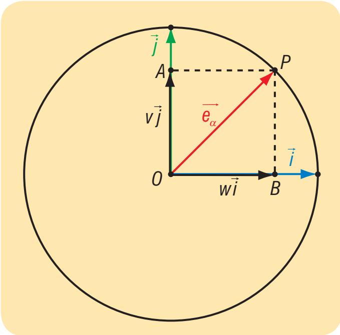
Hangsúlyozzuk, hogy egy $\vec{e}$ egységvektornak végtelen sok irányszöge van. Ha az $\vec{e}$ egységvektor irányszöge α, akkor az $\alpha+2k\pi$ (vagy $\alpha+k\cdot 360°$) is irányszöge $\vec{e}$-nek bármely k egész szám esetében.

1. példa Legyen $\vec{e_\alpha}$ olyan egységvektor, melynek irányszöge α! Adjuk meg $\vec{e_\alpha}$ koordinátáit, ha $\alpha =$

a) $45°$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $210°$; d) $270°$; e) $\frac{7\pi}{2}$; f) -11π.

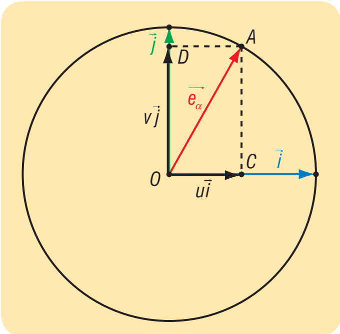
Megoldás:

a) Ha $\alpha = 45°\left(=\frac{\pi}{4}\right)$, $\vec{e_\alpha}(w;v)$. $w\vec{i}\uparrow\uparrow\vec{i}$ és $v\vec{j}\uparrow\uparrow\vec{j}$, ezért $w>0$ és $v>0$. Az $OBPA$ egységnyi átlójú négyzet, ezért $v=w=\frac{\sqrt{2}}{2}$, azaz $\vec{e_\alpha}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

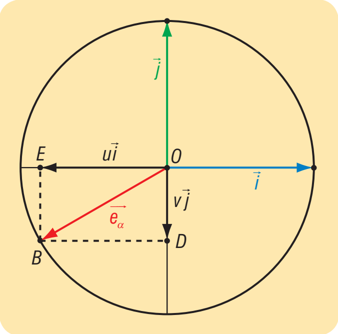


3.1. ábra $\alpha = \frac{\pi}{4}$

b) Ha $\alpha = \frac{\pi}{3}(=60°)$, $\vec{e_\alpha}(u;v)$. $u\vec{i}\uparrow\uparrow\vec{i}$ és $v\vec{j}\uparrow\uparrow\vec{j}$, ezért $u>0$ és $v>0$. Az OCA háromszög 60°-os szöggel rendelkező derékszögű háromszög, melynek átfogója egységnyi, ezért $u=\frac{1}{2}$ és $v=\frac{\sqrt{3}}{2}$, azaz $\vec{e_\alpha}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



3.2. ábra $\alpha = \frac{\pi}{3}$



3.3. ábra $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

c) Ha $\alpha = 210°\left(=\frac{7\pi}{6}\right)$, $\vec{e_\alpha}(u;v)$. $u\vec{i} \uparrow\downarrow \vec{i}$ és $v\vec{j} \uparrow\downarrow \vec{j}$, ezért $u<0$ és $v<0$. Az *OEB* háromszög 60°-os szögel rendelkező derékszögű háromszög, melynek átfogója egységnyi, ezért $v = -\frac{1}{2}$ és $u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, azaz $\vec{e_\alpha}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

d) – e) Ha $\alpha = 270°$ vagy $\frac{7\pi}{2}$, akkor $\vec{e_\alpha} = -\vec{j}$, így $\vec{e_\alpha}(0;-1)$.

f) Ha $\alpha = -11\pi$, akkor $\vec{e_\alpha} = -\vec{i}$, így $\vec{e_\alpha}(-1;0)$.

Láttuk, hogy az egységvektor koordinátái kizárólag az irányszögétől függnek. Minden α irányszöghöz egyértelműen hozzárendelhető egy $\vec{e_\alpha}$ egységvektor, amelynek koordinátái egyértelműen meghatározottak.

Indokoltak tehát a következő definíciók:

Definíció Ha α valós szám, akkor $\sin\alpha$ (szinusz) az α irányszögű egységvektor második koordinátája.
Ha α valós szám, akkor $\cos\alpha$ (koszinusz) az α irányszögű egységvektor első koordinátája.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a fenti két definícióval a valós számok halmazán értelmezett két függvényt adtunk meg. Tekintettel arra, hogy e függvények definíciójában az irányszögnek fontos szerepe van, ezeket a függvényeket szögfüggvényeknek vagy trigonometrikus függvényeknek nevezzük. Korábban már értelmeztük hegyesszögek szinuszát és koszinuszát, a most így megadott definíciók összeegyeztethetők a korábbiakkal. (Később visszatérünk még erre.)

2. példa Adjuk meg az alábbi szögek szinuszát és koszinuszát!

a) 45° b) $\frac{\pi}{3}$ c) 210° d) 270° e) $\frac{7\pi}{2}$ f) -11π

Megoldás:
Az imént megadott definíciók és az 1. példa eredményei alapján:

a) $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

c) $\sin 210° = -\frac{1}{2}$, $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$.

e) $\sin\frac{7\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{7\pi}{2} = 0$.

f) $\sin(-11\pi) = 0$, $\cos(-11\pi) = -1$.

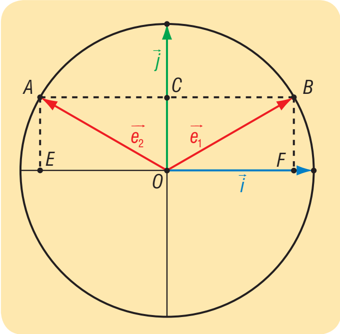
3. példa Adjuk meg azokat az α valós számokat, melyekre $\sin\alpha =$

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 1; e) 0; f) –1.

Megoldás:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Két olyan egységvektor van, amelynek a második koordinátája $\frac{1}{2}$, $\vec{e_1}$ és $\vec{e_2}$ (3.4. ábra). Az OBF derékszögű háromszög egységnyi hosszú OB átfogója kétszerese a BF befogónak, így $BOF\angle = \frac{\pi}{6}(=30°)$. $AEO_\triangle \cong BOF_\triangle$, ezért $AOF\angle = \frac{5\pi}{6}(=150°)$. Tekintettel a korábbi – az egységvektorok végtelen sok irányszögére vonatkozó – megjegyzésünkre,



3.4. ábra $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z,$$
$$\alpha_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

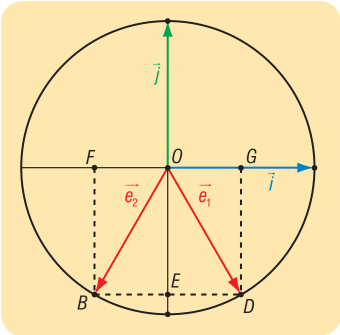
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A 2. példa a) részében már találkoztunk e probléma egy részével. Ha az előzőekhez hasonló meggondolásokat végzünk, akkor kapjuk, hogy

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z,$$
$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Két olyan egységvektor van, amelynek a második koordinátája $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\vec{e_1}$ és $\vec{e_2}$ (3.5. ábra). Az OGD derékszögű háromszög egységnyi hosszú OD átfogójának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese a DG befogó, így $DOG\angle = -\frac{\pi}{3}(=-60°)$. $BOF_\triangle \cong DOG_\triangle$, ezért a konkáv $BOG\angle = \frac{4\pi}{3}(=240°)$. Tekintettel a korábbi – az egységvektorok végtelen sok irányszögére vonatkozó – megjegyzésünkre,



3.5. ábra $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z,$$

$$\alpha_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

A további esetekben a meggondolások részletezését az olvasóra bízzuk, csak az eredményeket közöljük.

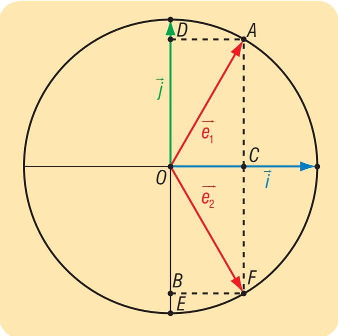
d) Ha $\sin\alpha = 1$, akkor $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$

e) Ha $\sin\alpha = 0$, akkor $\alpha = k\pi,\ k \in Z.$

d) Ha $\sin\alpha = -1$, akkor $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$

4. példa Adjuk meg azokat az α valós számokat, melyekre $\cos\alpha =$

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 1; e) 0; f) –1.



3.6. ábra $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

Megoldás:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}.$

Két olyan egységvektor van, amelynek az első koordinátája $\frac{1}{2}$, $\vec{e}_1$ és $\vec{e}_2$ (3.6. ábra). Az *OCA* derékszögű háromszög egységnyi hosszú *OA* átfogója kétszerese az *OC* befogónak, így $AOC\angle = \frac{\pi}{3} (= 60°)$. $AOC_\triangle \cong FOC_\triangle$, ezért $FOC\angle = -\frac{\pi}{3} (= -60°)$. Tekintettel a korábbi – az egységvektorok végtelen sok irányszögére vonatkozó – megjegyzésünkre,

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z,$$

$$\alpha_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

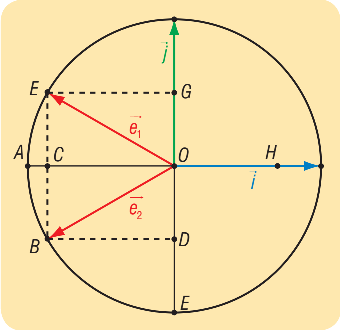
A 2. példa a) részében már találkoztunk e probléma egy részével. Ha az előzőekhez hasonló meggondolásokat végzünk, akkor kapjuk, hogy

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z,$$

$$\alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Két olyan egységvektor van, amelynek az első koordinátája $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\vec{e_1}$ és $\vec{e_2}$ (3.7. ábra). Az *OGF* derékszögű háromszög egységnyi hosszú *OF* átfogójának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese a *DF* befogó, így $FOH\angle=\frac{5\pi}{6}(=150°)$. $BOD_\triangle \cong FOG_\triangle$, ezért a $BOH\angle=-\frac{5\pi}{6}(=-150°)$.



3.7. ábra $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tekintettel a korábbi – az egységvektorok végtelen sok irányszögére vonatkozó – megjegyzésünkre,

$$\alpha_1=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z,$$

$$\alpha_2=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$$

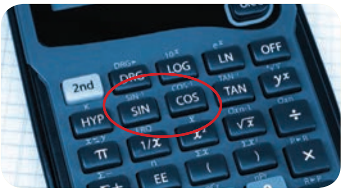
A további esetekben a meggondolások részletezését az olvasóra bízzuk, csak az eredményeket közöljük.

d) Ha $\cos\alpha=1$, akkor $\alpha=2k\pi,\ k\in Z.$

e) Ha $\cos\alpha=0$, akkor $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$

f) Ha $\cos\alpha=-1$, akkor $\alpha=\pi+2k\pi,\ k\in Z.$

Az előző példákból látható, hogy vannak olyan nevezetes szögek, melyeknek szinuszai és koszinuszai elemi geometriai ismereteink alapján meghatározhatók. Abban az esetben, ha nem ilyen szögekkel van dolgunk, akkor a számológépre kell hagyatkoznunk, amely kijelzi a megadott szög szinuszának vagy koszinuszának közelítő értékét. **Figyelni kell arra, hogy a számológép milyen szögmértékegységben (fokban vagy radiánban) való számolásra van beállítva!**



3.8. ábra Szinusz és koszinusz a számológépen

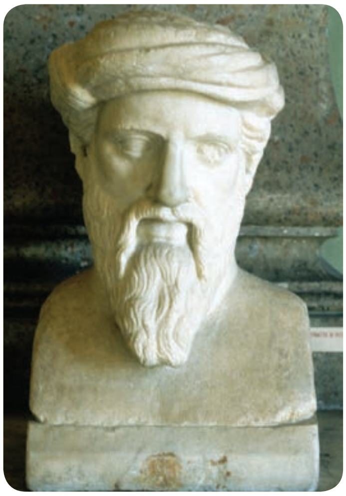
Ha a 3. és 4. példához hasonlóan a szinusz- vagy koszinuszértékekhez kell megkeresni a szögeket (visszakeresés), akkor a számológép csak egy szög kerekített értékét adja meg, a többit az említett példák megoldásában szereplő módon lehet meghatározni.

Láttuk korábban, ha α tetszőleges valós szám, akkor az α irányszögű egységvektor koordinátái $\vec{e_\alpha}(\cos\alpha;\sin\alpha)$. Ebből következik, hogy $|\sin\alpha|\le 1$ és $|\cos\alpha|\le 1$. Másrészt bármely vektor abszolút értéke a koordinátái négyzetösszegének négyzetgyöke, azaz $|\vec{e_\alpha}|=\sqrt{(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2}$. Ebből adódik, hogy $1=(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2$, szokásos jelöléssel:

Tétel $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

Ezt az összefüggést **trigonometrikus Pitagorasz-tétel**nek hívjuk.

Megtárgyaltuk azt is, hogy minden egységvektornak végtelen sok irányszöge van, és ezek a teljes szög többszöröseiben térnek el egymástól. Ebből következik, ha *k* tetszőleges egész szám, akkor



3.9. ábra Püthagorasz

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha.$$

9. osztályban láttuk, hogy a π szöggel való elforgatás középpontos tükrözés. Ha egy egységvektort tükrözünk az origóra, a koordinátái az ellentettjükre változnak. Ebből következően:

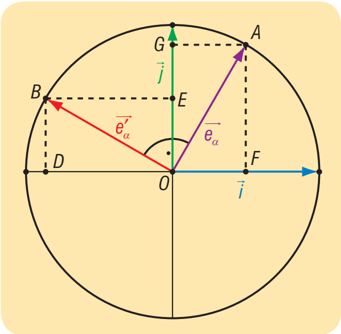
$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha.$$

Ha egy egységvektor irányszögét az ellentettjére változtatjuk, akkor az egységvektor tükröződik az $\vec{i}$ egyenesére, így

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Alkalmazzuk a most kapott összefüggéseket!

$$\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\alpha - \pi + 2\pi) = -\sin(\alpha + \pi) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\alpha - \pi) = \cos(\alpha - \pi + 2\pi) = \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha.$$



3.10. ábra $\alpha + \frac{\pi}{2}$ szinusza és koszinusza

Legyen most $\vec{e}'_\alpha\left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right); \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$! Ekkor a 3.10. ábrán látható $OEB_\triangle$ az $OFA_\triangle$ 90°-os elforgatottja, így

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha,$$
$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha.$$

Alkalmazzuk a kapott összefüggéseket!

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

Oldjuk meg!

1. Legyen $\vec{e}_\alpha$ olyan egységvektor, melynek irányszöge α! Adjuk meg $\vec{e}_\alpha$ koordinátáit, ha $\alpha =$

a) 60°; b) $-\frac{\pi}{4}$; c) 135°; d) 180°; e) $\frac{7\pi}{3}$; f) $-\frac{5\pi}{6}$.

2. Adjuk meg az alábbi szögek szinuszát és koszinuszát!

a) 1954° b) $\frac{\pi}{17}$ c) $-10°12'$ d) 1222,22° e) $-\frac{7\pi}{11}$

3. Adjuk meg azokat a valós számokat, melyekre $\sin\alpha =$

a) $-\frac{1}{6}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; d) 0,1954; e) $-0{,}1492$.

4. Adjuk meg azokat a valós számokat, melyekre $\cos\alpha =$

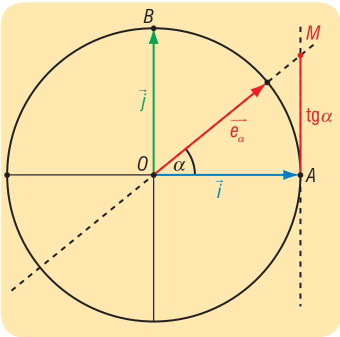
a) $-\frac{1}{6}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; d) 0,1954; e) $-0{,}1492$.

4. Tangens és kotangens

További szögfüggvényeket is szokás értelmezni:

Definíció Ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol k egész szám, akkor $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (tg = tangens).

Az $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ feltétel azért kell, hogy a definícióban szereplő hányados nevezője ne legyen nulla.



4.1. ábra A tangens szemléletes jelentése

Definíció Ha $\alpha \neq k\pi$, ahol k egész szám, akkor $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (ctg = kotangens).

Az $\alpha \neq k\pi$ feltétel azért kell, hogy a definícióban szereplő hányados nevezője ne legyen nulla.
A korábbi szögfüggvényekre vonatkozó összefüggések alkalmazásával újabbakat kaphatunk:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi) = \frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)} = \frac{-\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

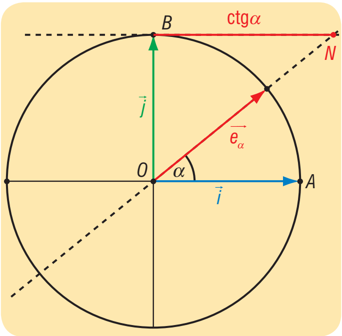
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

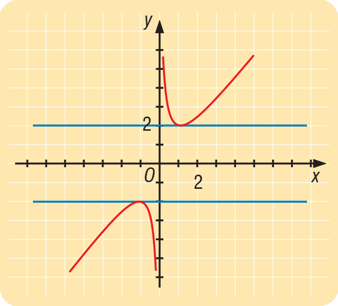


4.2. ábra A kotangens szemléletesen

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}.$$

$$1+\text{tg}^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$1+\text{ctg}^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$



4.3. ábra Az $f(x) = x+\frac{1}{x}$ $\left(D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}\right)$ grafikonja

A fenti összefüggések csak akkor érvényesek, ha a bennük szereplő kifejezések értelmezve vannak!

Ha $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, ahol k tetszőleges egész szám, akkor vizsgáljuk a következő kifejezést: $\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha$! A korábban kapott összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha+\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$.

Ismert, hogy egy tetszőleges, nullától különböző valós szám és reciproka összegének az abszolút értéke legalább 2. Így kapjuk, hogy

$$|\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha| \geq 2.$$

A hivatkozott egyenlőtlenségből következik még: $\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha = 2$ akkor és csak akkor, ha $\text{tg}\,\alpha = 1$; $\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha = -2$ akkor és csak akkor, ha $\text{tg}\,\alpha = -1$.

1. példa Adjuk meg az alábbi szögek tangensét és kotangensét!

a) $45°$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $210°$ d) $270°$ e) $\frac{7\pi}{2}$ f) -11π

Megoldás:
Az imént megadott definíciók és a 3.2. példa eredményei alapján:

a) $\text{tg}\,45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1;$ $\quad \text{ctg}\,45° = \frac{\cos 45°}{\sin 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$

b) $\text{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$ $\quad \text{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

c) $\text{tg}\,210° = \frac{\sin 210°}{\cos 210°} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$ $\quad \text{ctg}\,210° = \frac{\cos 210°}{\sin 210°} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

d) $\text{tg}\,270°$ nem értelmezett; $\quad \text{ctg}\,270° = \frac{\cos 270°}{\sin 270°} = \frac{0}{-1} = 0.$

e) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{2}$ nem értelmezett; $\quad$ $\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{7\pi}{2}}{\sin\dfrac{7\pi}{2}}=\dfrac{0}{-1}=0.$

f) $\operatorname{tg}(-11\pi)=\dfrac{\sin(-11\pi)}{\cos(-11\pi)}=\dfrac{0}{-1}=0;$ $\quad$ $\operatorname{ctg}(-11\pi)$ nem értelmezett.

2. példa Adjuk meg azokat az α valós számokat, melyekre $\operatorname{tg}\alpha=$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; d) 1; e) 0; f) –1.

Megoldás:
Felhasználjuk a tangens szögfüggvényre bizonyított első összefüggést. A k tetszőleges egész számot jelöl. ($k \in \mathbb{Z}$)

a) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ $\quad$ b) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ $\quad$ c) $\alpha=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

d) $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ $\quad$ e) $\alpha=k\pi$ $\quad$ f) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

3. példa Adjuk meg azokat az α valós számokat, melyekre $\operatorname{ctg}\alpha=$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; d) 1; e) 0; f) –1.

Megoldás:
Felhasználjuk a kotangens szögfüggvényre bizonyított első összefüggést. A k tetszőleges egész számot jelöl. ($k \in \mathbb{Z}$)

a) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ $\quad$ b) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ $\quad$ c) $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

d) $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ $\quad$ e) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $\quad$ f) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

4.4. ábra Tangens a számológépen

Az előző példákból is látható, hogy vannak olyan nevezetes szögek, melyeknek tangensei és kotangensei meghatározhatók. Abban az esetben, ha nem ilyen szögekkel van dolgunk, akkor a számológépre kell hagyatkoznunk, amely kijelzi a megadott szög tangensének közelítő értékét. A kotangens közelítő értéke a $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ összefüggés alapján számolható.

4. példa
Az α olyan valós szám, melyre $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{5}{2}$. Adjuk meg a $\sin\alpha$ lehetséges értékeit!

Megoldás:

A $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ létezése feltételezi, hogy $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$, ahol k tetszőleges egész, így $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq -1$ és $\sin\alpha \neq 1$.

Alkalmazzuk a $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ összefüggést, majd végezzünk algebrai átalakításokat az egyenleten!

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{2};$$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 5\operatorname{tg}\alpha + 2 = 0.$$

A $\operatorname{tg}\alpha$-ra nézve másodfokú egyenletet kaptunk, melynek megoldásai: $(\operatorname{tg}\alpha)_1 = 2$ és $(\operatorname{tg}\alpha)_2 = \dfrac{1}{2}$.

a) Ha $\operatorname{tg}\alpha = 2$, akkor

$$\operatorname{tg}\alpha = 2,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2,$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}.$$

A kapott eredményt helyettesítsük be a trigonometrikus Pitagorasz-tételbe!

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

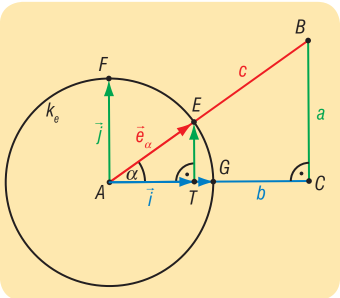
$$\sin^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{4} = 1;$$

$$\frac{5}{4}\sin^2\alpha = 1;$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4}{5};$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b) Ha $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, akkor hasonló meggondolással adódik, hogy $\sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



4.5. ábra Hegyesszögre a két definíció ekvivalens

10. osztályban már a hegyesszögek szögfüggvényeivel foglalkoztunk. Akkor más definíciókat használtunk.

Kérdés:

Bármely hegyesszög esetén a kétféle definíció ugyanazokat a szögfüggvényértékeket adja-e meg vagy sem, azaz a kétféle definíció hegyesszögek esetében ekvivalens-e?

Tekintsük a 4.5. ábrát!

Az ABC derékszögű háromszögben levő α hegyesszög szögfüggvényei a 10. osztályos definíciók szerint:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Az A középpontú, egységsugarú k_e körben legyen $\overrightarrow{AG} = \vec{i}$ és $\overrightarrow{AF} = \vec{j}$! Az $\overrightarrow{e_\alpha}$ az α irányszögű egységvektor. Az új definíciók szerint: $\overrightarrow{AT} = \cos\alpha\,\vec{i}$, $\overrightarrow{TE} = \sin\alpha\,\vec{j}$. Az $ABC\triangle \sim AET\triangle$, hiszen megfelelő szögeik egyenlők. Ebből következik, hogy megfelelő oldalaik aránya is egyenlő. Például: $\frac{a}{c} = \frac{ET}{EA} = \frac{|\overrightarrow{TE}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{|\sin\alpha\,\vec{j}|}{|\overrightarrow{e_\alpha}|} = \frac{|\sin\alpha|}{1} = \sin\alpha$. (Felhasználtuk, hogy a $\overrightarrow{TE}$ és $\vec{j}$ egyirányú.) Hasonlóképpen: $\frac{b}{c} = \frac{AT}{EA} = \frac{|\overrightarrow{AT}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{|\cos\alpha\,\vec{i}|}{|\overrightarrow{e_\alpha}|} = \frac{|\cos\alpha|}{1} = \cos\alpha$. Ebből következően $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$, és $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$. Látható, hogy a hegyesszögek esetében a kétféle szögfüggvény definíciója ekvivalens.

Oldjuk meg!

1. Adjuk meg az alábbi szögek tangensét és kotangensét!

a) $1954°$ b) $\frac{\pi}{17}$ c) $-10°12'$ d) $1222{,}22°$ e) $-\frac{7\pi}{11}$

2. Adjuk meg azokat az α valós számokat, melyekre $\operatorname{tg}\alpha =$

a) $-\frac{1}{6}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; d) 1954; e) $-0{,}1492$!

3. Adjuk meg azokat az α valós számokat, melyekre $\operatorname{ctg}\alpha =$

a) $-\frac{1}{6}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; d) 1954; e) $-0{,}1492$!

4. Az α olyan valós szám, melyre $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{10}{3}$. Adjuk meg a $\cos\alpha$ lehetséges értékeit!

5. Ha $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, ahol k tetszőleges egész szám, akkor milyen értékeket vehet fel a $3\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{ctg}\alpha$ kifejezés?

6. Ha $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, ahol k tetszőleges egész szám, akkor milyen értékeket vehet fel a $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha$ kifejezés?

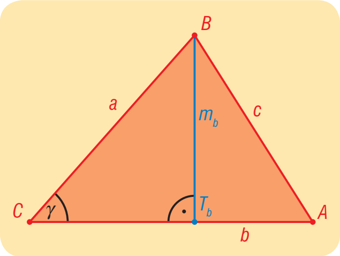
További feladatok:

Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 261-266., 268. és 371. feladatok

5. A szinusztétel

A 9. osztályban megtanultuk a háromszögek egybevágósági kritériumait. Ezek közül az egyik így szól: két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha két megfelelő oldaluk és az általuk közbezárt szög egyenlő. Másrészt tudjuk, hogy egybevágó sokszögek területe egyenlő. Ebből következően joggal várhatjuk el, hogy egy háromszög két oldala hosszának (a és b), valamint ezen oldalak által bezárt szög nagyságának (γ) ismeretében meg tudjuk adni a háromszög (t) területét.

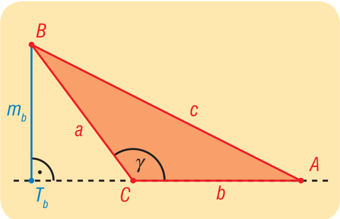
Ismert, hogy $t=\dfrac{b\cdot m_b}{2}$, ahol m_b a háromszög b oldalához tartozó magasságszakasz hossza.



5.1. ábra γ hegyesszög

Ha γ hegyesszög, azaz $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$, akkor a BT_bC derékszögű háromszögben $\sin\gamma=\dfrac{m_b}{a}$, azaz $m_b=a\sin\gamma$. Ezt a területképletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $t=\dfrac{ab\sin\gamma}{2}$.

Ha γ derékszög, akkor $m_b=a$, így a terület, $t=\dfrac{ab}{2}$. Ekkor azonban $\sin\gamma=1$, így ebben az esetben is igaz, hogy $t=\dfrac{ab\sin\gamma}{2}$.



5.2. ábra γ tompaszög

Ha γ tompaszög, azaz $\dfrac{\pi}{2}<\gamma<\pi$, akkor $BCT_b\angle=\pi-\gamma$. A BT_bC derékszögű háromszögben $\sin(\pi-\gamma)=\dfrac{m_b}{a}$, azaz $m_b=a\sin(\pi-\gamma)$. A korábban bizonyított trigonometrikus azonosság szerint $\sin(\pi-\gamma)=\sin\gamma$, így $m_b=a\sin\gamma$. Ezt a területképletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $t=\dfrac{ab\sin\gamma}{2}$.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt.

Tétel Ha egy háromszög két oldalának hossza a és b, valamint az ezen oldalak által bezárt szög nagysága γ, akkor a háromszög területe: $t=\dfrac{ab\sin\gamma}{2}$.

Ezt az összefüggést a háromszög **trigonometrikus területképlet**ének nevezzük.

Másik két oldalra felírva a trigonometrikus területképletet, a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{bc\sin\alpha}{2},$$

$$ab\sin\gamma=bc\sin\alpha.$$

Kihasználva, hogy a háromszög szögeinek szinuszai és oldalainak hosszai nullától különböző számok, a kapott egyenlet mindkét oldalát $bc\sin\gamma$-val osztva kapjuk, hogy

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Bebizonyítottuk az alábbi tételt.

Tétel Egy háromszög bármely két oldalának aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszainak arányával.

Ezt a tételt **szinusztétel**nek hívjuk.

Ezzel pontosítottuk azt a 9. osztályban tanult tételt, miszerint egy háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.

1. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a=3$ egység, $b=5$ egység, $\beta=66°$. Adjuk meg a hiányzó oldal és szögek nagyságát, valamint a háromszög területét!

Megoldás:

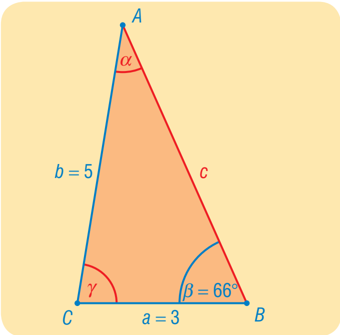
Alkalmazzuk a szinusztételt!

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 66°}=\frac{3}{5},$$

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\sin 66°,$$

$$\sin\alpha\approx 0,5481.$$



5.3. ábra A vizsgált háromszög

A kapott feltételnek két olyan szög felel meg, melyek lehetnek háromszög szögei: $\alpha_1\approx 33,24°$ és $\alpha_2\approx 180°-33,24°=$ $=146,76°$. Tekintettel arra, hogy $a<b$, így $\alpha<\beta$, ezért csak az $\alpha\approx 33,24°$ lehet a megoldás. A háromszög belső szögeinek összege 180°, így $\gamma=180°-\alpha-\beta=180°-33,24°-66°=80,76°$.

Ismét alkalmazzuk a szinusztételt!

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

$$c=a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

$$c\approx 5,4 \text{ egység}.$$

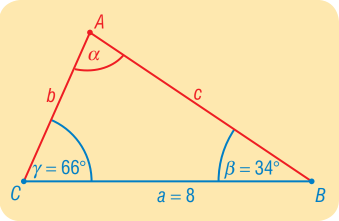
A trigonometrikus területképlet szerint:

$$t=\frac{ab\sin\gamma}{2}\approx 7,4 \text{ területegység}.$$

2. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a=8$ egység, $\beta=34°$, $\gamma=66°$. Adjuk meg a hiányzó oldalak és szög nagyságát, valamint a háromszög területét!

Megoldás:

A háromszög belső szögeinek összege 180°, így $\alpha=180°-\gamma-\beta=180°-34°-66°=80°$. Alkalmazzuk kétszer a szinusztételt!



5.4. ábra A példában szereplő háromszög

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$
$$c=a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$
$$c\approx 7{,}42 \text{ egység.}$$
$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$
$$b=a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$
$$b\approx 4{,}54 \text{ egység.}$$

A trigonometrikus területképlet szerint:

$$t=\frac{ab\sin\gamma}{2}\approx 16{,}59 \text{ területegység.}$$

Az utóbbi példa eredményét általánosíthatjuk. Egy háromszög egyik oldala a, szögei a szokásos jelölésekkel α, β, γ. A szinusztétel szerint:

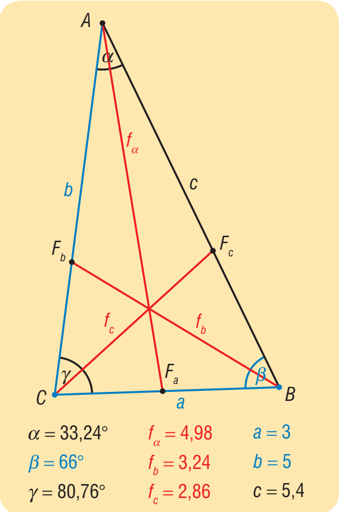
$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$
$$b=a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Behelyettesítve a trigonometrikus területképletbe, megkapjuk az alábbi összefüggést.

Tétel

$$t=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

3. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a=3$ egység, $b=5$ egység, $\beta=66°$. Adjuk meg a háromszög belső szögfelező szakaszainak hosszát!



5.5. ábra A vizsgált háromszög

Megoldás:

E példa adatai egyeznek az 1. példában megadott adatokkal, így a háromszög oldalait és szögeit ismerjük, az 5.5. ábrán láthatók.

Csak az egyik belső szögfelező szakasz (f_c) hosszának megadását mutatjuk meg, a többit az olvasóra bízzuk. A kapott eredményt az 5.5. ábrán ellenőrizhetjük.

A szögfelező tétel szerint a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Ebből következően:

$$\frac{BF_c}{F_cA} = \frac{a}{b},$$
$$\frac{BF_c}{c - BF_c} = \frac{a}{b},$$
$$BF_c \cdot b = ac - a \cdot BF_c,$$
$$BF_c \cdot b + a \cdot BF_c = ac,$$
$$BF_c\left(a+b\right) = ac,$$
$$BF_c = \frac{ac}{a+b} \approx 2{,}025.$$

Alkalmazzuk a szinusztételt a $BF_cC\triangle$-ben!

$$\frac{CF_c}{BF_c} = \frac{\sin\beta}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$
$$CF_c = BF_c\frac{\sin\beta}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$
$$CF_c \approx 2{,}86 \text{ egység.}$$

4. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, $\beta = 66°$. Adjuk meg a háromszög magasságszakaszainak hosszát!

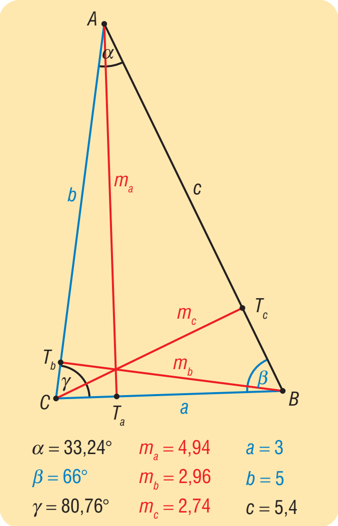
Megoldás:

Az 1. példában meghatároztuk a háromszög oldalainak hosszát, amelyek az 5.6. ábrán láthatók.

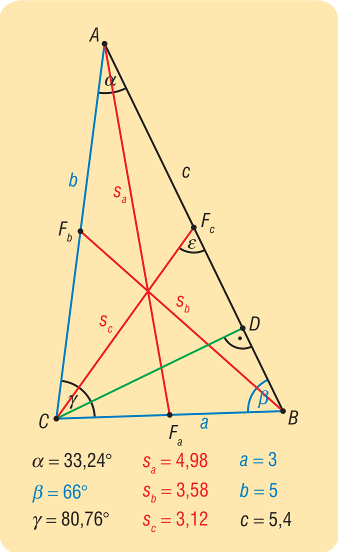
Ugyancsak megadtuk a háromszög területét, $t \approx 7{,}4$ területegység. A jól ismert területképletből kiindulva kapjuk, hogy

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2},$$
$$m_a = \frac{2t}{a},$$
$$m_a \approx 4{,}94 \text{ egység.}$$

Hasonlóan kapható a többi magasság is. Meghatározásukat az olvasóra bízzuk. A hosszuk az 5.6. ábráról leolvasható.



5.6. ábra Ennek a háromszögnek az adatait keressük



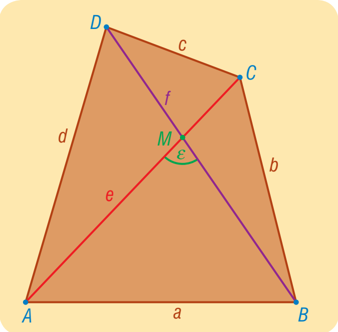
5.7. ábra A példában szereplő háromszög

5. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, $\beta = 66°$. Adjuk meg a háromszög súlyvonalainak hosszát!

Megoldás:
Csak az egyik súlyvonal (s_c) hosszának megadását mutatjuk meg, a többit az olvasóra bízzuk, a kapott eredményt az 5.7. ábrán ellenőrizhetjük.
Legyen $CD \perp BD$! Ekkor $CD = a\sin\beta \approx 2,74$ egység és $BD = a\cos\beta \approx 1,22$ egység, ezért $DF_c = \frac{c}{2} - BD \approx 1,48$ egység.
A Pitagorasz-tétel a CDF_c derékszögű háromszögben: $s_c = \sqrt{CD^2 + DF_c^{\,2}} \approx 3,12$ egység.
Az itt bemutatott megoldási mód eléggé körülményes. A későbbiekben egy egyszerűbb megoldási lehetőséget is megmutatunk majd.

Legyenek egy konvex négyszög átlói e és f, valamint az általuk bezárt szög ε! Adjuk meg a négyszög területét!

Legyen a két átló metszéspontja M! Ekkor $AMB\angle = DMC\angle = \varepsilon$ és $BMC\angle = DMA\angle = \pi - \varepsilon$. Alkalmazva a háromszög trigonometrikus területképletét és egy trigonometrikus azonosságot:



5.8. ábra Konvex négyszög

$$t_{AMB\triangle} = \frac{AM \cdot BM \sin\varepsilon}{2},$$

$$t_{BMC\triangle} = \frac{BM \cdot (e - AM)\sin(\pi - \varepsilon)}{2} = \frac{BM \cdot (e - AM)\sin\varepsilon}{2},$$

$$t_{CMD\triangle} = \frac{(e - AM)\cdot(f - BM)\sin\varepsilon}{2},$$

$$t_{DMA\triangle} = \frac{AM \cdot (f - BM)\sin(\pi - \varepsilon)}{2} = \frac{AM \cdot (f - BM)\sin\varepsilon}{2}.$$

A négyszög területe e négy háromszög területének az összege. Elvégezve a műveleteket, a $\frac{\sin\varepsilon}{2}$-t kiemelve kapjuk, hogy

$$t = \frac{\sin\varepsilon}{2}\left(AM \cdot BM + BM \cdot e - AM \cdot BM + ef - BM \cdot e - AM \cdot f + AM \cdot BM + AM \cdot f - AM \cdot BM\right).$$

Az összevonás után kimondhatjuk a következő tételt.

Tétel A négyszög területe: $t = \frac{ef\sin\varepsilon}{2}$.

6. példa Egy téglalap átlói $\varepsilon = 36°$-os szöget zárnak be egymással, a téglalap területe $t = 2010$ területegység. Mekkorák a téglalap oldalai?

Megoldás:
A téglalap átlói egyenlők. Legyen az átlók hossza e! Tekintettel arra, hogy a téglalap konvex négyszög,

$$t = \frac{e^2 \sin\varepsilon}{2},$$

$$e = \sqrt{\frac{2t}{\sin\varepsilon}},$$

$$e \approx 82{,}7.$$

Legyenek a téglalap szomszédos oldalai a és b! Ekkor

$$ab = t,$$

$$a^2 + b^2 = e^2,$$

azaz

$$ab = 2010,$$

$$a^2 + b^2 = \frac{2 \cdot 2010}{\sin 36°}.$$

Megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy $a \approx 78{,}7$ egység és $b \approx 25{,}6$ egység.

Oldjuk meg!

1. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, $\alpha = 66°$. Adjuk meg a hiányzó oldal és a hiányzó szögek nagyságát, valamint a háromszög területét! (Vigyázat! Két oldal és a kisebbikkel szemközti szög adott!)
2. Egy háromszög két szöge $\alpha = 66°$ és $\beta = 39°$, a területe $t = 235$ területegység. Adjuk meg a hiányzó szög és a hiányzó oldalak nagyságát!
3. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $\beta = 59°$, $c = 10$ egység, a C csúcsból induló súlyvonal $s_c = 7$ egység. Adjuk meg a hiányzó szögek és oldalak nagyságát!
4. Egy háromszög két oldalának hossza a és b. Mekkora lehet a területe?
5. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $\beta = 59°$, $c = 10$ egység, a C csúcsból induló magasság $m_c = 7$ egység. Adjuk meg a hiányzó szögek és oldalak nagyságát!
6. Egy paralelogramma egyik átlója 15,7 egység, területe 259 területegység, átlóinak hajlásszöge 25°. Mekkorák a paralelogramma oldalai és szögei?
7. Egy rombusz egyik átlója 15,7 egység, területe 259 területegység. Mekkorák a rombusz oldalai és szögei?
8. Egy téglalap 8 egységnyi átlója 13°-os szöget zár be az egyik oldalával. Mekkora a téglalap területe, és mekkorák a téglalap oldalai?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 240., 245., 248., 255. feladatok

6. A vektorok skaláris szorzata

6.1. ábra Erő, elmozdulás

A következőkben visszatérünk a vektorokhoz. A figyelmes olvasónak bizonyára feltűnt, hogy a vektorokat összeadtuk, kivontuk, de egymással nem szoroztuk őket. Van értelme vektorok szorzásáról beszélni? Szükség van erre egyáltalán?

A matematika történetében sokszor fordult elő, hogy a fizika igényei mozdították elő a matematika fejlődését. Ez történt a vektorok esetében is.

A fizikában léteznek vektormennyiségek, ilyen például az erő és az elmozdulás. E két mennyiség között kapcsolat van, hiszen az erő hatására jön létre elmozdulás.

A mellékelt képen a szánkót húzó fiatalember $\vec{F}$ erőt fejt ki a szánkóra, aminek hatására a szánkó $\overrightarrow{\Delta r}$ elmozdulással mozdul el. Az erő- és elmozdulásvektorok egymással α szöget zárnak be. Ebben az esetben a fizikusok a végzett munkát a $W=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta r}\right|\cdot\cos\alpha$ képlettel számolják ki. A munka a fizikában skalármennyiség.

A fenti meggondolás indokolja a következő definíciót.

Definíció Legyen $\vec{v}$ és $\vec{w}$ két nem nullvektor, az általuk bezárt szög α $\left(0\le\alpha\le\pi\right)$! A két vektor skaláris szorzata: $\vec{v}\vec{w}=\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cdot\cos\alpha$. A nullvektornak bármely vektorral vett skaláris szorzata 0 $\left(\vec{0}\vec{v}=\vec{v}\vec{0}=0\right)$.

Megjegyzés:
Az imént definiált skaláris szorzat nem művelet, hiszen nem egy halmaz összes rendezett elempárjához rendel egy elemet a halmazból. Egy rendezett vektorpárhoz rendel egy valós számot.

Értelmezhető olyan szorzás is vektorok között, amelynek eredménye vektor, de a **vektoriális szorzat** nem része a középiskolai tananyagnak.

Legyenek $\vec{u}$, $\vec{v}$ és $\vec{w}$ tetszőleges vektorok és λ tetszőleges valós szám! A definícióból következően igazak a következő tulajdonságok. (A tulajdonságok nevét azért tesszük idézőjelbe, mert a skaláris szorzat nem művelet.)

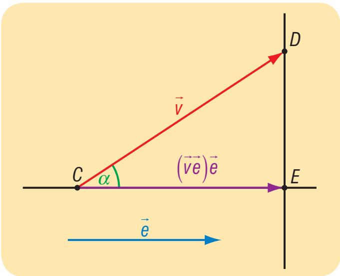
Tétel
- $\vec{v}\vec{w}=\vec{w}\vec{v}$ („kommutativitás”)
- $\vec{v}\vec{w}$ akkor és csak akkor 0, ha $\vec{w}=\vec{0}$ vagy $\vec{v}=\vec{0}$ vagy $\vec{w}\perp\vec{v}$
- $\vec{v}^{\,2}=\vec{v}\cdot\vec{v}=\left|\vec{v}\right|^2$ (Bármely vektor skaláris négyzete egyenlő az abszolút értéke négyzetével.)
- $\lambda\left(\vec{w}\vec{v}\right)=\left(\lambda\vec{w}\right)\vec{v}=\vec{w}\left(\lambda\vec{v}\right)$

Ezek a tulajdonságok közvetlenül a definíciók alkalmazásával igazolhatók, a meggondolásukat az olvasóra bízzuk.

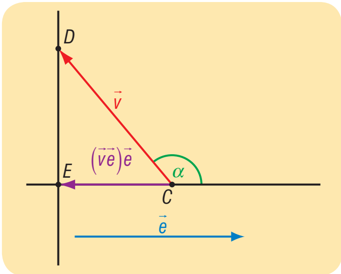
A „kommutativitás” teljesülése felveti azt a kérdést, hogy „asszociatív”-e a vektorok skaláris szorzata, azaz tetszőleges vektorok esetén igaz-e, hogy $\left(\vec{u}\vec{v}\right)\vec{w}=\vec{u}\left(\vec{v}\vec{w}\right)$. Tekintettel arra, hogy a skaláris szorzat szám, $\left(\vec{u}\vec{v}\right)\vec{w}\parallel\vec{w}$ és $\vec{u}\left(\vec{v}\vec{w}\right)\parallel\vec{u}$, így a vizsgált egyenlet nem állhat fenn tetszőleges vektorok esetében, azaz a skaláris szorzat **nem „asszociatív”**.

Ha analógiát keresünk a számok szorzása és a skaláris szorzat között, akkor felvethető a kérdés, hogy a skaláris szorzat „disztributív”-e az összeadásra nézve, azaz tetszőleges vektorok esetén igaz-e, hogy $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\vec{w}=\vec{u}\vec{w}+\vec{v}\vec{w}$. Ennek eldöntéséhez előbb néhány – önmagában is érdekes – meggondolást kell tenni.

Legyen $\vec{v}$ tetszőleges nem nullvektor, $\vec{e}$ pedig egységvektor $\left(\left|\vec{e}\right|=1\right)$! Ekkor a definíció szerint $\vec{v}\vec{e}=\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{e}\right|\cdot\cos\alpha=\left|\vec{v}\right|\cos\alpha$. Ez azt jelenti, hogy e skaláris szorzat a $\vec{v}$ $\vec{e}$-vel párhuzamos egyenesre vonatkozó merőleges vetületének az előjeles hossza.

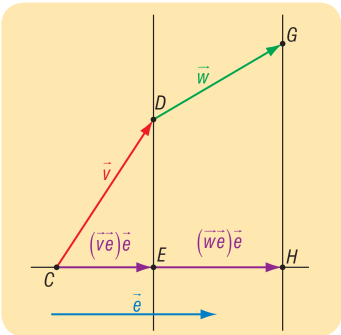


6.2. ábra $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

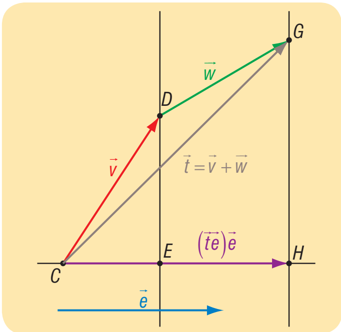


6.3. ábra $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Legyen $\vec{v}$ és $\vec{w}$ két tetszőleges nem nullvektor, $\vec{e}$ pedig egységvektor!



6.4. ábra „ $\vec{e}\vec{v}+\vec{e}\vec{w}$ ”



6.5. ábra „ $\vec{e}\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$ ”

A 6.4. és 6.5. ábrák segítik annak igazolását, hogy $\vec{e}\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{e}\vec{v}+\vec{e}\vec{w}$.

Legyenek $\vec{u}$, $\vec{v}$ és $\vec{w}$ tetszőleges vektorok és $\vec{e}$ olyan egységvektor, amelyre $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{e}$. Ekkor $\vec{u}=\left|\vec{u}\right|\vec{e}$. Alkalmazva az előzőekben kapott összefüggést

$$\vec{u}\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left|\vec{u}\right|\vec{e}\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left|\vec{u}\right|\left(\vec{e}\vec{v}+\vec{e}\vec{w}\right)=\left|\vec{u}\right|\vec{e}\vec{v}+\left|\vec{u}\right|\vec{e}\vec{w}=\vec{u}\vec{v}+\vec{v}\vec{w}.$$

Bebizonyítottuk, hogy a skaláris szorzat **„disztributív”** az összeadásra nézve.

1. példa Az *ABC* háromszög síkjának mely pontjára igaz, hogy a csúcsoktól mért távolságainak négyzetösszege minimális?

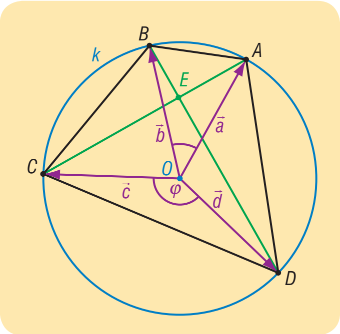
Megoldás:
Legyen az *ABC* háromszög síkjának tetszőleges pontja *P*, súlypontja *S*! Ekkor

$$PA^2+PB^2+PC^2=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2=\left(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SP}\right)^2+\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SP}\right)^2+\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SP}\right)^2=$$

$$=\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SC}^2-2\overrightarrow{SP}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)+3\overrightarrow{SP}^2=\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SC}^2+3\overrightarrow{SP}^2.$$

(Felhasználtuk a skaláris szorzat tulajdonságait, valamint az 1. Vektorok című lecke 1. példájának eredményét.) A kapott eredményből következik, hogy a vizsgált négyzetösszeg akkor minimális, ha $P=S$.

2. példa Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög bármely két szemközti oldalának négyzetösszege egyenlő a négyszög köré írt kör átmérőjének négyzetével!



6.6. ábra Merőleges átlójú húrnégyszög

Megoldás:
A négyszög csúcsai legyenek *A*, *B*, *C* és *D*, a köré írt kör középpontja *O*! Az *O*-ból a csúcsokba mutató vektorokat a megfelelő kisbetűkkel jelöljük. Ekkor az $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ vektorok a kör (*R*) sugarával egyenlő hosszúak, azaz $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=\vec{d}^2=R^2$.

$$AB^2+CD^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=$$

$$=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2+\left(\vec{d}-\vec{c}\right)^2=$$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2-2\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{c}\vec{d}\right)=$$

$$=4R^2-2\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{c}\vec{d}\right).$$

A kerületi és középponti szögek tétele miatt

$$BOA\angle+COD\angle=2BCA\angle+2CBD\angle=$$

$$=2\left(BCE\angle+CBE\angle\right)=2\frac{\pi}{2}=\pi,$$

$$BOA\angle=\pi-COD\angle=\pi-\varphi.$$

Ebből következően

$\vec{a}\vec{b}+\vec{c}\vec{d}=R^2\left(\cos\varphi+\cos\left(\pi-\varphi\right)\right)=0,$ így $AB^2+CD^2=4R^2=\left(2R\right)^2.$ Az állítást bebizonyítottuk.

Legyen $\vec{v}\left(v_1;v_2\right)$ és $\vec{w}\left(w_1;w_2\right)$ két nem nullvektor a koordinátáival adva az $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ bázisban! Ekkor $\vec{v}\vec{w}=\left(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}\right)\left(w_1\vec{i}+w_2\vec{j}\right)=v_1w_1\vec{i}^2+v_1w_2\vec{i}\vec{j}+v_2w_1\vec{j}\vec{i}+v_2w_2\vec{j}^2=v_1w_1+v_2w_2.$

Tétel Két vektor skaláris szorzata $\vec{v}\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2$.

(Felhasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0, és az egységvektorok skaláris négyzete 1.)

Megadtuk két, koordinátáival adott vektor skaláris szorzatát. Adjuk meg e vektorok α hajlásszögének koszinuszát is! (Ebből már megkaphatjuk a vektorok hajlásszögét.) Emlékezzünk arra, hogy két vektor hajlásszöge az őket reprezentáló irányított szakaszok által bezárt α szög, melyre igaz, hogy $\alpha \in [0;\pi]$!

$$\vec{v}\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\alpha.$$

$$v_1w_1 + v_2w_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cdot\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\cos\alpha, \text{ így:}$$

Tétel Két vektor hajlásszögének koszinusza:

$$\cos\alpha = \frac{v_1w_1 + v_2w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cdot\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}.$$

3. példa Adott egy vektor a koordinátáival: $\vec{v}(v_1;v_2)$. Adjuk meg azoknak a vektoroknak a koordinátáit, melyek merőlegesek a $\vec{v}$ -re és abszolút értékük egyenlő a $\vec{v}$ abszolút értékével (**a $\vec{v}$ $\frac{\pi}{2}$ -vel való elforgatottjai**)!

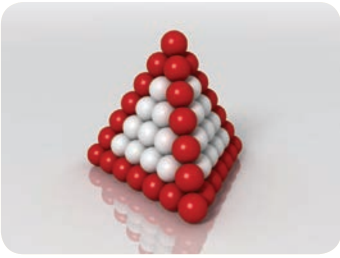
Megoldás:

Legyen egy ilyen keresett vektor $\vec{x}(x_1;x_2)$! Az $\vec{x}\perp\vec{v}$, így $v_1x_1 + v_2x_2 = 0$. Ugyanakkor $|\vec{x}| = |\vec{v}|$, azaz $v_1^2 + v_2^2 = x_1^2 + x_2^2$. Az egyenletrendszert megoldva két megoldást kapunk: $\vec{x_1}(-v_2;v_1)$ és $\vec{x_2}(v_2;-v_1)$.

Oldjuk meg!

1. Legyen adott három pont a síkban, *M*, *A* és *B* úgy, hogy $MA = MB$, *u* és *v* az *M*-re illeszkedő két egyenes. Az *A* pontra illeszkedő, *MA*-ra merőleges egyenes *U* pontban metszi *u*-t. A *B*-re illeszkedő, *MB*-re merőleges egyenes *V* pontban metszi *v* egyenest. Az *A*-ra illeszkedő, *u*-ra merőleges és a *B*-re illeszkedő, *v*-re merőleges egyenesek metszéspontja legyen *W*! Milyen szöget zárnak be az *MW* és *UV* egyenesek?

2. Egy tetraéder kitérő élpárjainak felezőpontjait összekötő szakaszok páronként merőlegesek egymásra. Milyen megállapításokat tehetünk erre a tetraéderre vonatkozóan?



6.7. ábra Tetraéder

3. Adjuk meg azokat a vektorokat, amelyek 14°-os szöget zárnak be a $\vec{v}(3;4)$ vektorral, és kétszer hosszabbak a $\vec{v}$ vektornál!

4. Adjuk meg azokat a vektorokat, amelyek merőlegesek a $\vec{v}(3;4)$ vektorra és kétszer hosszabbak a $\vec{v}$ vektornál!

5. A $\vec{v}(3;4)$ és a $\vec{w}(t;5)$ vektorok merőlegesek egymásra. Adjuk meg a *t* lehetséges értékeit!

6. Adottak $\vec{v}(3;4)$ és $\vec{w}(-1;5)$ vektorok. Adjuk meg a $2\vec{v}-3\vec{w}$ és $4\vec{v}-5\vec{w}$ vektorok hajlásszögét!

7. Az *ABCD* téglalap *AB* oldalának felezőpontja *F*. A *C*-ből induló szögfelező egy *P* pontjának vetülete a *BC* egyenesre *Q*. Bizonyítsuk be, hogy ha a *PF* egyenes merőleges a *DQ* egyenesre, akkor $AP = BC$. (KöMaL B. 3483.)

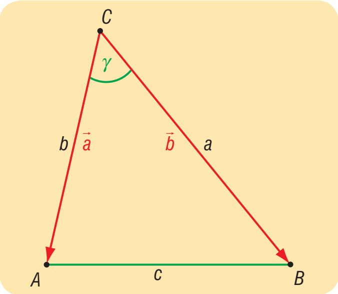
8. Az *ABC* derékszögű háromszög *AC* befogójához tartozó súlyvonal merőleges az *AB* átfogóhoz tartozó súlyvonalra. Fejezzük ki az *AC* átfogóhoz tartozó súlyvonal hosszát a $BC = a$ függvényében!

7. A koszinusztétel

Korábbi példáinkban már találkoztunk azzal a problémával, hogy egy *ABC* háromszög két oldalának (*a* és *b*) és az általuk közbezárt szögnek (γ) ismeretében kerestük a harmadik oldalt. Elég körülményes megoldást találtunk. Keressünk egyszerűbb módszert!

Legyen $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$! Ekkor $|\vec{a}|=b, |\vec{b}|=a$. Ebből következően:

$$c^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\overrightarrow{AB}^2=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2=\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$



7.1. ábra A bizonyítás vektorai

Azt kaptuk tehát, hogy

Tétel $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$

Ezt a tételt **koszinusztétel**nek nevezzük.

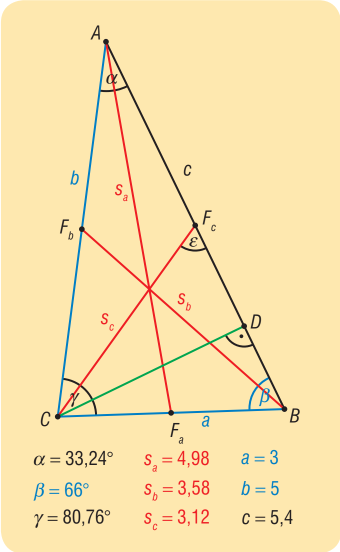
Megjegyzés:

$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ esetén $\cos\gamma=0$, és ekkor a koszinusztétel a Pitagorasz-tételre redukálódik.

A koszinusztételt gyakran arra használjuk, hogy három oldal ismeretében megadjuk a háromszög szögeit, így érdemes a tétel egy másik alakját is megjegyezni:

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

1. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, $\beta = 66°$. Adjuk meg a háromszög súlyvonalainak hosszát! (A probléma az 5. lecke 5. példájaként már szerepelt.)



7.2. ábra Ismétlés

Megoldás:

Alkalmazzuk a koszinusztételt az $ABC\triangle$ b oldalára!

$$25 = 9 + c^2 - 6c \cdot \cos 66°,$$

$$c^2 - 2{,}44c - 16 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $c_1 \approx -2{,}96$ és $c_2 \approx 5{,}40$. Az első megoldás nem felel meg a feladat szövegének, így $c \approx 5{,}40$ egység.

Alkalmazzuk most a koszinusztételt az $F_cBC\triangle$ s_c oldalára!

$$s_c^{\ 2} = 9 + 2{,}7^2 - 6 \cdot 2{,}7 \cdot \cos 66°,$$

$$s_c \approx 3{,}12 \text{ egység.}$$

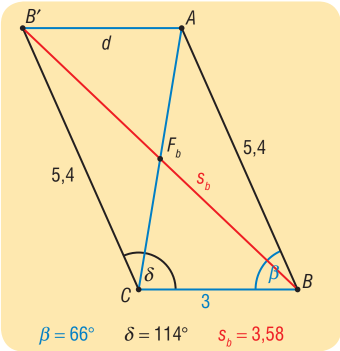
Ha alkalmazzuk a koszinusztételt az $F_aBA\triangle$ s_a oldalára,

$$s_a^{\ 2} = 5{,}4^2 + 1{,}5^2 - 2 \cdot 5{,}4 \cdot 1{,}5 \cdot \cos 66°, \text{ innen } s_a \approx 4{,}98 \text{ egység.}$$

Az s_b súlyvonal meghatározásakor egy másik módszert mutatunk meg.

Tükrözzük a B csúcsot a szemközti oldal felezőpontjára! Ekkor az $ABCB'$ paralelogrammához jutunk, melyben $B'CB\angle = 180° - 66° = 114°$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt a $B'CB\triangle$ $BB' = 2s_b$ oldalára!

$$4s_b^{\ 2} = 5{,}4^2 + 9 - 2 \cdot 5{,}4 \cdot 3 \cdot \cos 114°, \text{ innen } s_b \approx 3{,}58 \text{ egység.}$$



7.3. ábra Másik megoldás

2. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, $c = 7$ egység. Adjuk meg a háromszög szögeinek nagyságát!

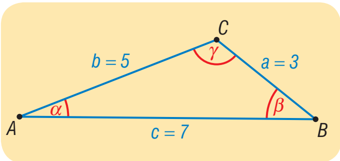
Megoldás:

Alkalmazzuk a koszinusztétel másodiknak tárgyalt alakját!

$$\cos\gamma = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5},$$

$$\cos\gamma = -\frac{1}{2},$$

$$\gamma = 120°.$$



7.4. ábra A példában szereplő háromszög

Hasonlóképpen

$$\cos\alpha = \frac{7^2+5^2-3^2}{2\cdot 7\cdot 5},$$
$$\cos\alpha = \frac{13}{14},$$
$$\alpha \approx 21,8°.$$

Innen $\beta = 180° - 21,8° - 120° = 38,2°$.

Legyenek egy háromszög oldalai a, b és c, a c oldallal szemközti szöge γ, a területe t, valamint $s = \frac{a+b+c}{2}$. Vizsgáljuk a következő kifejezést: $k = s(s-a)(s-b)(s-c)$! Végezzünk algebrai átalakításokat!

$$k = s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right) =$$
$$= \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} = \frac{(a+b)+c}{2}\cdot\frac{(a+b)-c}{2}\cdot\frac{c+(a-b)}{2}\cdot\frac{c-(a-b)}{2} =$$
$$= \frac{(a+b)^2-c^2}{4}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{4}\cdot\frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{4} =$$
$$= \frac{2ab+\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4}\cdot\frac{2ab-\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4} = \frac{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{16}.$$

Alkalmazva a koszinusztételt $\left(c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma\right)$,

$$k = \frac{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-a^2-b^2+2ab\cos\gamma\right)^2}{16} = \frac{4a^2b^2-(2ab\cos\gamma)^2}{16} = \frac{4a^2b^2-4a^2b^2\cos^2\gamma}{16} =$$
$$= \frac{4a^2b^2\left(1-\cos^2\gamma\right)}{16}.$$

A trigonometrikus Pitagorasz-tételt és a háromszög trigonometrikus területképletét alkalmazva:

$$k = \frac{4a^2b^2\left(1-\cos^2\gamma\right)}{16} = \frac{a^2b^2\sin^2\gamma}{4} = \left(\frac{ab\sin\gamma}{2}\right)^2 = t^2.$$

Egy háromszög területképletet kaptunk:

Tétel $$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ezzel már találkoztunk a 9. osztályban, **Héron-képlet**nek hívjuk.

3. példa A Chile partjainak közelében fekvő, Chiléhez tartozó Húsvét-sziget jó közelítéssel olyan háromszögnek tekinthető, melynek oldalai 16 km, 18 km és 24 km. Mekkora a sziget területe?

7.5. ábra A Húsvét-sziget az űrből

Megoldás:
A Héron-képletet alkalmazva kapjuk, hogy

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{20735} \approx 144\ \text{km}^2.$$

A szakirodalom (*http://www.britannica.com/EBchecked/topic/176886/Easter-Island*) 163 km² területről beszél. Mi lehet az eltérés oka? (Ilyen kérdéssel már a 10. osztályos tankönyvben is találkozhattunk.)

7.6. ábra Húsvét-szigeti szobrok

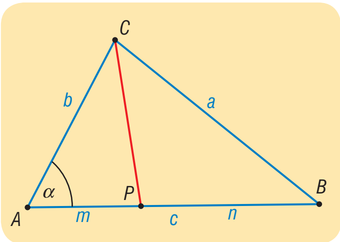
4. példa Egy ABC háromszög oldalai a szokásos jelöléssel: a, b és c. P az AB oldal azon pontja, melyre $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$, ahol m és n pozitív szám. Adjuk meg a CP szakasz hosszát!

Megoldás:

Az osztási arány miatt igaz, hogy $AP = \frac{mc}{m+n}$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az $APC\triangle$ CP oldalára!

$$CP^2 = b^2 + \left(\frac{mc}{m+n}\right)^2 - 2b\frac{mc}{m+n}\cos\alpha, \text{ ahol } \alpha = CAB\angle.$$

Alkalmazzuk a koszinusztételt az $ABC\triangle$ CB oldalára!



7.7. ábra Osztópontba mutató szakasz

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Ebből az egyenletből kifejezzük a $\cos\alpha$ -t, $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Az első egyenletbe helyettesítjük a kapott kifejezést, és algebrai átalakításokat végzünk:

$$CP^2 = b^2 + \left(\frac{mc}{m+n}\right)^2 - 2b\frac{mc}{m+n}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = b^2 + \frac{m^2c^2}{(m+n)^2} - \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)m}{m+n} =$$

$$= \frac{(m+n)^2 b^2 + m^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)m\cdot(m+n)}{(m+n)^2} =$$

$$= \frac{m^2b^2 + n^2b^2 + 2mnb^2 + m^2c^2 - m^2b^2 - m^2c^2 + m^2a^2 - mnb^2 - mnc^2 + mna^2}{(m+n)^2} =$$

$$= \frac{m(m+n)a^2 + n(m+n)b^2 - mnc^2}{(m+n)^2}.$$

Megjegyzés:
A példa speciális eseteiként érdekes eredmények adódnak:
a) Ha $m = n = 1$, akkor a C-re illeszkedő súlyvonal hosszát kapjuk:

$$CF_c^{\ 2} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

b) Ha $m = b$ és $n = a$, akkor a C-re illeszkedő belső szögfelező szakasz hosszát kapjuk:

$$f_\gamma^{\ 2} = \frac{b(b+a)a^2 + a(b+a)b^2 - bac^2}{(b+a)^2} = \frac{ab\left[(b+a)^2 - c^2\right]}{(b+a)^2}.$$

Oldjuk meg!

1. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, a háromszög területe 6 területegység. Adjuk meg a hiányzó oldal és szögek nagyságát!
2. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, $c = 7$ egység. Adjuk meg a háromszög köré írt körének sugarát!
3. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, $c = 7$ egység. P az AB oldal azon pontja, melyre $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{7}$. Adjuk meg a $ACP\angle$ nagyságát!
4. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, $c = 7$ egység. Adjuk meg az a oldalhoz írt kör sugarának nagyságát!


7.8. ábra Két hajó

5. Egy háromszög súlyvonalainak hossza $s_a = 3$ egység, $s_b = 5$ egység, $s_c = 7$ egység. Adjuk meg a háromszög oldalainak és szögeinek nagyságát!
6. Két hajó találkozik a tengeren egy adott helyen. Az első hajó elindul keletre 30 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, a másik hajó fél óra múlva indul észak-északnyugatra 42 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Az első hajó indulásától számítva hány óra múlva lesznek egymástól 15,7 km távolságra a hajók?

7. Egy tetraéder 23, 32, és 43 egységnyi hosszúságú élei páronként merőlegesek egymásra. Mekkorák az ezen élek közös csúcsával szemközti lap szögei?

8. Egy síkságon egy 200 m hosszú *AB* szakasz a torony tetejéről 32°-os szög alatt látszik. A torony tetejéről az *A* pont 48°-os, a *B* pont 62°-os depressziószög alatt látszik. Milyen magas a torony?

7.9. ábra Pillantás a toronyból

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 242., 246, 249., 259. feladatok

8. Addíciós tételek

Legyen α és β két tetszőleges valós szám, $\overrightarrow{e_\alpha}$ és $\overrightarrow{e_\beta}$, α, illetve β irányszögű egységvektorok, $\left|\overrightarrow{e_\alpha}\right|=1$ és $\left|\overrightarrow{e_\beta}\right|=1$. A szögfüggvények definíciója szerint $\overrightarrow{e_\alpha}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ és $\overrightarrow{e_\beta}(\cos\beta;\sin\beta)$. A skaláris szorzat a koordinátákkal kifejezve: $\overrightarrow{e_\alpha}\overrightarrow{e_\beta}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. (1)

Legyen $\overrightarrow{e_\alpha}$ és $\overrightarrow{e_\beta}$ hajlásszöge γ !

Nyilvánvaló, hogy léteznek olyan $\alpha_0,\beta_0\in[0;2\pi[$ valós számok és olyan *k*, *l* egész számok, hogy $\alpha=\alpha_0+2k\pi$ és $\beta=\beta_0+2l\pi$. A szögfüggvények tárgyalt tulajdonságai miatt

- $\alpha_0\geq\beta_0$ esetén
  ha $\alpha_0-\beta_0\leq\pi$, akkor
  $\cos\gamma=\cos(\alpha_0-\beta_0)=\cos(\alpha_0+2k\pi-\beta_0-2l\pi)=\cos(\alpha-\beta)$;
  ha $\pi<\alpha_0-\beta_0<2\pi$, akkor
  $\cos\gamma=\cos(2\pi-\alpha_0+\beta_0)=\cos(\alpha_0-\beta_0)=\cos(\alpha_0+2k\pi-\beta_0-2l\pi)=\cos(\alpha-\beta)$.
- $\alpha_0<\beta_0$ esetén
  ha $\beta_0-\alpha_0\leq\pi$, akkor
  $\cos\gamma=\cos(\beta_0-\alpha_0)=\cos(\alpha_0-\beta_0)=\cos(\alpha_0+2k\pi-\beta_0-2l\pi)=\cos(\alpha-\beta)$;
  ha $\pi<\beta_0-\alpha_0<2\pi$, akkor
  $\cos\gamma=\cos(2\pi-\beta_0+\alpha_0)=\cos(\alpha_0-\beta_0)=\cos(\alpha_0+2k\pi-\beta_0-2l\pi)=\cos(\alpha-\beta)$.

Ebből következően a skaláris szorzat definíciója szerint

$$\overrightarrow{e_\alpha}\overrightarrow{e_\beta}=\left|\overrightarrow{e_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{e_\beta}\right|\cos\gamma=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).\ (2)$$

Az (1) és (2) egyenletek összevetéséből kapjuk az alábbi tételt.

Tétel Két tetszőleges valós α és β esetén

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\ (1)$$

A most bizonyított tételt **addíciós tétel**nek hívjuk, hiszen egy kéttagú kifejezés egy szögfüggvényértékét adjuk meg a tagok szögfüggvényértékeinek segítségével. A következőkben további addíciós tételeket bizonyítunk.

$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta}-\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}.$ (2)

Az (1) addíciós tételt és a szögfüggvények korábban tanult tulajdonságait használtuk fel.

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

$=\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta}+\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}.$ (3)

Az (1) addíciós tételt és a szögfüggvények korábban tanult tulajdonságait használtuk fel.

$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta}-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}.$ (4)

A (3) addíciós tételt és a szögfüggvények korábban tanult tulajdonságait használtuk a levezetésben.

$\mathbf{sin}(2\boldsymbol{\alpha})=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=\mathbf{2sin}\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}.$ (5)

A (3) addíciós tételt használtuk a bizonyításhoz. (Megjegyezzük, hogy a $\sin(2\alpha)$ helyett gyakran $\sin 2\alpha$ -t szoktak írni a matematikai szakirodalomban.)

$\mathbf{cos}(2\boldsymbol{\alpha})=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\mathbf{cos}^2\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{sin}^2\boldsymbol{\alpha}.$ (6)

A (2) addíciós tételt használtuk.

$$\mathbf{sin}(3\boldsymbol{\alpha})=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos(2\alpha)+\cos\alpha\sin(2\alpha)=\sin\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)=$$

$=\mathbf{3sin}\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{cos}^2\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{sin}^3\boldsymbol{\alpha}=3\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^3\alpha=\mathbf{3sin}\,\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{4sin}^3\boldsymbol{\alpha}.$ (7)

A (3), (6) és (5) addíciós tételeket és a trigonometrikus Pitagorasz-tételt használtuk a bizonyításban.

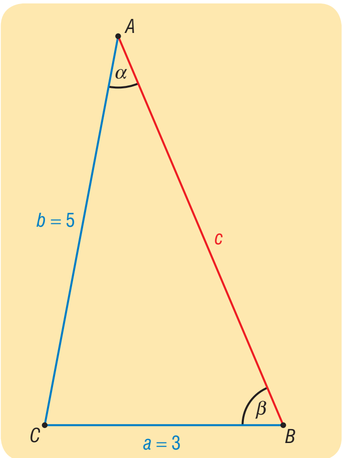
$$\mathbf{cos}(3\boldsymbol{\alpha})=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos(2\alpha)-\sin\alpha\sin(2\alpha)=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\sin\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)=$$

$=\mathbf{cos}^3\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{3sin}^2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}=\cos^3\alpha-3\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha=\mathbf{4cos}^3\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{3cos}\,\boldsymbol{\alpha}.$ (8)

A (2), (6) és (5) addíciós tételeket és a trigonometrikus Pitagorasz-tételt használtuk a bizonyításban.

1. példda

1. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a=3$ egység, $b=5$ egység, a velük szemközti szögek aránya 1:2. Adjuk meg a háromszög hiányzó oldalának hosszát és szögeinek nagyságát!



8.1. ábra A háromszög

Megoldás:

Legyen a háromszög a-val szemközti szöge α! A feltételek szerint $\beta=2\alpha$. A szinusztétel és az (5) addíciós tétel szerint:

$$\frac{5}{3}=\frac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha},$$

$$\frac{5}{3}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\cos\alpha=\frac{5}{6},$$

$$\alpha\approx 33,56°,$$

$$\beta=2\alpha\approx 67,11°,$$

$$\gamma=180°-\alpha-\beta\approx 79,33°.$$

A c oldal a koszinusztétellel számolható:

$c^2=9+25-30\cos 79,33°\approx 28,44$

$c\approx 5,33$ egység.

2. példa Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$ egység, $b = 5$ egység, a velük szemközti szögek különbsége $\frac{\pi}{6}$. Adjuk meg a háromszög hiányzó oldalának hosszát és szögeinek nagyságát!

Megoldás:
Legyen a háromszög a-val szemközti szöge α! A feltételek szerint $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$. A szinusztétel és a (3) addíciós tétel szerint:

$$\frac{5}{3} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\alpha},$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\alpha},$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha\frac{1}{2}}{\sin\alpha},$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{10 - 3\sqrt{3}}{6},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{10 - 3\sqrt{3}},$$

$$\alpha \approx 32{,}0°,$$

$$\beta \approx 62{,}0°,$$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 86{,}0°.$$

A c oldal a koszinusztétellel számolható:

$$c^2 = 9 + 25 - 30\cos 86° \approx 31{,}9,$$

$$c \approx 5{,}6 \text{ egység.}$$

Még néhány addíciós tétel megfogalmazása és bizonyítása következik.

Ha $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol k egész, akkor

$\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$. Alkalmaztuk a (2) és a (3) addíciós tételeket és a tangens szögfüggvény definícióját. Ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, ahol m egész, és $\beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, ahol n egész, akkor a kapott kifejezés továbbalakítható:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{1-tg}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}}. \quad (9)$$

Ha $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol k egész, akkor

$\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$. Alkalmaztuk az (1) és a (4) addíciós tételeket és a tangens szögfüggvény definícióját. Ha $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$, ahol m egész, és $\beta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$, ahol n egész, akkor a kapott kifejezés továbbalakítható:

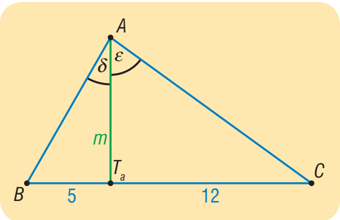
$$\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{1+tg}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta}}. \quad (10)$$

Ha $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, ahol k egész, akkor

$\mathbf{tg}(\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha})=\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$. Alkalmaztuk az (5) és a (6) addíciós tételeket és a tangens szögfüggvény definícióját. Ha $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$, ahol m egész, a kapott kifejezés továbbalakítható:

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\mathbf{2\,tg}\,\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{1-tg^2}\boldsymbol{\alpha}}. \quad (11)$$

3. példa Az ABC háromszögben a CAB szög tangense $\frac{13}{8}$, az A csúcsából induló magasság a BC oldalt 5 és 12 egységnyi szakaszokra bontja. Mekkora az ABC háromszög területe?



8.2. ábra Mekkora a terület?

Megoldás:

Használjuk a 8.2. ábra jelöléseit! A feltétel szerint:

$\mathrm{tg}(\delta+\varepsilon)=\frac{13}{8}$. Alkalmazzuk a (9) addíciós tételt!

$$\frac{\mathrm{tg}\,\delta+\mathrm{tg}\,\varepsilon}{1-\mathrm{tg}\,\delta\cdot\mathrm{tg}\,\varepsilon}=\frac{13}{8},$$

$$\frac{\dfrac{5}{m}+\dfrac{12}{m}}{1-\dfrac{5}{m}\cdot\dfrac{12}{m}}=\frac{13}{8},$$

$$\frac{\dfrac{17}{m}}{\dfrac{m^2-60}{m^2}}=\frac{13}{8},$$

$$\frac{17m}{m^2-60} = \frac{13}{8},$$
$$136m = 13m^2 - 780,$$
$$13m^2 - 136m - 780 = 0.$$

Megoldva a másodfokú egyenletet, kapjuk, hogy $m_1 = \dfrac{68-2\sqrt{3691}}{13} < 0$, így nem megoldása a feladatnak, $m_2 = \dfrac{68+2\sqrt{3691}}{13} \approx 14,6.$ A háromszög területe:

$$t = \frac{17m_2}{2} = \frac{578+17\sqrt{3691}}{13} \approx 123,9 \text{ területegység.}$$

4. példa Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F, $2 \cdot FCB\angle = FCA\angle$. Milyen határok között változhat a $CFA\angle$ tangense?

Megoldás:

Használjuk a 8.3. ábra jelöléseit!

A feltétel szerint $\alpha \cdot 2 = 2 \cdot FCB\angle = FCA\angle$. A háromszög külső szögére vonatkozó tétel miatt:

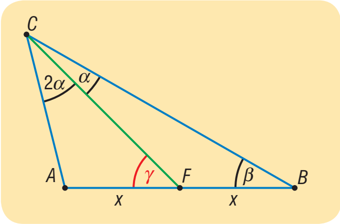
$\beta = \gamma - \alpha$. Nyilvánvaló, hogy

$0 < ACB\angle < 180°$,

$0 < 3\alpha < 180°$,

$0 < \alpha < 60°$.

Legyen $AF = FB = x$!



8.3. ábra tg $\gamma = ?$

A szinusztétel az AFC háromszögben $\dfrac{x}{AC} = \dfrac{\sin(2\alpha)}{\sin\gamma}$.

A szinusztétel az ABC háromszögben $\dfrac{2x}{AC} = \dfrac{\sin(3\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

A két egyenletből kapjuk, hogy $\dfrac{2\sin(2\alpha)}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin(3\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

Alkalmazva az addíciós tételeket, és algebrai átalakításokat végezve,

$$\frac{2\sin(2\alpha)}{\sin\alpha\cos(2\alpha)+\cos\alpha\sin(2\alpha)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha},$$

$$\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\left(\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha\right)} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\alpha - \sin\alpha},$$

$$\frac{4\cos\alpha}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\alpha - \sin\alpha},$$

$$\frac{4\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha} - \frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha} = \frac{\left[\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha\right]\cdot\operatorname{tg}\gamma}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\gamma\,\frac{4\cos^2\alpha-\left(\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha\right)}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha}=\frac{2\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)+2\cos^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\gamma\left[2\cos^2\alpha-\cos(2\alpha).\right]=2\sin(2\alpha),$$

$$\operatorname{tg}\gamma\left(2\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=2\sin(2\alpha),$$

$$\operatorname{tg}\gamma=2\sin(2\alpha).$$

Az (1) feltételből következően $0<2\alpha<120°$, így $0<\operatorname{tg}\gamma\le 2$. Egyenlőség akkor van, ha az $\alpha=45°$.

Az addíciós tételek sok érdekes összefüggést mutatnak a különböző szögek szögfüggvényei között. Csak néhányat tárgyaltunk közülük, annyit, amennyit az emelt szintű érettségi vizsgához tudni kell. A Függvénytáblázatban és az interneten sok érdekes tételt találhatunk még.

Néhány ilyen weboldalt az olvasó figyelmébe ajánlunk:

- http://www.magyusz.hu/download/Matek2.doc
- http://mathworld.wolfram.com/TrigonometricAdditionFormulas.html
- http://www.tankonyvtar.hu/konyvek/oxford-typotex/oxford-typotex-081030-51

A témakör befejezéseként egy olyan trigonometrikus azonosságpárt mutatunk meg, amelynek tagjai jól használhatók a témakörön belül is, de később, például az integrálszámításban is szerepet fognak kapni.

Készítsünk egy egyenletrendszert a trigonometrikus Pitagorasz-tételből és a (6) addíciós tételből!

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$$

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos(2\alpha).$$

Ha a két egyenletet összeadjuk, akkor kapjuk, hogy $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$.

Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat, a $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$.

Oldjuk meg!

1. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a=3$ egység, $b=5$ egység, a velük szemközti szögek aránya 1:3. Adjuk meg a háromszög hiányzó oldalának hosszát és szögeinek nagyságát!

2. Egy paralelogramma egyik oldala 5 egységgel hosszabb, mint a másik, egyik szöge 30°-os. Mekkora a belső szögfelezők által közbezárt négyszög területe?

3. Megszerkeszthető-e (euklideszi szerkesztéssel) az a háromszög, melyben a szokásos jelölésekkel $a=6$ egység, $\alpha=60°$ és $\left(a^2-c^2\right)^2=b^2\left(2c^2-b^2\right)$.

4. Vizsgáljuk meg azokat a háromszögeket, amelyeknek egy szögük, valamint az ezt a szöget bezáró oldalak hosszának összege megegyezik! Ezek közül melyik háromszögnek minimális a harmadik oldala?

5. Egy háromszög egyik szöge 135°, az e szög csúcsából induló magasságvonal a szemközti oldalt $5-\sqrt{5}$ és $\sqrt{5}-1$ egység hosszúságú részekre osztja. Adjuk meg a háromszög hiányzó szögeit!

6. Milyen határok között változhat a valós számok halmazán értelmezett $1954\sin\alpha + 2010\cos\alpha$ kifejezés helyettesítési értéke?

7. Adjuk meg a következő szorzat értékét egyetlen racionális számként!

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$$

8. Legyen δ az a szög, amelyet a derékszögű háromszög egyik befogóhoz tartozó súlyvonala az átfogóval zár be! Mi lehet a $\sin\delta$ maximális értéke?

9. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

A legegyszerűbb, ún. alapegyenletek (például $\sin x = 0,5$ vagy $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$) megoldásával megismerkedtünk a trigonometrikus függvények bevezetése során. Megoldásukhoz hasznos segítség a trigonometrikus függvények definíciójában szereplő egységkör. (A trigonometrikus függvények tulajdonságainak összefoglalását az Analízis című fejezetben találhatjuk meg.) A bonyolultabb egyenletek megoldása sokszor úgy történik, hogy ekvivalens egyenletekkel dolgozva az eredeti egyenletet alapegyenletekre vezetjük vissza. Rendkívül fontos, hogy ezt betartsuk, ugyanis a behelyettesítéssel való ellenőrzés a legtöbb összetettebb egyenlet esetén kivitelezhetetlen. Az átalakítások során gyakran alkalmazunk trigonometriai azonosságokat, addíciós összefüggéseket (pl. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$), ezért ezek biztos ismerete is nagyon fontos.

1. példa Oldjuk meg a valós számok körében!

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$$

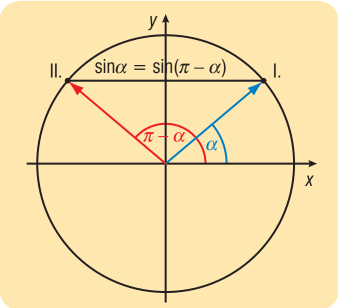
Megoldás:
Az egységkörös ábrázolás segítségével világosan látszik, hogy egy adott szinuszértéknek az egységvektor két, az y tengelyre szimmetrikus helyzete felel meg. (A szinuszfüggvény páratlan.) Mivel a szinuszfüggvény legkisebb pozitív periódusa 2π, ezért

$$2x + \frac{\pi}{3} = x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

innen $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Vagy

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

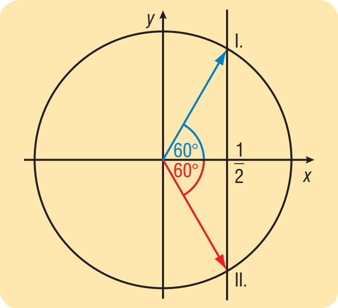
innen $x_2 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.



9.1. ábra Az 1. példa egységkörös ábrázolása

2. példa Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\cos 2x = 3\cos x - 2$$



9.2. ábra A 2. példa egységkörös ábrázolása

Megoldás:
Tudjuk, hogy

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Az egyenletet átrendezve:

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Ennek a $(\cos x)$-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai: $\cos x = 1$, illetve $\cos x = \frac{1}{2}$. A $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai az egységkör segítségével:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \text{valamint}\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

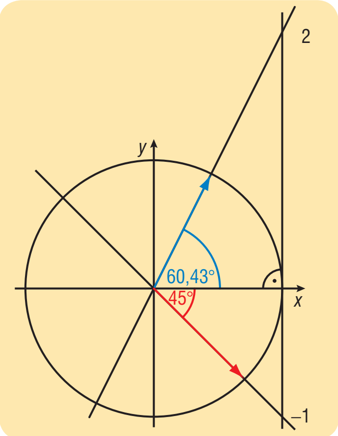
A koszinusz definíciója miatt $\cos x = 1 \Leftrightarrow x_3 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk. Természetesen a megoldásokat fokban mért szögekkel is meg lehet adni. Ilyenkor ügyelnünk kell arra, hogy a periódust tartalmazó tag is fokban szerepeljen:

$$x_1 = 60° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$x_2 = -60° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$x_3 = k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán!

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$$



9.3. ábra A 3. példa egységkörös ábrázolása

Megoldás:
Azok az x számok, amelyekre $\cos x = 0$, nem lehetnek megoldások, hiszen rájuk $\sin^2 x = 1$. Az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk tehát, ha mindkét oldalt osztjuk $\cos^2 x$-szel $(\neq 0)$:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Ennek a $(\operatorname{tg} x)$-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai: $\operatorname{tg} x = -1$, illetve $\operatorname{tg} x = 2$. Tudjuk, hogy a tangensfüggvény legkisebb pozitív periódusa π, ezért a megoldások:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$x_2 \approx 1{,}1 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk.

4. példa Oldjuk meg a valós számok körében!

$$\operatorname{ctg} x = \sin 2x$$

Megoldás:

Tudjuk, hogy $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, valamint $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Ezért az egyenlet az x-re vonatkozó feltétel mellett ekvivalens az alábbival:

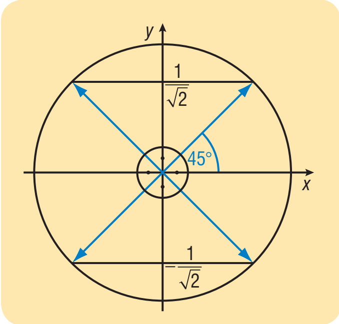
$$\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x \cos x.$$

Tipikus hibának számít az, amikor az egyenlet mindkét oldalát külön vizsgálat nélkül az ismeretlent tartalmazó valamely kifejezéssel elosztják. Itt a $\cos x$-szel való osztás helyett rendezzünk egy oldalra, majd végezzünk kiemelést:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - 2\sin x \cos x = 0,$$

$$\cos x\left(\frac{1}{\sin x} - 2\sin x\right) = 0,$$

$$\cos x \cdot \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} = 0.$$



9.4. ábra A 4. példa egységkörös ábrázolása

Ez pontosan akkor teljesül, ha $\cos x = 0$ vagy $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

A koszinusz definíciója miatt $\cos x = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Világos, hogy $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Az egységkör segítségével könnyen adódik, hogy e két egyenlet összes megoldásai:

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk.

5. példa Oldjuk meg a valós számok körében!

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\cos 5x$$

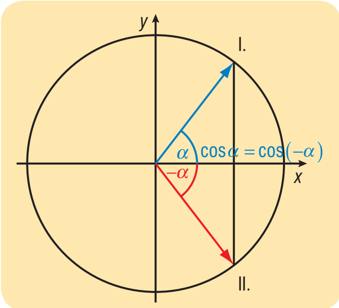
Megoldás:

Ez nem könnyű feladat. Vegyük észre, hogy $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ és $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ miatt, felhasználva a $\sin(\alpha - \beta)$-ra vonatkozó addíciós öszefüggést:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right).$$

Az eredeti egyenlet ezért 2-vel való osztás után:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 5x.$$



9.5. ábra Az 5. példa egységkörös ábrázolása

Tudjuk, hogy $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, ezért az eredeti egyenlettel ekvivalens a következő:

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos 5x.$$

Az egységkörös ábrázolás segítségével világos, hogy egy adott koszinuszértéknek az egységvektor két, az x tengelyre szimmetrikus helyzete felel meg. (A koszinuszfüggvény páros.) Mivel a koszinuszfüggvény legkisebb pozitív periódusa 2π, ezért

$$5x = x - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$4x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$x_1 = -\frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vagy:

$$5x = -x + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$6x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{36} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

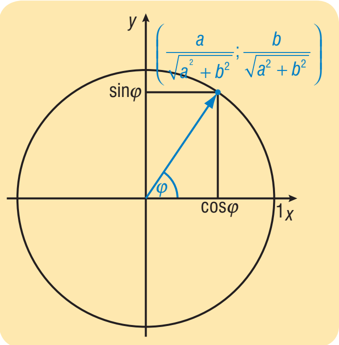
Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk.

6. példa Legyen $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a\sin x + b\cos x$, ahol $a, b \neq 0$, adott számok. Határozzuk meg az f függvény legkisebb, illetve legnagyobb értékét!

Megoldás:

Az előző példához hasonlóan most is az addíciós összefüggésekben van a megoldás kulcsa. Tekintsük a következő átalakítást:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$



9.6. ábra A 6. példa egységkörös ábrázolása

Mivel

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

ezért van olyan $0 < \varphi < 2\pi$ szög, hogy

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ és } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ezzel a φ szöggel akkor

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi).$$

Mivel $-1 \le \sin\alpha \le 1$, így azonnal adódik, hogy az f függvény legnagyobb értéke $\sqrt{a^2+b^2}$, legkisebb értéke pedig $-\sqrt{a^2+b^2}$.

A trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása során fokozottan kell arra ügyelnünk, hogy csakis ekvivalens egyenlőtlenségekkel dolgozzunk. (Itt behelyettesítéssel való ellenőrzésre nincs mód.) Az egységkör is nagyon fontos segédeszközünk a megoldások leolvasásánál.

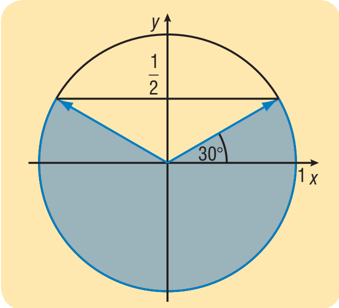
7. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sin x \le \dfrac{1}{2}$ b) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) > -\dfrac{1}{2}$

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy $\sin 30° = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$. Használjuk az egységkört!

Először a köríven kijelöljük azokat a pontokat, amelyeknek második koordinátája legfeljebb $\dfrac{1}{2}$. Most leolvassuk a megoldásokat, ügyelve arra, hogy a határok megállapításánál a nagyságviszonyok jók legyenek. Tipikus hiba például a következő: $\dfrac{5\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$.



9.7. ábra A 7. a) példa egységkörös ábrázolása

Azt sem szabad elfelejtenünk, hogy a szinuszfüggvény legkisebb pozitív periódusa 2π. Ennek a megoldások felírásánál szerepelni kell:

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{13\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Legyen $\alpha = 2x + \dfrac{\pi}{3}$. Először a $\cos\alpha > -\dfrac{1}{2}$ egyenlőtlenséget oldjuk meg. Tudjuk, hogy $\cos 120° = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Most is az egységkört használjuk. A köríven kijelöljük azokat a pontokat, amelyeknek első koordinátája nagyobb, mint $-\dfrac{1}{2}$. A megoldások a periodikusságot is figyelembe véve:

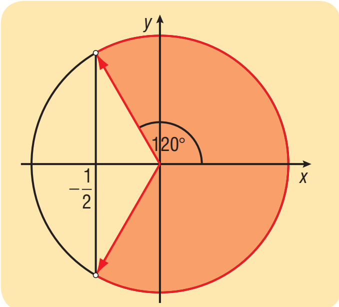
$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Írjuk most be α helyére a $2x + \dfrac{\pi}{3}$ kifejezést:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$-\pi + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



9.8. ábra A 7. b) példa egységkörös ábrázolása

8. példa Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $f(x)=\sqrt{4\sin x\cos x-2\sin x+2\cos x-1}$ kifejezés értelmezhető!

Megoldás:
Azokat a valós számokat keressük, amelyekre

$$4\sin x\cos x-2\sin x+2\cos x-1\geq 0.$$

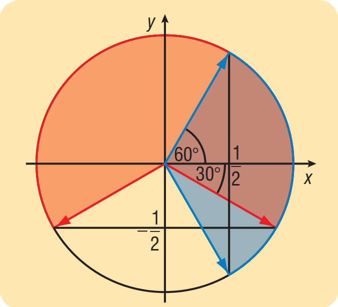
A bal oldalon szereplő kifejezés szorzattá bontható, így a megoldandó egyenlőtlenség:

$$(2\sin x+1)(2\cos x-1)\geq 0,$$

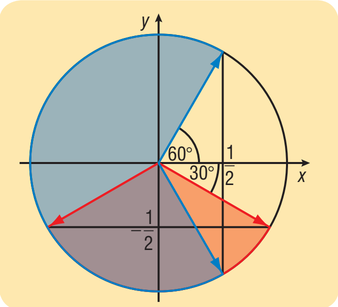
$$4\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\geq 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\text{I. }\begin{cases}\sin x\geq -\dfrac{1}{2},\\ \cos x\geq \dfrac{1}{2},\end{cases}\qquad \text{vagy}\qquad \text{II. }\begin{cases}\sin x\leq -\dfrac{1}{2},\\ \cos x\leq \dfrac{1}{2}.\end{cases}$$



9.9. ábra Az I. feltétel ábrázolása egységkörön



9.10. ábra A II. feltétel ábrázolása egységkörön

I. Ábrázoljuk közös egységkörön a két feltételnek megfelelő pontokat! Könnyen leolvashatjuk a megoldásokat, amelyek a kétszeresen átfedett résznek felelnek meg. (Persze itt is figyelni kell a periodikusságra.)

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

II. Ábrázoljuk itt is közös egységkörön a két feltételnek megfelelő pontokat! A megoldások, amelyek a kétszeresen átfedett résznek felelnek meg:

$$-\frac{5\pi}{6}+2l\pi\leq x\leq-\frac{\pi}{3}+2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}.$$

A kifejezés értelmezési tartománya a kapott eredményeink szerint:

$$\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]\cup\left[-\frac{5\pi}{6}+2l\pi,-\frac{\pi}{3}+2l\pi\right],\ \text{ahol } k,l\in\mathbb{Z}.$$

9. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$2010^{|x|+1}=\cos 5x+2009.$$

Megoldás:

Ez bizony nem egy átlagos egyenlet. Arra gondolhatunk, hogy a bal oldalon álló kifejezés értéke „elég nagy”. Mivel $|x| \ge 0$, így $|x|+1 \ge 1$. Az $a \mapsto 2010^a$, $a \ge 1$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért $2010^{|x|+1} \ge 2010$, vagyis a bal oldalon álló kifejezés minimális értéke 2010. Vegyük észre, hogy $-1 \le \cos 5x \le 1$, ezért a jobb oldalon álló kifejezés maximális értéke éppen 2010! Ez azt jelenti, hogy egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha

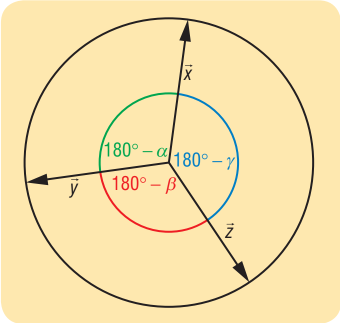
$$|x|+1=1 \text{ és } \cos 5x=1$$

egyszerre teljesül. Az első egyenlet egyetlen megoldása $x=0$, ami könnyen belátható módon a második egyenletet is igazzá teszi. Az eredeti egyenletnek tehát csakis az $x=0$ lehet a megoldása. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy valóban megoldás is lesz.

10. példa Igazoljuk, hogy ha α, β és γ egy háromszög belső szögei, akkor

a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \dfrac{3}{2}$,

b) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \dfrac{9}{4}$!



9.11. ábra A 10. a) példa megoldásához

Megoldás:

a) Vegyük fel az $\vec{x}$, $\vec{y}$ és $\vec{z}$ egységnyi hosszú vektorokat közös kezdőponttal úgy, hogy a páronként bezárt szögeik legyenek $180°-\alpha$, $180°-\beta$ és $180°-\gamma$ (9.11. ábra)!

(Ezt meg lehet tenni, ugyanis $0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$ és $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.) Ekkor a vektorok skaláris szorzatáról szerzett ismereteink felhasználásával adódik, hogy pl.

$$\vec{x}\vec{y} = 1\cdot 1\cdot \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha.$$

Mivel

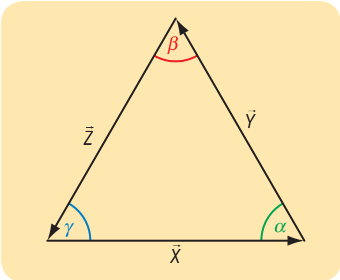
$$0 \le \left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)^2 = \vec{x}^2+\vec{y}^2+\vec{z}^2+2\left(\vec{x}\vec{y}+\vec{y}\vec{z}+\vec{z}\vec{x}\right) =$$

$$= 3-2\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right),$$

ezért

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$. Tekintettel arra, hogy ezek egyenlő hosszú vektorok, adódik, hogy $\alpha=\beta=\gamma=60°$, tehát a háromszög szabályos (9.12. ábra).

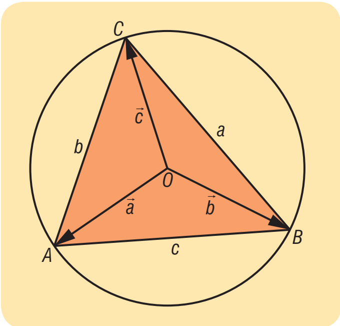


9.12. ábra Szabályos háromszög

b) Tekintsük az ABC háromszög köré írt R sugarú kört a középpontjával, továbbá indítsunk helyvektorokat a kör középpontjából a háromszög csúcsaiba! (Használjuk a 9.13. ábra jelöléseit.) A vektorok skaláris szorzatáról tudottak miatt:

$$c^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = 2R^2 - 2\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b} = 2R^2 - c^2.$$

Hasonlóan adódnak a következők:



9.13. ábra A 10. b) példa megoldásához

$$2\vec{b}\vec{c} = 2R^2 - a^2,$$
$$2\vec{c}\vec{a} = 2R^2 - b^2.$$

Tudjuk, hogy pl. $a = 2R\sin\alpha$, ezért

$$0 \le \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}\right) = 3R^2 + 6R^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right),$$
$$0 \le 9R^2 - 4R^2\left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma\right),$$
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Mivel $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ a súlypont helyvektora, így az ekkor egybeesik a köré írt kör középpontjával, vagyis a Δ szabályos.
Az a) állítás igazolható addíciós összefüggések felhasználásával is.
Ismert, hogy

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

ezért a b) állítás ekvivalens a következővel:

$$-\frac{3}{2} \le \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\alpha.$$

Ezt az egyenlőtlenséget igazolhatjuk az a) részben látott módszerrel, vagy addíciós összefüggések segítségével is. A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával (lásd a Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek című fejezetben) könnyen adódik a b) állításból a következő egyenlőtlenség:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget igazolhatjuk a Jensen-egyenlőtlenség (lásd a Konvex függvények című leckében) felhasználásával is.

Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(4x-\pi)$ b) $\cos 2x = 5\cos x + 1$ c) $\operatorname{tg} x = 2\sin 2x$

d) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 2$ e) $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos^2\left(2x - 30°\right) \le \dfrac{1}{4}$ c) $\sin x - \cos x > 1$

3. Határozza meg azokat az (x, y) valós számpárokat, amelyekre:

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos y!$$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 273-292. feladatok

III. fejezet

Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Nem középszerűen

Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek

1. Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek

Korábbi tanulmányaink során megismerkedtünk két pozitív szám **számtani**, **mértani** (geometriai), **harmonikus** és **négyzetes** (kvadratikus) közepével. Ezek az $a,b>0$ számokra rendre a következők:

$$A=\frac{a+b}{2},\ G=\sqrt{ab},\ H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},\ Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Egyszerű számolással igazolhatjuk, hogy közöttük a következő egyenlőtlenségek érvényesek:

$$\min(a,b)\le H\le G\le A\le Q\le \max(a,b).$$

Egyenlőség bármely két közép között pontosan akkor áll fenn, ha $a=b$. (Gyakorlásul végezzük el a bizonyításokat!) A továbbiakban először n darab pozitív számra $(n\ge 2)$ általánosítjuk a fenti nevezetes közepeket.

Definíció Ha $a_1,a_2,...,a_n>0$, akkor a számtani közép: $A_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, a mértani közép: $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, a harmonikus közép: $H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$, a négyzetes közép: $Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$.

Várható, hogy közöttük ugyanolyan egyenlőtlenségek érvényesek, mint két változó esetén.

Tétel Ha $a_1,a_2,...,a_n>0$, akkor

$$\min(a_1,a_2,...,a_n)\le H_n\le G_n\le A_n\le Q_n\le \max(a_1,a_2,...,a_n).$$

Bizonyítás:

Legyen $\min(a_1,a_2,...,a_n)=a$. Ekkor $a\le a_i \Leftrightarrow \frac{1}{a}\ge\frac{1}{a_i}$, ezért

$$\frac{n}{a}\ge\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\Leftrightarrow\frac{a}{n}\le\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}},$$

ahonnan

$$\min(a_1,a_2,...,a_n)\le H_n.$$

Legyen $\max(a_1,a_2,...,a_n)=b$. Ekkor $a_i\le b$, ezért

$$\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}\le\frac{nb^2}{n}=b^2,$$

ahonnan

$$Q_n\le\max(a_1,a_2,...,a_n).$$

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségnek számos bizonyítása ismert. A most következő gondolatmenet talán a legegyszerűbb eszközöket használó bizonyítás $G_n \le A_n$ igazolására.
Ha minden változó értéke ugyanaz, akkor nyilvánvaló módon egyenlőség áll fenn. Tegyük fel, hogy vannak különböző értékűek a változók között. Ha a_1 közöttük a legkisebb, a_2 pedig a legnagyobb, akkor $a_1 < A_n < a_2$. Cseréljük le a_1-et A_n-re, a_2-t pedig $(a_1 + a_2 - A_n)$-re! (Könnyű látni, hogy $a_1 + a_2 - A_n < a_2$.) Ettől az n darab szám számtani közepe nem változik meg. Mivel

$$a_1 a_2 < A_n\left(a_1 + a_2 - A_n\right),$$

$$0 < A_n a_1 + A_n a_2 - A_n^2 - a_1 a_2,$$

$$0 < \left(A_n - a_1\right)\cdot\left(a_2 - A_n\right)$$

igaz, ezért a csere hatására a mértani közép értéke nő. Ha még mindig vannak különböző értékűek a számok között, akkor ismételjük meg az eljárást! Véges sok szám van, így az eljárás előbb-utóbb le fog állni, hiszen végül minden szám A_n-nel lesz egyenlő! A cserék során a mértani közép nőtt, a számtani közép nem változott, végül pedig egyenlőséghez jutottunk el. Ebből következik a bizonyítandó egyenlőtlenség.
A $H_n \le G_n$ egyenlőtlenség visszavezethető a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségre, ha azt az $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ változókra alkalmazzuk. (Ellenőrizzük!)
Az $A_n \le Q_n$ egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk négyzetre emelés után:

$$\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n\right)^2 \le n\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right).$$

Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 2$, akkor a két változót tartalmazó alakhoz jutunk, ami igaz. Tegyük fel, hogy az állítás $n-1$ darab változóra igaz, ahol $n \ge 3$! Átalakítva a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$$a_1^2 + 2a_1\left(a_2 + \dots + a_n\right) + \left(a_2 + \dots + a_n\right)^2 \le na_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \left(n-1\right)\cdot\left(a_2^2 + \dots + a_n^2\right).$$

Az indukciós feltevés miatt

$$\left(a_2 + \dots + a_n\right)^2 \le \left(n-1\right)\cdot\left(a_2^2 + \dots + a_n^2\right),$$

így elegendő igazolnunk, hogy

$$a_1^2 + 2a_1\left(a_2 + \dots + a_n\right) \le na_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Átrendezve:

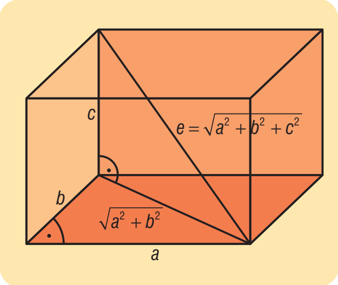
$$0 \le \left(a_2 - a_1\right)^2 + \dots + \left(a_n - a_1\right)^2,$$

ami triviálisan igaz.
Ezzel a tételben szereplő egyenlőtlenségláncot igazoltuk.

A közepek közötti egyenlőtlenségeket leggyakrabban szélsőérték feladatok megoldására használjuk. Erre több példát is láthatunk könyvünk függvények szélsőértékeivel kapcsolatos részében. Most néhány, más területről származó alkalmazást mutatunk.

1. példa Tekintsük a $2\sqrt{3}$ hosszú testátlóval bíró téglatesteket. Melyiknek lesz közülük a térfogata maximális?

Megoldás:
Válasszunk ki egy téglatestet, és legyenek az egy csúcsba futó élek hosszai *a*, *b* és *c*! A testátló hossza:



1.1. ábra Egy téglatest

$$e=2\sqrt{3}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

A mértani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt[3]{abc}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Így akkor a térfogatra:

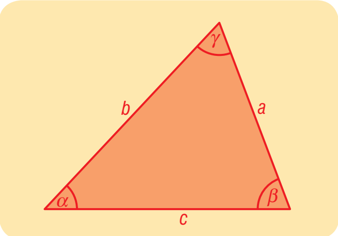
$$V=abc\le(2)^3=8\text{ cm}^3.$$

Mivel egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$, így a 2 cm élű kockára lesz a térfogat maximális.

2. példa Igazoljuk, ha α,β és γ egy háromszög szögei, akkor

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma+\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta}\ge\frac{3}{2}!$$

Megoldás:



1.2. ábra A 2. példa ábrája

Trigonometriából ismert az ún. szinusztétel, amely szerint a háromszög megfelelő oldalai és szögei között fennáll, hogy $a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$. A bizonyítandó egyenlőtlenség így írható a következő módon:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Legyen $b+c=x$, $c+a=y$, $a+b=z$. A helyettesítés elvégzése, majd tagonkénti osztás után:

$$\frac{y+z-x}{x}+\frac{z+x-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\ge 3,$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\ge 6.$$

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségek miatt mindhárom zárójelben lévő szám legalább 2, amiből az állítás adódik, mivel a lépések megfordíthatók. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z$, azaz $a=b=c$, vagyis a háromszög szabályos.

3. példa Oldjuk meg az alábbi exponenciális egyenletet:

$$8^x+27^x+64^x+125^x=24^x+30^x+40^x+60^x.$$

Megoldás:

Vegyük észre, hogy $a=2^x$, $b=3^x$, $c=4^x$, $d=5^x$ helyettesítéssel a következő alakot kapjuk:

$$a^3+b^3+c^3+d^3=abc+abd+acd+bcd.$$

Ez sugallja, hogy próbálkozzunk meg a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával. Mivel $x,y,z>0$ esetén

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=xyz,$$

ezért

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc,$$
$$a^3+b^3+d^3 \ge 3abd,$$
$$a^3+c^3+d^3 \ge 3acd,$$
$$b^3+c^3+d^3 \ge 3bcd.$$

Adjuk össze ezeket!

$$3a^3+3b^3+3c^3+3d^3 \ge 3abc+3abd+3acd+3bcd,$$
$$a^3+b^3+c^3+d^3 \ge abc+abd+acd+bcd.$$

Mivel a feladat szerint itt egyenlőség van, így

$$a=b=c=d.$$

Innen

$$2^x = 4^x = \left(2^x\right)^2 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x=0,$$

ami meg is felel.

4. példa A 12 cm kerületű háromszögek közül melyiknek a területe lesz maximális? Mennyi a maximum értéke?

Megoldás:
Könyvünkben szerepel az ún. Heron-formula bizonyítása, amely szerint ha *a*, *b* és *c* egy háromszög oldalai, *s* a kerület fele, *t* pedig a terület, akkor

$$t=\sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\frac{s}{3}=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \ge \sqrt[3]{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$
$$\frac{s^3}{27} \ge (s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c),$$
$$\frac{s^4}{27} \ge s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c),$$
$$\frac{s^2}{3\sqrt{3}} \ge \sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}.$$

A feladat szövege alapján $s=6$ cm, így $t \le \frac{36}{3\sqrt{3}}\ \text{cm}^2 \approx 6{,}93\ \text{cm}^2$. Mivel egyenlőség a becslésben pontosan akkor van, ha $s-a=s-b=s-c$, így szabályos háromszög esetén lesz a terület maximális.

5. példa Igazoljuk, hogy *a*, *b*, *c* pozitív valós számok esetén

$$a^3+b^3+c^3 \ge a^2b+b^2c+c^2a!$$

Megoldás:
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\frac{a^3+a^3+b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3} = a^2b,$$
$$\frac{2a^3+b^3}{3} \geq a^2b.$$

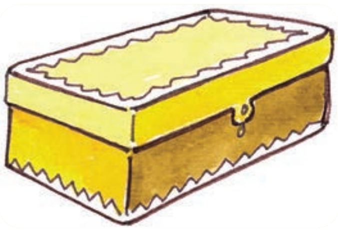
Hasonlóan adódik, hogy

$$\frac{2b^3+c^3}{3} \geq b^2c,$$
$$\frac{2c^3+a^3}{3} \geq c^2a.$$

A három utolsó egyenlőtlenséget összeadva kapjuk a bizonyítandó állítást. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Oldjuk meg!

1. Igazoljuk, hogy az adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete lesz a legkisebb!



1.3. ábra Doboz

2. Egy téglatest alakú doboz egyik lapjának területe 1 dm^2, élei hosszának összege 20 dm. Hogyan kell az élek hosszát megválasztani, hogy a felszín a lehető legnagyobb legyen?

3. Igazoljuk, hogy *a*, *b*, *c* pozitív valós számok esetén

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^3b+b^3c+c^3a!$$

4. A π dm^3 térfogatú egyenes körhengerek közül melyiknek a felszíne lesz a legkisebb?
Mennyi a minimális felszín?

5. Az $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ nemnegatív számok összege 1. Határozzuk meg az

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{2008}x_{2009}$$

összeg maximumát!

6. Az *a*, *b*, *c* pozitív számok és $abc=1$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1} \leq \frac{1}{2}!$$

7. Igazoljuk, hogy ha $a,b,c>0$, akkor

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 33!$$

További feladatok:
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok: Schultz János: 111 algebrai egyenlőtlenség

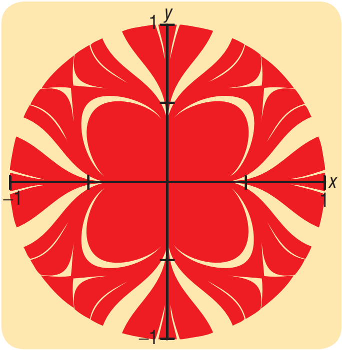
IV. fejezet

Koordináta-geometria

Koordináljunk!

Koordináta-geometria

1. Mi a koordináta-geometria?



1.1. ábra Egy számítógépes grafika

1.2. ábra A nagy felfedező

Az elmúlt években már megismerkedtünk a geometria alapjaival. A **geometria** a matematikának az az ága, amely a ponthalmazok vizsgálatával foglalkozik.

Korábbi tanulmányaink részét képezte az **algebra és számelmélet** is, amely olyan tudományág, amely számokat, kifejezéseket, egyenleteket és egyenlőtlenségeket vizsgál.

Felmerülhet a kérdés, hogyan lehet ezt a két területet összekapcsolni egyetlen tudományág keretében. Ha gyakorlati szempontból vizsgáljuk a problémát, akkor megkérdezhetjük azt is, hogy egyáltalán szükség van-e erre.

A számítógépek világában erre az utóbbi kérdésre csak igenlő választ adhatunk, hiszen a komputerek kizárólag az algebra nyelvén értenek, de gyakran kell ponthalmazokkal kapcsolatos manipulációt végezniük (pl. számítógépes grafika, vezérlések, geometriai szerkesztőprogramok).

Már a nagy felfedezések korában is felmerült a hajósokban a pontos tájékozódás igénye, és – többek között – ez indította el a koordináta-geometria **(analitikus geometria)** mint matematikai tudományág fejlődését.

A koordináta-geometria feladata a geometriai fogalmak számelméleti, algebrai módszerekkel történő jellemzése. (A korábbiakban megismert geometriát az analitikus geometriától való megkülönböztetés miatt szokás **szintetikus geometriának** nevezni.) A következőkben ennek a tudományágnak az alapjaival fogunk megismerkedni. Amikor Descartes nyomán haladva erre az útra lépünk, akkor a fordítottját tesszük annak, amit az ókori görög matematikusok tettek, hiszen ők a számok tulajdonságait jelenítették meg geometriai fogalmak segítségével.

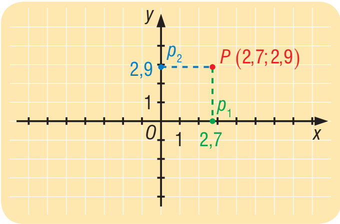
Előrebocsátjuk, hogy a koordináta-geometriai problémák megoldása gyakran sok számolást igényel. A tankönyvnek ebben a részében csak ritkán szerepelnek olyan példák, amelyek megoldásának eredményei „szép" (egész vagy racionális) számok. Ennek oka az is, hogy a gyakorlati életben csak ritkán találkozhatunk ilyen eredményre vezető problémákkal. A megoldásokat olykor pontos, máskor közelítő értékekkel adjuk meg. A közelítő értékekkel való számolás mindig megengedett, és a számológép használata kifejezetten ajánlott.

A geometria egyik alapfogalma a **pont**.

1.1. A sík pontjainak koordináta-geometriai jellemzése

A 9. osztályban már találkoztunk ezzel a problémával, így csak röviden átismételjük az akkor megszerzett ismereteket.

A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer két tengelye két egymásra merőleges számegyenes, melyeknek 0 pontja egybeesik (**origó**). Az egyik tengely **az abszcisszatengely (*x*-tengely)**, a másik tengely az **ordinátatengely (*y*-tengely)**. A sík bármely P pontjához egyértelműen hozzárendelünk egy rendezett valós számpárt $(p_1;p_2)$. E számpár elemei a pont koordinátái. Az **első koordináta (abszcissza)** a pont ordinátatengelytől vett előjeles távolsága, míg a **második koordináta (ordináta)** a P abszcisszatengelytől vett előjeles távolsága.



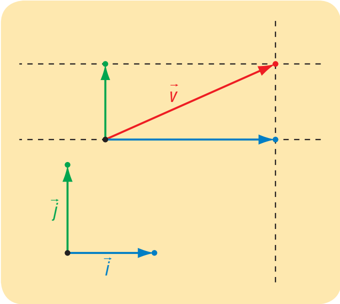
1.3. ábra Egy pont koordinátái

Ezzel a hozzárendeléssel **kölcsönösen egyértelmű ráképezést (bijekció)** hoztunk létre a sík pontjainak halmaza és a rendezett valós számpárok halmaza között.

1.2. A sík vektorainak koordináta-geometriai jellemzése

A Vektorok, trigonometria című fejezetben részletesen megismertük az alkalmazott módszert. Itt csak ennek lényegét ismételjük át, és a fontosabb eredményeket foglaljuk össze.

Legyenek $\vec{i}$ és $\vec{j}$ egymásra merőleges egységvektorok **(bázisvektorok)** a síkban! A sík bármely $\vec{v}$ vektorához hozzárendeljük azt a $(v_1;v_2)$ rendezett valós számpárt, melyekre igaz, hogy $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$. A számpár elemei a **vektor koordinátái**. Ezzel a hozzárendeléssel bijekciót adtunk meg a sík vektorai és a rendezett valós számpárok halmaza között.



1.4. ábra Vektor koordinátái

A $\vec{v}$ hossza $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Ha a k valós szám, akkor $k\vec{v}\left(kv_1;kv_2\right)$.

A $\vec{v}$ 90°-os elforgatottjai:

- pozitív irányba: $\left(-v_2;v_1\right)$,
- negatív irányba: $\left(v_2;-v_1\right)$.

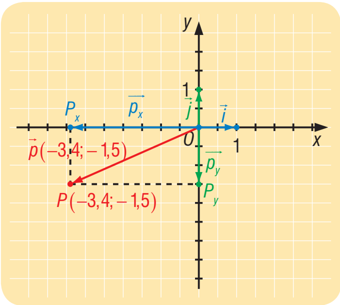
Ha $\vec{w}\left(w_1;w_2\right)$, akkor

$$\vec{v}+\vec{w}\left(v_1+w_1, v_2+w_2\right),\quad \vec{v}-\vec{w}\left(v_1-w_1;v_2-w_2\right)$$

$$\text{és }\ \vec{v}\,\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2.$$

Két vektor hajlásszögének koszinusza:

$$\cos\gamma = \frac{v_1w_1 + v_2w_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2}}.$$



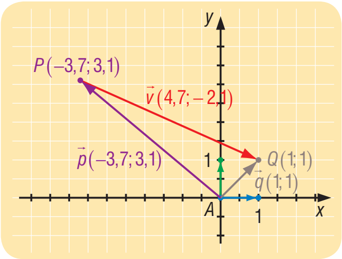
1.5. ábra A vonatkoztatási rendszerek egyesítése

A koordináta-geometriai vizsgálódásoknak nagy lökést adott az a felismerés, hogy az előzőekben tárgyalt két vonatkoztatási rendszert **célszerűen egyesíteni lehet**. Ez látható az 1.5. ábrán.

Az $\vec{i}$ bázisvektort ábrázoló irányított szakasz kezdőpontja az origó, végpontja az (1;0) pont. Az $\vec{j}$ bázisvektort ábrázoló irányított szakasz kezdőpontja az origó, végpontja a (0;1) pont. (Megjegyezzük, hogy a későbbiekben a két bázisvektort nem mindig fogjuk megjeleníteni az ábrákon, de mindig „odagondoljuk” őket.)

Ennek a felvételnek köszönhető, hogy ha egy vektort olyan irányított szakasszal adunk meg, amelynek kezdőpontja az origó, akkor e vektor koordinátái egyenlők az irányított szakasz végpontjának koordinátáival. (Ezt úgy is szokták emlegetni, hogy a **helyvektor koordinátái** egyenlők a végpontjának koordinátáival.) Ennek az állításnak a – nem nehéz – bizonyítását az olvasóra bízzuk.

Nézzük most meg azt, hogy hogyan kaphatjuk meg két pontot összekötő irányított szakasszal megadott vektor koordinátáit.



1.6. ábra Szabadvektor koordinátái

Legyen a $P(p_1; p_2)$ és $Q(q_1; q_2)$! Keressük a $\overrightarrow{PQ}$ **vektor koordinátái**t! Mivel az A pont az origó, $\overrightarrow{AP}(p_1; p_2)$ és $\overrightarrow{AQ}(q_1; q_2)$ (helyvektorok). Ugyanakkor $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$, így $\overrightarrow{PQ}(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$.

(A kapott eredmény más módon megfogalmazva: a **szabadvektor koordinátái** a végpontja és kezdőpontja megfelelő koordinátáinak különbségeként állíthatók elő.)

A most kapott eredményt felhasználva lépjünk tovább!

Két pont távolsága

Legyen a $P(p_1; p_2)$ és $Q(q_1, q_2)$! Adjuk meg a távolságukat!

A keresett távolság a két pontot összekötő vektor abszolút értéke: $PQ = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$. A vektor abszolút értéke a koordinátái négyzetösszegének négyzetgyöke.

Tétel $PQ = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$.

Két pont távolsága a megfelelő koordinátakülönbségek négyzetösszegének négyzetgyöke.

Mielőtt példák megoldásával foglalkoznánk, előrebocsátjuk, hogy a megoldásokban megadjuk a pontos értékeket is. Ez azonban nem követelmény az érettségire készülő diákokkal szemben, a közelítő értékekkel való számolás is megengedett. (Az ábráink zömén is közelítő értékek szerepelnek.)

1. példa Adott három pont a koordinátáival, $A(-3; -1)$, $B(6; -2)$ és $C(3; 4)$. Adjuk meg az általuk meghatározott háromszög

a) kerületét; b) területét; c) szögeit;
d) beírt körének sugarát; e) körülírt körének sugarát!

Megoldás:

a) Az oldalak hossza az előbb bizonyított távolságképlettel számolható, a kerület pedig a három oldal hosszának az összege.

$$c = AB = \sqrt{(-3-6)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82} \approx 9,06,$$

$$a = BC = \sqrt{(6-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6,71,$$

$$b = CA = \sqrt{(3+3)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61} \approx 7,81,$$

$$k = \sqrt{82} + 3\sqrt{5} + \sqrt{61} \approx 23,57.$$

b) Az oldalak hosszának ismeretében a terület a – korábban már tárgyalt – Heron-képlettel számolható. A félkerület $s = \frac{k}{2} = \frac{\sqrt{82}+3\sqrt{5}+\sqrt{61}}{2} \approx 11,79.$

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{82}+3\sqrt{5}+\sqrt{61}}{2}\,\frac{\sqrt{82}-3\sqrt{5}+\sqrt{61}}{2}\,\frac{\sqrt{82}+3\sqrt{5}-\sqrt{61}}{2}\,\frac{-\sqrt{82}+3\sqrt{5}+\sqrt{61}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2601}{4}} = \frac{51}{2} = 25,5.$$

(Megjegyezzük, hogy a terület általános iskolában ismert eszközökkel is meghatározható. A háromszög köré a tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapot rajzolunk, és annak területéből kivonjuk a „felesleges” derékszögű háromszögek területének összegét.)

c) Az oldalak ismeretében a háromszög szögei a koszinusztétel alkalmazásával számolhatók.

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4\sqrt{305}}{305} \approx 0,2290 \Rightarrow \gamma \approx 76,76°,$$

$$\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{11\sqrt{410}}{410} \approx 0,5433 \Rightarrow \beta \approx 57,09°,$$

$$\alpha = 180° - 76,76° - 57,09° = 46,15°.$$

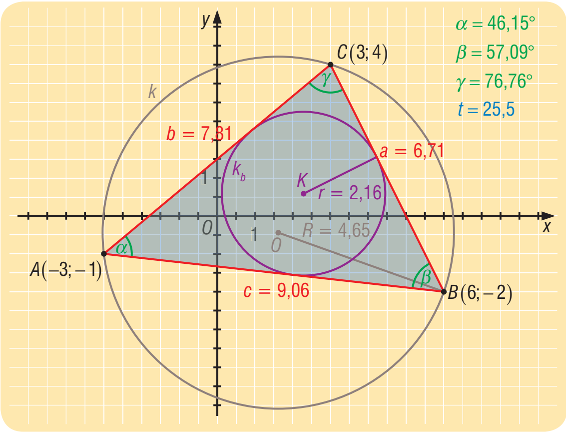
d) A 9. osztályos tankönyvben szerepelt $t = rs$ képlet alapján számolható a beírt kör sugara. (t a háromszög területe, r a beírt kör sugara, s a háromszög kerületének a fele.)

$$t = rs \Rightarrow r = \frac{t}{s} = \frac{\frac{51}{2}}{\frac{\sqrt{82}+3\sqrt{5}+\sqrt{61}}{2}} =$$

$$= \frac{51}{\sqrt{82}+3\sqrt{5}+\sqrt{61}} \approx 2,16.$$

e) A $t = \frac{abc}{4R}$ képlet alapján kaphatjuk meg a körülírt kör R sugarát.

$$R = \frac{abc}{4t} = \frac{\sqrt{25010}}{34} \approx 4,65.$$



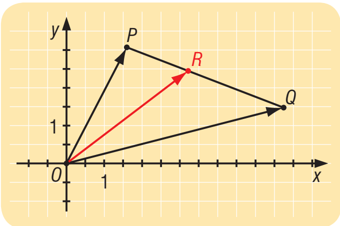
1.7. ábra A keresett adatok

A szakaszt adott arányban osztó pont koordinátái

Legyen $P(p_1;p_2)$ és $Q(q_1;q_2)$, R pedig olyan pontja a PQ szakasznak, melyre igaz, hogy $\frac{PR}{RQ} = \frac{\mu}{\lambda}$ (μ és λ adott pozitív számok)! Adjuk meg az R koordinátáit!

Tekintsük az 1.8. ábrát!

Legyen O pont az origó, ekkor az R koordinátái egyenlők az $\overrightarrow{OR}$ (helyvektor) koordinátáival.



1.8. ábra Osztópont koordinátái

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}.$$

Az osztási arány miatt: $\overrightarrow{PR} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\overrightarrow{PQ} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)$.

Ebből következően:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = \frac{(\mu+\lambda)\overrightarrow{OP} + \mu\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)}{\mu+\lambda}.$$

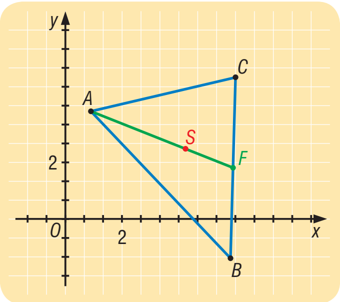
Elvégezve a műveleteket kapjuk, hogy $\overrightarrow{OR} = \frac{\lambda\overrightarrow{OP} + \mu\overrightarrow{OQ}}{\mu+\lambda}$. Felhasználva, hogy a helyvektorok koordinátái egyenlők a végpontjaik koordinátáival, adódik, hogy

$$R\left(\frac{\lambda p_1 + \mu q_1}{\mu+\lambda}; \frac{\lambda p_2 + \mu q_2}{\mu+\lambda}\right).$$

A kapott eredmény speciális eseteit is megfogalmazhatjuk:

- Ha a PQ szakasz **felezőpontja** F, akkor $\frac{PF}{FQ} = 1$, így $F\left(\frac{p_1+q_1}{2}; \frac{p_2+q_2}{2}\right)$. (Szakasz felezéspontjának koordinátái a végpontok koordinátáinak számtani közepei.)
- Ha a PQ szakasz P-hez közelebbi **harmadolópontja** H_P, akkor $\frac{PH_P}{H_PQ} = \frac{1}{2}$, így
$$F\left(\frac{2p_1+q_1}{3}; \frac{2p_2+q_2}{3}\right).$$

Háromszög súlypontjának koordinátái



1.9. ábra Háromszög és súlypontja

Egy háromszög csúcsai: $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$ és $C(c_1;c_2)$. Adjuk meg a háromszög S súlypontjának koordinátáit!
Legyen a háromszög BC oldalának felezőpontja F! Az előzőek alapján ennek koordinátái $F\left(\frac{b_1+c_1}{2}; \frac{b_2+c_2}{2}\right)$. Az elemi geometriából ismert, hogy a háromszög S súlypontja az AF súlyvonal F-hez közelebbi harmadolópontja. Alkalmazva a harmadolópont koordinátáira vonatkozó eredményünket:

$$S\left(\frac{2\frac{b_1+c_1}{2}+a_1}{3}; \frac{2\frac{b_2+c_2}{2}+a_2}{3}\right),$$ azaz

Tétel

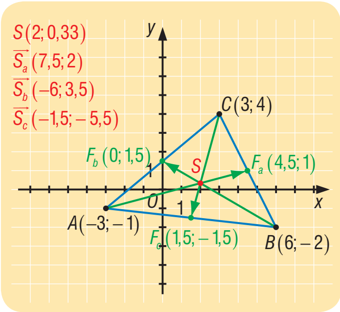
$$S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).$$

A háromszög **súlypont**jának koordinátái a csúcsok koordinátáinak számtani közepei.

2. példa Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg az általuk meghatározott háromszög

a) súlypontjának koordinátáit;
b) a csúcsokból induló súlyvonal vektorainak összegét;
c) súlyvonalainak hosszát;
d) beírt körének középpontját!

Megoldás:
A kapott eredmények közelítő értékét a következő ábrák alapján lehet ellenőrizni.



1.10. ábra A 2. példa ábrája

a) Az imént bizonyított tétel alapján:

$$S\left(\frac{-3+6+3}{3};\frac{-1-2+4}{3}\right)=\left(2;\frac{1}{3}\right).$$

b) Először megadjuk a háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit, ezután a súlyvonalvektorok (szabadvektorok) koordinátái kiszámolhatók.

$$F_a\left(\frac{6+3}{2};\frac{4-2}{2}\right)=\left(\frac{9}{2};1\right)\Rightarrow \overrightarrow{AF_a}\left(\frac{9}{2}+3;1+1\right)=\left(\frac{15}{2};2\right).$$

$$F_b\left(\frac{-3+3}{2};\frac{-1+4}{2}\right)=\left(0;\frac{3}{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{BF_b}\left(0-6;\frac{3}{2}+2\right)=\left(-6;\frac{7}{2}\right).$$

$$F_c\left(\frac{-3+6}{2};\frac{-1-2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{CF_c}\left(\frac{3}{2}-3;-\frac{3}{2}-4\right)=\left(-\frac{3}{2};-\frac{11}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{AF_a}+\overrightarrow{BF_b}+\overrightarrow{CF_c}\left(\frac{15}{2}-6-\frac{3}{2};2+\frac{7}{2}-\frac{11}{2}\right)=(0;0).$$

A koordinátáival adott súlyvonalvektorok összege nullvektor. Érdemes elgondolkodni azon, hogy ez csak erre a háromszögre igaz, vagy minden háromszögben így van-e.

c) A súlyvonalak hossza a súlyvonalvektorok abszolút értéke:

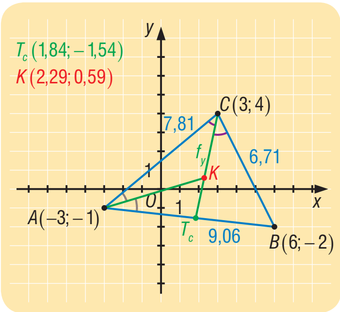
$$AF_a=\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{60,25}\approx 7,76,$$

$$BF_b=\sqrt{(-6)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{48,25}\approx 6,95,$$

$$CF_c=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{32,5}\approx 5,68.$$

d) A Vektorok, trigonometria című témakör 5. feladatában megadtuk a háromszögbe írt kör középpontjának helyvektorát az oldalak hosszainak és a csúcspontok helyvektorainak segítségével. Ha valaki nem oldotta meg ezt a feladatot, a megoldást megtalálja a könyv digitális mellékletében.

$$\overrightarrow{OK}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}.$$



1.11. ábra Háromszögbe írt kör középpontja

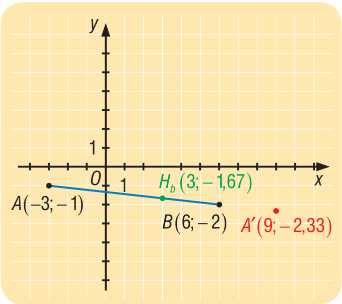
A háromszög oldalai az első példából ismertek:

$$c=\sqrt{82}\approx 9{,}06,$$
$$a=3\sqrt{5}\approx 6{,}71,$$
$$b=\sqrt{61}\approx 7{,}81.$$

A helyvektorok koordinátái a csúcsok koordinátáival egyenlők, ebből következően:

$$K\left(\frac{\sqrt{5002}}{17}-\frac{\sqrt{305}}{34}-\frac{5\sqrt{410}}{34}+\frac{55}{34};\frac{\sqrt{5002}}{34}-\frac{9\sqrt{305}}{34}+\frac{3\sqrt{410}}{17}-\frac{15}{34}\right)\approx(2{,}29;0{,}59).$$

3. példa Adott két pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$. Tükrözzük az A pontot az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontjára! Adjuk meg a tükörképpont koordinátáit!



1.12. ábra A 3. példa ábrája

Megoldás:

Legyen a példában szereplő harmadolópont H_b! A harmadolópont koordinátáira vonatkozó összefüggés szerint

$$H_b\left(\frac{2\cdot 6-3}{3};\frac{2\cdot(-2)-1}{3}\right)=\left(3;-\frac{5}{3}\right).$$

Legyen a keresett tükörkép $A'(a_1;a_2)$! Az AA' szakasz felezőpontja a H_b. A felezéspontra vonatkozó összefüggés alapján igaz, hogy

$$3=\frac{-3+a_1}{2},$$
$$-\frac{5}{3}=\frac{-1+a_2}{2}.$$

Megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy $A'\left(9;-\frac{7}{3}\right)$. (Lásd az 1.12. ábrát!)

Oldjuk meg!

1. Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;\ 4)$. Adjuk meg az általuk meghatározott háromszög súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok összegét!
2. Mutassuk meg, hogy az 1. feladatban szereplő háromszög súlyvonalaiból mint oldalakból háromszög szerkeszthető! Az így kapott háromszög területe hányadrésze az eredeti háromszög területének?
3. Adjuk meg az 1. feladatban szereplő háromszög középvonal-háromszögének súlypontját!
4. Az 1. feladatban szereplő háromszög AB oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja H_b, BC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja H_c, és CA oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja H_a. Adjuk meg a $H_a\,H_b\,H_c$ háromszög súlypontjának koordinátáit!
5. Az $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$, $C(3;4)$ és $D(0;4)$ pontok ebben a sorrendben egy négyszög csúcsai. Milyen négyszöget határoznak meg e négyszög oldalainak felezőpontjai?

6. Az $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$, $C(3;4)$, $D(0;4)$ és $E\left(-\frac{3}{2};2\right)$ pontok ebben a sorrendben egy ötszög csúcsai. Az *AB*, *BC*, *CD*, *DE* oldalak felezőpontjai rendre *M*, *N*, *P* és *Q*. Az *MP* és *NQ* szakaszok felezőpontjai *R* és *S*. Adjuk meg az $\overrightarrow{RS}$ és $\overrightarrow{EA}$ vektorok koordinátáit!

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 316. és 317. feladatok

2. A sík egyeneseinek koordináta-geometriai jellemzése

Az előzőekben sikerült a koordináta-geometria nyelvére átültetni a pontok és azok egymáshoz viszonyított helyzetének jellemzését. A geometria második alapfogalma az **egyenes**, így természetes a továbblépésünk iránya.

Először vegyük számba, hogy milyen módon lehet megadni egy egyenest a koordinátasíkon! Az nyilvánvaló, hogy meg kell adni legalább egy olyan pontot, amely illeszkedik az egyenesre. Legyen ez $P_0(x_0;y_0)$! (Pontot a síkon koordinátáival adunk meg.)

Egy pontra végtelen sok egyenes illeszkedik a síkban, egyértelművé kell tenni a megadást. Tehetjük azt, hogy megadunk

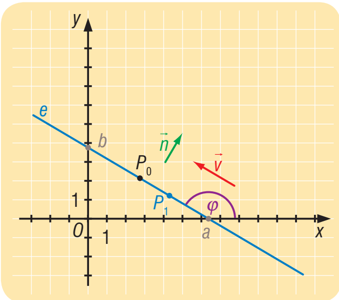
a) még egy pontot, amely illeszkedik az egyenesre, $P_1(x_1;y_1)$;

b) egy vektort (nem nullvektor), amely párhuzamos az egyenessel: **irányvektor**, $\vec{v}(v_1;v_2)$; (Vektort a síkon koordinátáival adunk meg.);

c) egy vektort (nem nullvektor), amely merőleges az egyenesre: **normálvektor**, $\vec{n}(A;B)$;

d) egy $\varphi \in [0,\pi[$ szöget, amelyet az egyenes bezár az *x* tengely pozitív irányával: **irányszög**;

e) az $m = \operatorname{tg}\varphi$ számot, ha $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$: **iránytangens** vagy **meredekség**.



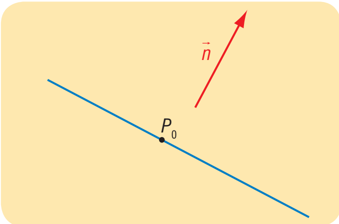
2.1. ábra Az egyenes megadási módjai

Ezeken kívül megadhatjuk az egyenes *x* és *y* tengellyel való metszéspontjainak első, illetve második koordinátáit, a **tengelymetszeteket** (*a*,*b*). A 2.1. ábrán szemléltetjük az eddigieket.

Az egyenes koordináta-geometriai jellemzésekor a gondot az okozza, hogy a pontjainak koordinátáit nem tudjuk felsorolni, hiszen az egyenes nem véges ponthalmaz. Az a lehetőség marad, hogy **olyan egyenletet keresünk, amelynek megoldásai azoknak és csak azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a koordinátapárjai, amelyek illeszkednek az egyenesre**.

Az összes ilyen pontra, és csak azokra igaz, hogy $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$. Tudjuk, hogy két nem nullvektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, így az egyenes pontjaira, és csak azokra igaz, hogy $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$. A skaláris szorzatot koordinátákkal felírva kapjuk, hogy:

$$(x-x_0)A+(y-y_0)B=0.$$



2.2. ábra Egyenes és normálvektora

Algebrai átalakításokat végezve az alábbi kétismeretlenes, elsőfokú egyenlethez jutunk:

Tétel $$Ax + By = Ax_0 + By_0.$$
Ez az **adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú** egyenes egyenlete.

1. példa Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg az általuk meghatározott háromszög
a) oldalfelező merőlegeseinek egyenletét;
b) magasságegyeneseinek egyenletét!

Megoldás:
a) Az oldalfelező merőlegesek egyenletének felírásakor az adott pont lehet az oldalak felezőpontja, normálvektorként pedig az oldalvektorok szolgálhatnak.

- Az AB szakasz felezőpontja: $F_c\left(\frac{-3+6}{2};\frac{-1-2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$, az f_c normálvektora:

  $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(6+3;-2+1)=(9;-1)$, egyenlete: $9x-y=\frac{27}{2}+\frac{3}{2}$, azaz $9x-y=15$.

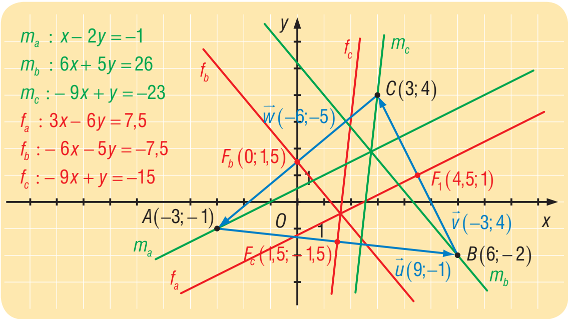
- A BC szakasz felezőpontja: $F_1\left(\frac{3+6}{2};\frac{4-2}{2}\right)=\left(\frac{9}{2};1\right)$, az f_a normálvektora:

  $\vec{v}=\overrightarrow{BC}(3-6;-4+2)=(-3;6)$, egyenlete: $-3x+6y=-\frac{27}{2}+6$, azaz $-3x+6y=-\frac{15}{2}$.

- Az AC szakasz felezőpontja: $F_b\left(\frac{-3+3}{2};\frac{-1+4}{2}\right)=\left(0;\frac{3}{2}\right)$, az f_b normálvektora:

  $\vec{w}=\overrightarrow{CA}(-3-3;-1-4)=(-6;-5)$, egyenlete: $-6x-5y=0-\frac{15}{2}$, azaz $6x+5y=\frac{15}{2}$.

b) A magasságegyenesek egyenletének megadásakor az adott pont a háromszög csúcsa, a normálvektor pedig a szemközti oldal vektora lehet.



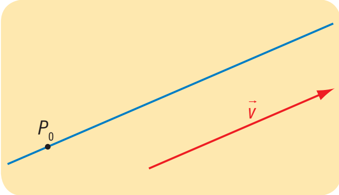
2.3. ábra A 1. példa megoldása

- Az m_c adott pontja $C(3;4)$, normálvektora: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(9;-1)$, egyenlete: $9x-y=27-4$, azaz $-9x+y=-23$.
- Az m_a adott pontja $A(-3;-1)$, normálvektora: $\vec{v}=\overrightarrow{BC}(-3;6)$, egyenlete: $-3x+6y=9-6$, azaz $x-2y=-1$.
- Az m_b adott pontja $B(6;-2)$, normálvektora: $\vec{w}=\overrightarrow{CA}(-6;-5)$, egyenlete: $-6x-5y=-36+10$, azaz $6x+5y=26$.

Az egyenletek felírása után az eredményeket a 2.3. ábrán ellenőrizhetjük.

Mielőtt továbblépnénk, gondolkodjunk el azon, hogy egy egyenesnek végtelen sok normálvektora van! Ezek szerint különböző normálvektorok alkalmazása esetében különböző egyenletet kapunk?

A válasz egyszerű. A normálvektorok párhuzamosak egymással, ezért egymásnak konstansszorosai. Ha egy egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk, a megoldáshalmaza nem változik. Így az egyenes egyenlete egyértelműen meghatározott.



2.4. ábra Egyenes és irányvektora

Ha a $P_0(x_0;y_0)$ pontra illeszkedő *e* egyenes irányvektora a $\vec{v}(v_1,v_2)$, akkor ennek a vektornak egyik 90°-os elforgatottja az *e* normálvektora lesz, így $\vec{n}(v_2;-v_1)$. Felírva az adott ponton átmenő adott, normálvektorú egyenes egyenletét, kapjuk az alábbi tételt.

Tétel

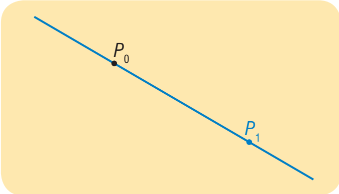
$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0.$$

Ez az **adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú** egyenes egyenlete.

Ha egy *e* egyenes illeszkedik a $P_0(x_0;y_0)$ és a $P_1(x_1;y_1)$ pontokra, akkor a $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}(x_1-x_0;y_1-y_0)$ vektor az irányvektora lesz *e*-nek, hiszen párhuzamos vele. Felírva az előbbiekben kapott egyenletet,

$$(y_1-y_0)x-(x_1-x_0)y=(y_1-y_0)x_0-(x_1-x_0)y_0.$$

Algebrai átalakításokat elvégezve kapjuk a következő tételt.



2.5. ábra Két adott pontra illeszkedő egyenes

Tétel

$$(y_1-y_0)(x-x_0)=(x_1-x_0)(y-y_0).$$

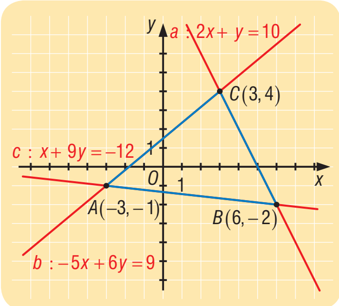
Ez a **két adott pontra illeszkedő** egyenes egyenlete.

2. példa Adott három pont a koordinátáival, $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg az általuk meghatározott háromszög

a) oldalegyeneseinek egyenletét;

b) súlyvonalai egyeneseinek egyenletét;

c) belső szögfelezői egyeneseinek egyenletét!



2.6. ábra A vizsgált háromszög oldalegyenesei

Megoldás:

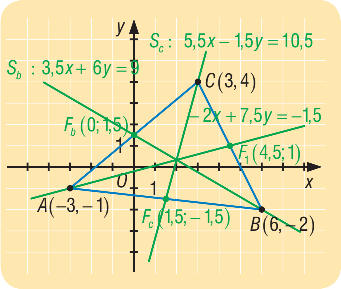
a) Az oldalegyenesek egyenleteinek megadásakor a két adott pont a háromszög csúcsa.

Az *AB* oldalegyenes egyenlete:

$$(-2+1)\cdot(x+3)=(6+3)\cdot(y+1),$$

$$-x-3=9y+9,$$

$$x+9y=-12.$$



2.7. ábra A vizsgált háromszög súlyvonalegyenesei

A *BC* oldalegyenes egyenlete:

$$(-2-4)\cdot(x-3)=(6-3)\cdot(y-4),$$
$$-6x+18=3y-12,$$
$$6x+3y=30,$$
$$2x+y=10.$$

A *CA* oldalegyenes egyenlete:

$$(-1-4)\cdot(x-3)=(-3-3)\cdot(y-4),$$
$$-5x+15=-6y+24,$$
$$-5x+6y=9.$$

b) A súlyvonalegyenesek egyenleteinek megadásakor a két adott pont a háromszög egyik csúcsa és a szemközti oldal felezőpontja. (Az oldalak felezőpontjait az 1. fejezet 2. példájának megoldásakor már megadtuk.)

Az *A*-ra illeszkedő súlyvonal egyenletének meghatározása: a *BC* oldal felezőpontja $F_a\left(\frac{9}{2};1\right)$, a keresett egyenes az AF_a egyenes:

$$(1+1)\cdot(x+3)=\left(\frac{9}{2}+3\right)\cdot(y+1),$$
$$2x+6=\frac{15}{2}y+\frac{15}{2},$$
$$-2x+7{,}5y=-1{,}5.$$

A *B*-re illeszkedő súlyvonal egyenletének meghatározása: az *AC* oldal felezőpontja $F_b\left(0;\frac{3}{2}\right)$, a keresett egyenes a BF_b egyenes:

$$\left(\frac{3}{2}+2\right)\cdot(x-6)=(0-6)\cdot(y+2),$$
$$\frac{7}{2}x-21=-6y-12,$$
$$\frac{7}{2}x+6y=9.$$

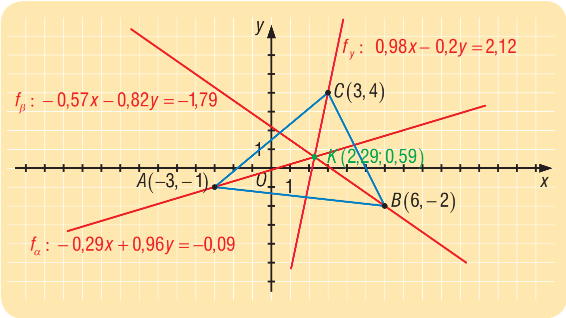
A *C*-re illeszkedő súlyvonal egyenletének meghatározása: az *AB* oldal felezőpontja $F_c\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$, a keresett egyenes a CF_c egyenes: (3,4)

$$\left(-\frac{3}{2}-4\right)\cdot(x-3)=\left(\frac{3}{2}-3\right)\cdot(y-4),$$
$$-\frac{11}{2}x+\frac{33}{2}=-\frac{3}{2}y+6,$$
$$\frac{11}{2}x-\frac{3}{2}y=\frac{21}{2}.$$

A belső szögfelező egyenesek egyenleteinek megadásakor az egyik adott pont a háromszög egyik csúcsa, a másik adott pont pedig a beírt körének középpontja. (A beírt kör középpontját az 1. fejezet 2. példájában már kiszámoltuk, koordinátáinak közelítő értéke $K(2{,}29;0{,}59)$.)

$$f_\alpha : (0{,}59+1)\cdot(x+3) = (2{,}29+3)\cdot(y+1),$$
$$f_\beta : (0{,}59+2)\cdot(x-6) = (2{,}29-6)\cdot(y+2),$$
$$f_\gamma : (0{,}59-4)\cdot(x-3) = (2{,}29-3)\cdot(y-4).$$

A számolások eredményét ellenőrizzük a 2.8. ábrán!

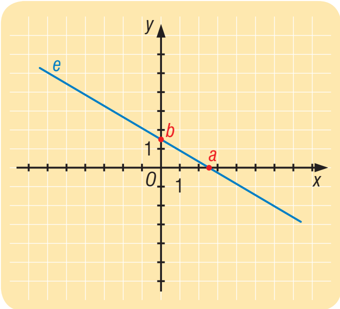


2.8. ábra A vizsgált háromszög belső szögfelező egyenesei

Az e egyenes messe az x tengelyt a $P_0(a;0)$ pontban, az y tengelyt pedig a $P_1(0;b)$ pontban! Alkalmazzuk a két adott pontra illeszkedő egyenes egyenletét!

$$(b-0)\cdot(x-a) = (0-a)\cdot(y-0),$$
$$bx - ab = -ay,$$
$$bx + ay = ab.$$

Ha sem a, sem b nem nulla, akkor az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk az ab szorzattal, és így adódik a következő összefüggés.



2.9. ábra Az egyenes tengelymetszetei

Tétel

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ez az egyenes **tengelymetszetes** egyenlete.

Térjünk most vissza az irányvektoros egyenlethez!

$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$. Ha v_1 nem nulla, azaz az egyenes nem merőleges az x tengelyre, akkor az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk v_1-gyel. Ekkor azt kapjuk, hogy $\frac{v_2}{v_1}x - y = \frac{v_2}{v_1}x_0 - y_0$. A trigonometriában tanultak szerint $\frac{v_2}{v_1}$ hányados az egyenes irányszögének tangense, amit korábban az egyenes meredekségének (m) neveztünk el. Ezt felhasználva a következő egyenletet kapjuk:

Tétel

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Ez az **adott pontra illeszkedő, adott meredekségű** egyenes egyenlete.

Ha az m meredekségű egyenes a $P_0(0;b)$ pontban metszi az y tengelyt, akkor az általános iskolából jól ismert egyenes egyenletéhez jutunk: $y = mx + b$. Már ott megmutattuk, hogy ez a lineáris függvény grafikonjának egyenlete, és módszert is tanultunk az ilyen függvény ábrázolására.

Az eddigiekben megmutattuk, hogy minden egyenes egyenlete egy elsőfokú, kétismeretlenes egyenlet. Joggal vetődik fel az a kérdés, hogy minden elsőfokú, kétismeretlenes egyenlet egy egyenes egyenlete-e.

Egy elsőfokú, kétismeretlenes egyenlet általános alakja: $ax+by=c$, ahol a két ismeretlen (x és y) együtthatója egyszerre nem nulla $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$.

Ha $a\neq 0$, akkor az egyenlet a $P_0\left(\frac{c}{a};0\right)$ pontra illeszkedő $\vec{n}(a;b)$ normálvektorú egyenes egyenlete.

Ha $b\neq 0$, akkor az egyenlet a $P_0\left(0;\frac{c}{b}\right)$ pontra illeszkedő $\vec{n}(a;b)$ normálvektorú egyenes egyenlete.

Ezzel beláttuk a következő tételt.

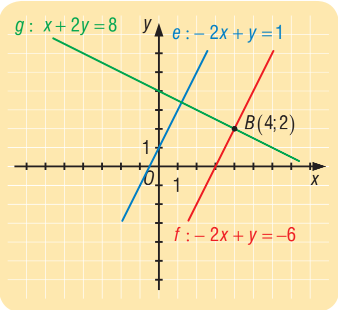
Tétel Minden elsőfokú, kétismeretlenes egyenlet egy egyenes egyenlete.

3. példa Adott egy pont a koordinátáival: $B(4;2)$ és egy e egyenes az egyenletével: $-2x+y=1$.

a) Döntsük el, hogy a pont illeszkedik-e az egyenesre!

b) Adjuk meg az adott pontra illeszkedő, az adott egyenessel párhuzamos f egyenes egyenletét!

c) Adjuk meg az adott pontra illeszkedő, az adott egyenesre merőleges g egyenes egyenletét!



2.10. ábra A 3. példa ábrája

Megoldás:

a) Ha a $B\in e$, akkor a koordinátapárja megoldása az egyenes egyenletének. Behelyettesítve az e egyenletébe, az x helyére 4-et, az y helyére 2-t, hamis állítást kapunk, így $B\notin e$.

b) Legyen $B\in f$ és $f\parallel e$! Ekkor e és f normálvektorra egyenlő, $\vec{n}(2,-1)$, így az f egyenlete:

$$2x-y=2\cdot 4-2,$$
$$2x-y=6,$$
$$\text{vagy: } -2x+y=-6.$$

c) Legyen $B\in g$ és $g\perp e$! Ekkor a g normálvektora az e normálvektorának 90°-os elforgatottja, $\vec{n_1}(1;2)$, így a g egyenlete:

$$x+2y=1\cdot 4+2\cdot 2,$$
$$x+2y=8.$$

4. példa Adjuk meg az alábbi, egyenleteikkel adott egyenesek hajlásszögét!

a) $e:\ 2x-y=-1 \quad g:\ 19x+13y=32.$

b) $e:\ 2x-y=-1 \quad f:\ 2x+4y=16.$

c) $e:\ 2x-y=-1 \quad h:\ 4x-y=11.$

Megoldás:

Vizsgáljuk először az egyenesek normálvektorainak hajlásszögét, majd abból következtessünk az egyenesek hajlásszögére!

$$\vec{n_e}(2;-1),\quad \vec{n_g}(19;13),\quad \vec{n_f}(2;4),\quad \vec{n_h}(4;-1).$$

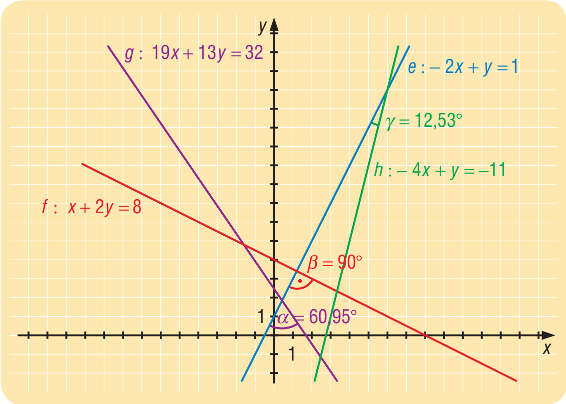
a) $$\cos\alpha' = \frac{2\cdot 19+(-1)13}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{19^2+13^2}} = \frac{25}{\sqrt{5}\sqrt{530}} = \frac{5}{\sqrt{106}} = \frac{5\sqrt{106}}{106} \approx 0,4856 \Rightarrow \alpha' \approx 60,95°.$$

Tekintettel arra, hogy a kapott szög hegyesszög, a két egyenes hajlásszöge is az. (Ha α'-re tompaszöget kaptunk volna, akkor a kapott értéket ki kellett volna vonni a 180°-ból, mivel két egyenes hajlásszöge – definíció szerint – nem lehet nagyobb a derékszögnél.)

b) $\vec{n_e}\vec{n_f} = 2\cdot 2 - 1\cdot 4 = 0,$ két egyenes hajlásszöge $\beta = 90°$-os, tehát merőlegesek egymásra.

c) $$\cos\gamma' = \frac{2\cdot 4+(-1)(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+1^2}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{5}\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{9\sqrt{85}}{85} \approx 0,9762 \Rightarrow \gamma' \approx 12,53°,\ \text{így}\ \gamma \approx 12,53°.$$



2.11. ábra A keresett szögek

Láttuk, hogy a hajlásszögek számolása elég hosszadalmas munka. Jó lenne, ha az egyenesek egymáshoz viszonyított helyzetére – legalább speciális esetekben – az egyenletük ismeretében tudnánk következtetni.

Adott két egyenes az egyenletével.

$$e_1: a_1x+b_1y=c_1,$$
$$e_2: a_2x+b_2y=c_2.$$

Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy a **két egyenes párhuzamos**!

Az $e_1 \parallel e_2$ akkor és csak akkor teljesül, ha normálvektoraik párhuzamosak, $\vec{n_1}(a_1;b_1) \parallel \vec{n_2}(a_2;b_2)$.

Ez ekvivalens azzal, hogy van olyan c valós szám, amelyre $c\vec{n_1} = \vec{n_2}$. Koordinátákkal kifejezve:

$$ca_1 = a_2,$$
$$cb_1 = b_2.$$

Ha $a_1 \neq 0$ és $b_1 \neq 0,$ akkor kapjuk, hogy $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1},$ amely a keresett feltétel.

A kapott feltétel a $b_2 \neq 0$ és $b_1 \neq 0$ esetben $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1},$ ami azt jelenti, hogy a két egyenes **meredeksége egyenlő.**

Adott két egyenes az egyenletével.

$$e_1: a_1x+b_1y=c_1,$$
$$e_2: a_2x+b_2y=c_2.$$

Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy a **két egyenes merőleges**!

MatEm_Book.indb 99 2012.07.05. 11:56:04

Az $e_1 \perp e_2$ akkor és csak akkor teljesül, ha normálvektoraik merőlegesek. $\vec{n_1}(a_1;b_1) \perp \vec{n_2}(a_2;b_2)$. Ez ekvivalens azzal, hogy normálvektoraik skaláris szorzata 0, azaz $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$. Koordinátákkal felírva ezt a skaláris szorzatot kapjuk, hogy $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$, ami a keresett feltétel.
Alakítsuk át a kapott eredményünket, ha $b_2 \neq 0$ és $b_1 \neq 0$!

$$1 + \frac{a_1a_2}{b_1b_2} = 0,$$

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1.$$

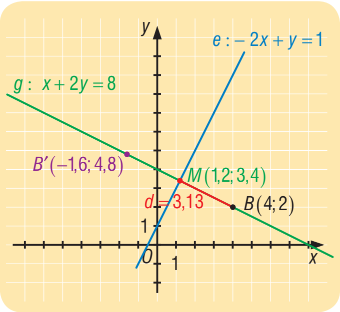
Kijelenthetjük a következő tételt.

Tétel A koordinátatengelyekkel nem párhuzamos két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha az egyenesek meredekségeinek szorzata –1.

Ha két egyenes nem párhuzamos a síkban, akkor metszik egymást. Elvárható, hogy az egyenleteivel megadott két egyenes metszéspontjának koordinátáit is ki tudjuk számolni. Van erre mód?

Mindkét egyenes egyenlete olyan kétismeretlenes, elsőfokú egyenlet, melyeknek megoldásai azoknak és csak azoknak a pontoknak a koordinátapárjai, amelyek az egyenesre illeszkednek. A metszéspont mindkét egyenesre illeszkedik, tehát a koordinátapárja megoldása mindkét egyenes egyenletének, azaz az egyenletükből alkotott egyenletrendszernek is. Így a metszéspont keresése a koordináta-geometriában egyenletrendszer megoldását jelenti.

5. példa Adott egy pont a koordinátáival: $B(4;2)$ és egy e egyenes az egyenletével: $2x - y = -1$. (Azt már láttuk a 3. példában, hogy $B \notin e$.)
a) Adjuk meg a B pont és az e egyenes távolságát!
b) Adjuk meg a B pont e egyenesre vonatkozó tükörképének koordinátáit!



2.12. ábra 5. példa ábrája

Megoldás:
a) Elemi geometriából már tudjuk, hogy pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza. Először adjuk meg a B pontra illeszkedő e-re merőleges g egyenes egyenletét! g: $x + 2y = 8$ (lásd 3. példa).
Keressük az e és g metszéspontját, azaz megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$x + 2y = 8,$$
$$2x - y = -1.$$

A metszéspont $M(1,2;3,4)$. A B és e távolsága a BM szakasz hossza.

$$BM = \sqrt{(4-1,2)^2 + (2-3,4)^2} \approx 3,13.$$

b) Legyen a keresett tükörkép $B'(b_1';b_2')$ a B M-re vonatkozó tükörképe! A felezőpont koordinátáiról tanultak szerint:

$$1{,}2=\frac{b_1'+4}{2},$$

$$3{,}4=\frac{b_2'+2}{2}.$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $B'(-1{,}6;4{,}8)$.

Pont és egyenes távolságát általánosan is kiszámolhatnánk. Lényegében azt az utat kellene követni, amelyet az 5. példa a) részében jártunk be. A számolást itt nem részletezzük, csak a viszonylag könnyen megjegyezhető, gyakran haszonnal alkalmazható eredményt adjuk közre.

Ha adott egy *e* egyenes az egyenletével: $ax+by=c$, és egy pont $P_0(x_0;y_0)$, akkor kimondható az alábbi tétel.

Tétel

$$d(P_0,e)=\frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6. példa Adott két egyenes az egyenletével: e: $2x-y=-1$ és f: $-4x+2y=-12$.

a) Adjuk meg a kölcsönös helyzetüket!

b) Számítsuk ki a távolságukat!

Megoldás:

a) A két egyenes párhuzamos, hiszen teljesül rájuk a párhuzamosság korábban tárgyalt feltétele:

$$\frac{-4}{2}=\frac{2}{-1}.$$

b) Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes tetszőleges pontjának a másik egyenestől való távolsága. Az 5. példában szereplő $B(4;2)$ pont illeszkedik az *f*-re, és annak az *e*-től való távolságát már kiszámoltuk, így

$$d(e,f)=\frac{|2\cdot 4-2+1|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}\approx 3{,}13.$$

A következő példa talán meglepőnek hat egy koordináta-geometriával foglalkozó fejezetben, de a vázolt megoldás valószínűleg magyarázatot ad a példaválasztásra.

7. példa Adjuk meg a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x)=\sqrt{5x^2-2x+1}+\sqrt{5x^2-12x+17}$$

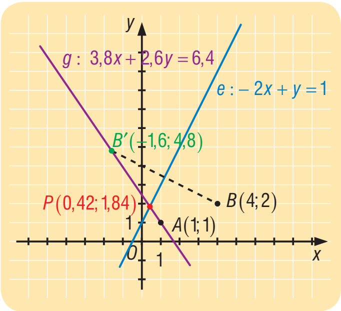
hozzárendelési szabállyal megadott *f* függvény minimumhelyét!

2.13. ábra Meglepetés

Megoldás:

Végezzünk algebrai átalakításokat!

$$\sqrt{5x^2-2x+1}=\sqrt{x^2-2x+1+4x^2}=\sqrt{(x-1)^2+\left[(2x+1)-1\right]^2},$$
$$\sqrt{5x^2-12x+17}=\sqrt{x^2-8x+16+4x^2-4x+1}=\sqrt{(x-4)^2+\left[(2x+1)-2\right]^2}.$$



2.14. ábra A megoldás ábrája

A kapott eredmény eszünkbe juttathatja a két pont távolságára vonatkozó összefüggést. Legyen $A(1;1)$, $B(4;2)$ és $P(x;2x+1)$! Ez azt jelenti, hogy $P\in e$, ahol az e egyenlete: $y=2x+1$ vagy $2x-y=-1$. A probléma a geometria nyelvére átfogalmazva így szól: az e egyenesen keressük azt a P pontot, melyre a $PA+PB$ távolságösszeg minimális. Ez az elemi geometria egyik 9. osztályban tárgyalt alapfeladata, amelynek egy lehetséges megoldása a következő:
Tükrözzük a B pontot az e egyenesre! Kössük össze a tükörképpontot A-val! Az összekötő egyenes és az e metszéspontja lesz a keresett P pont.
Most ezt a megoldást kell „koordináta-geometriásítani". A B e-re vonatkozó B' tükörképének koordinátáit az 5. példában már megadtuk.
A 2.14. ábrán látható g egyenes két pontja ismert, így az egyenlete:

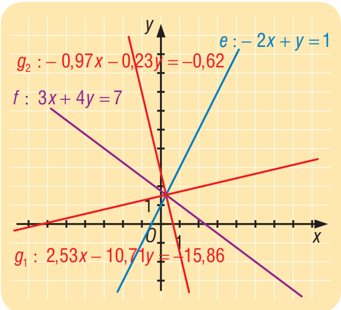
$$(4,8-1)\cdot(x-1)=(-1,6-1)\cdot(y-1),$$
$$3,8(x-1)=-2,6(y-1),$$
$$3,8x+2,6y=6,4,$$
$$19x+13y=32,$$

a 2.14. ábrán: $3,8x+2,6y=6,4$.
A P koordinátáinak megadásához meg kell oldani a következő egyenletrendszert:

$$19x+13y=32,$$
$$2x-y=-1.$$

A megoldás alapján: $P\left(\frac{19}{45};\frac{83}{45}\right)$, azaz a vizsgált függvény minimumhelye: $x_\mathrm{m}=\frac{19}{45}$.

8. példa Adott két egyenes az egyenletével: e: $2x-y=-1$ és f: $3x+4y=7$. Adjuk meg az általuk meghatározott szögek felezőegyeneseinek egyenletét!



2.15. ábra Az egyenesek és a szögfelezők

Megoldás:
Tudjuk az elemi geometriából, hogy két egymást metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkjukban az általuk meghatározott szögeket felező egyenespár. Felhasználva a korábban tárgyalt, pont és egyenes távolságára vonatkozó képletet, azt kapjuk, hogy a szögfelező egyenespár egyenlete:

$$g_{1;2}:\ \frac{|2x-y+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3x+4y-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}.$$

Az abszolút érték miatt két egyenesegyenletet kapunk. Az egyik:

$$2\sqrt{5}x-\sqrt{5}y+\sqrt{5}=3x+4y-7,$$
$$\left(2\sqrt{5}-3\right)x-\left(4+\sqrt{5}\right)y=-\left(7+\sqrt{5}\right).$$

Közelítő értékekkel: $1,47x - 6,24y = -9,24$.
A másik:

$$2\sqrt{5}x - \sqrt{5}y + \sqrt{5} = -3x - 4y + 7,$$

$$\left(2\sqrt{5} + 3\right)x + \left(4 - \sqrt{5}\right)y = 7 - \sqrt{5}.$$

Közelítő értékekkel: $7,47x - 1,76y = 4,76$.

Oldjuk meg!

1. Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg az általuk meghatározott háromszög
a) magasságpontjának koordinátáit;
b) köré írt kör középpontjának koordinátáit;
c) súlypontjának távolságát a köré írt kör középpontjára és a magasságpontra illeszkedő egyenestől!

2. Milyen arányban osztja az 1. feladatban szereplő háromszög súlypontja a magasságpont és a köré írt kör középpontja közé eső szakaszt?

3. Az 1. feladatban szereplő háromszög magasságpontját tükrözzük az oldalegyenesekre! Milyen távol vannak az egyes tükörképpontok a köré írt kör középpontjától?

4. Az 1. feladatban szereplő háromszög magasságpontját tükrözzük az oldalak felezőpontjaira! Adjuk meg az egyes tükörképpontok és a szemközti csúcsok által meghatározott szakaszok felezőpontjait!

5. Adott egy t egyenes az egyenletével: $x + 2y = 3$ és két pont: $A\left(1;-2\right)$ és $P\left(6;0\right)$.
a) Döntsük el, hogy a t elválasztja-e A-t és P-t!
b) Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik végpontja A, az ezzel szemközti szár egyenesének egy pontja P, szimmetriatengelye t. Adjuk meg a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit!

6. Adjuk meg a következő hozzárendelési szabállyal megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvény maximumhelyét!

$$f(x) = \left|\sqrt{\frac{5}{4}x^2 - \frac{27}{2}x + \frac{153}{4}} - \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{53}{4}}\right|$$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 332., 343., 349., 350., 353. és 354. feladatok

3. A kör koordináta-geometriai jellemzése

A szintetikus geometriai tanulmányainkból ismertek az euklideszi szerkesztésben alkalmazható lépések:
1. egy pont kijelölése a síkon;
2. két adott pontra illeszkedő egyenes megadása;
3. két adott egyenes metszéspontjának megadása;
4. adott középpontú, adott ponton átmenő kör megadása;
5. adott egyenes és kör metszéspontjainak megadása;
6. két kör közös pontjainak megadása.

3.1. ábra A szerkesztés eszközei

Látható, hogy az eddigi analitikus geometriai tanulmányaink során az első három lépést már „koordináta-geometriásítottuk”. Ahhoz, hogy a további lépésekkel is ez történhessen, feltétlenül szükséges az itt következő témakör tárgyalása.

A kilencedikes tanulmányainkból már ismert, hogy a kör (körvonal) azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek egy adott ponttól ($O(u;v)$ – középpont) mért távolságuk állandó (r – sugár).

Tekintettel arra, hogy ez a ponthalmaz nem véges, itt sincs más lehetőségünk a jellemzésére, mint ami az egyenesek jellemzésekor állt a rendelkezésünkre: olyan egyenletet keresünk, amelynek megoldásai azoknak és csak azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a koordinátapárjai, amelyek illeszkednek a körre.

Nyilvánvaló, hogy a kör minden pontjára, és csak a kör pontjaira igaz, hogy $OP=r$. A két pont távolságára felírva a megismert összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}=r.$$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét (nemnegatív) oldalát!

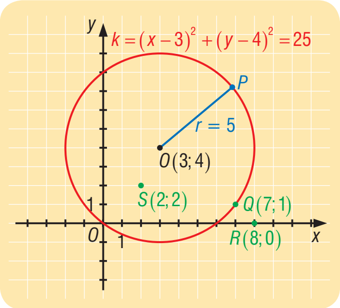
Tétel $$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2.$$

Ez az adott középpontú, adott sugarú kör egyenlete.

1. példa Egy kör középpontja $O(3;4)$, sugara $r=5$.

a) Adjuk meg a kör egyenletét!

b) Döntsük el, hogy hol helyezkednek el a körhöz viszonyítva a $Q(7;1)$, $R(8;0)$ és $S(2;2)$ pontok!



3.2. ábra Az 1. példa ábrája

Megoldás:

a) A kör egyenlete: $k:(x-3)^2+(y-4)^2=25.$

b) Helyettesítsük a kör egyenletének bal oldalába a pontok koordinátáit!

$Q:(7-3)^2+(1-4)^2=25 \Rightarrow Q\in k.$

$R:(8-3)^2+(0-4)^2=41>25 \Rightarrow R$ külső pont.

$S:(2-3)^2+(2-4)^2=5<25 \Rightarrow S$ belső pont.

2. példa Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg az általuk meghatározott háromszög

a) körülírt körének egyenletét;

b) beírt körének egyenletét!

Megoldás:

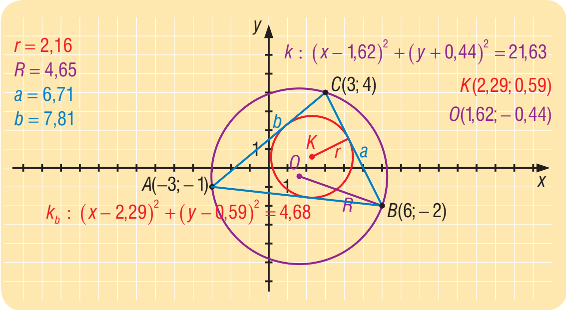
a) A háromszög köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Egy korábbi példában már meghatároztuk az oldalfelező merőlegesek egyenletét. Ezek közül kettő:

$$f_a: x-2y=\frac{5}{2},$$

$$f_b: 6x+5y=\frac{15}{2}.$$

A fenti két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása adja a háromszög köré írt kör középpontjának koordinátáit: $O\left(\frac{55}{34};-\frac{15}{34}\right)$. A körülírt kör sugarát ugyancsak meghatároztuk: $R\approx 4,65$. Innen már megadható a keresett kör egyenlete: $\left(x-\frac{55}{34}\right)^2+\left(y+\frac{15}{34}\right)^2=21,63$.

b) A beírt kör középpontját már korábban meghatároztuk $K\left(2,29;0,59\right)$, a beírt kör sugarát is kiszámoltuk $r\approx 2,16$. Minden adat rendelkezésre áll ahhoz, hogy felírjuk a beírt kör egyenletét: $\left(x-2,29\right)^2+\left(y-0,59\right)^2=4,67$.



3.3. ábra A 2. példa ábrája

Az előzőekben megmutattuk, hogy a kör egyenlete kétismeretlenes, másodfokú egyenlet. Csakúgy, mint az egyenes tárgyalása közben, joggal vetődik fel az a kérdés, hogy bármely kétismeretlenes, másodfokú egyenlet kör egyenlete-e.

Egy kétismeretlenes, másodfokú egyenlet általános alakja: $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$.

Ahhoz, hogy ez kör egyenlete legyen, szükséges feltétel az, hogy $\left(x-u\right)^2+\left(y-v\right)^2=r^2$ alakra hozható legyen. Ehhez viszont két feltételnek kell teljesülnie:

a) $a=b\neq 0$,
b) $c=0$. (1)

Azt kaptuk, hogy csak a következő alakú, kétismeretlenes, másodfokú egyenlet lehet kör egyenlete: $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0, (a\neq 0)$. Kérdés, hogy ez elégséges feltétel-e, azaz minden ilyen alakú egyenlet kör egyenlete-e.

Végezzünk ekvivalens átalakításokat az egyenleten!

$$ax^2+ay^2+bx+cy+d=0,\ \ (a\neq 0)$$

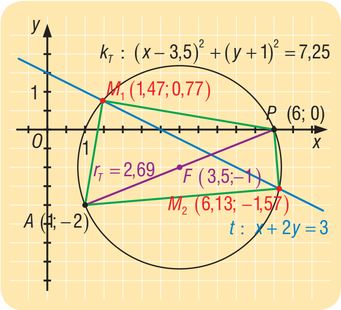
$$x^2+y^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}y+\frac{d}{a}=0,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c^2}{4a^2}-\frac{d}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2=\frac{b^2+c^2-4ad}{4a^2}.$$

Az (1) feltétel nem elégséges, hiszen a kapott egyenlet csak akkor kör egyenlete, ha b^2+c^2-4ad pozitív. Ebben az esetben a kör középpontja $O\left(-\frac{b}{2a};-\frac{c}{2a}\right)$, sugara pedig $r=\frac{\sqrt{b^2+c^2-4ad}}{2|a|}$.

3. példa Adott egy t egyenes az egyenletével: $x+2y=3$ és két pont: $A(1;-2)$ és $P(6;0)$. Adjuk meg a t egyenesen azokat a pontokat, melyekből az AP szakasz derékszögben látszik!



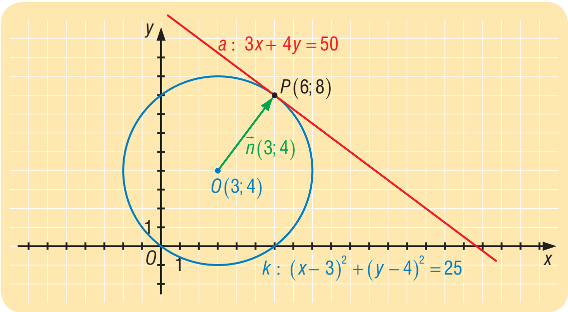
3.4. ábra A 3. példa ábrája

Megoldás:
A Thalész-tétel szerint azon pontok halmaza a síkon, melyekből egy szakasz derékszög alatt látszik, a szakasz mint átmérő fölé rajzolt kör, a szakasz végpontjainak kivételével. Ebből következően a keresett pontok az AP szakasz Thalész-körének és a t egyenesnek a közös pontjai, így koordinátapárjaik a Thalész-kör és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai.
A Thalész-kör középpontja az AP szakasz felezőpontja $F\left(\frac{7}{2};-1\right)$, sugara $r_T=AF=\sqrt{7,25}$, egyenlete pedig:
$k_T:\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{29}{4}$. A keresett metszéspontok:
$M_1\left(\frac{19-2\sqrt{34}}{5};\frac{-2+\sqrt{34}}{5}\right)$ és $M_2\left(\frac{19+2\sqrt{34}}{5};\frac{-2-\sqrt{34}}{5}\right)$, a közelítő értékek az ábráról leolvashatók.

Az előző példában szereplő körnek és egyenesnek két közös pontja van, az egyenes metszi a kört. Milyen egyéb eset fordulhat elő?

Ha az egyenes érinti a kört, akkor az egyenleteikből álló egyenletrendszernek egy megoldása van. Ha az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja, akkor az említett egyenletrendszernek nincs megoldása.

4. példa Adott egy kör az egyenletével: $k:(x-3)^2+(y-4)^2=25$, és egy pont: $P(6;8)$.
a) Adjuk meg a kölcsönös helyzetüket!
b) Adjuk meg a kör P-re illeszkedő érintőinek egyenletét!



3.5. ábra A kör és P-beli érintője

Megoldás:
a) $P\in k$. (P koordinátapárja megoldása a kör egyenletének.)
b) Az a) eredményéből következően a körnek csak egy P-re illeszkedő érintője van.
A kör egyenletéből megállapítható a kör középpontja: $O(3;4)$.
Az elemi geometriából tudjuk, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott

sugárra, így az $\overrightarrow{OP}(3;4)$ vektor a keresett érintő normálvektora, míg a P annak egy adott pontja. Ebből következően az érintő egyenlete:

$$3x+4y=3\cdot 6+4\cdot 8,$$
$$3x+4y=50.$$

5. példa Adott egy kör: $k:(x-3)^2+(y-4)^2=25$, és egy pont: $P(10;2)$.

a) Adjuk meg a kölcsönös helyzetüket!
b) Adjuk meg a kör P-re illeszkedő érintőinek egyenletét!

I. megoldás:

a) A kör középpontja: $O(3;4)$, a sugara: $r=5$. Az OP távolság:

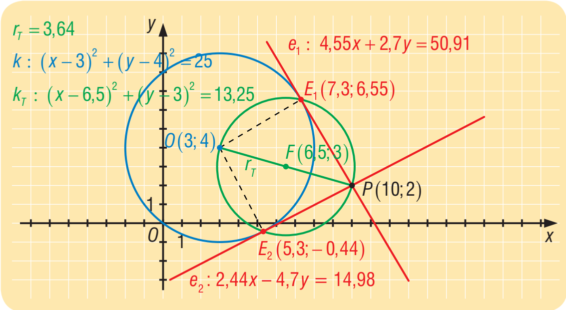
$$\sqrt{(10-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{53}.$$

Mivel $OP>r$, P a kör külső pontja.

b) Az a) eredményéből következően a körnek két P-re illeszkedő érintője van.

A kör egyenletéből megállapítható a kör középpontja: $O(3;4)$.

Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így az E_1, E_2 érintési pontok a k és az OP szakasz Thalész-körének közös pontjai.



3.6. ábra Külső pontból körhöz húzott érintők

Meg kell tehát oldani az e körök egyenleteiből álló egyenletrendszert.

Az OP szakasz felezőpontja, amely a Thalész-kör középpontja: $F\left(\frac{13}{2};3\right)$. A Thalész-kör sugara $r_T=OF=\frac{\sqrt{53}}{2}$, egyenlete $k_T:\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{53}{4}$.

Végezzük el a négyzetre emeléseket és összevonásokat az egyenletrendszer egyenleteiben!

$$x^2+y^2-6x-8y=0,$$
$$x^2+y^2-13x-6y=-38.$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet!

$$7x-2y=38.$$

Fejezzük ki az y-t!

$$y=\frac{7x-38}{2}.$$

A kapott kifejezést behelyettesítve az első egyenletbe, egy egyismeretlenes, másodfokú egyenletet kapunk.

$$53x^2-668x+2052=0.$$

Ennek megoldásai:

$x_1=\frac{334+20\sqrt{7}}{53}$, $x_2=\frac{334-20\sqrt{7}}{53}$. Visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$y_1 = \frac{162+70\sqrt{7}}{53}$, $y_2 = \frac{162-70\sqrt{7}}{53}$. (A közelítő értékek az ábráról leolvashatók.)

Az érintők egyenletei két adott ponton átmenő egyenesek egyenletéből adódnak:

$$e_1: \left(\frac{162+70\sqrt{7}}{53}-2\right)\cdot(x-10) = \left(\frac{334+20\sqrt{7}}{53}-10\right)\cdot(y-2),$$

$$e_2: \left(\frac{162-70\sqrt{7}}{53}-2\right)\cdot(x-10) = \left(\frac{334-20\sqrt{7}}{53}-10\right)\cdot(y-2).$$

Ez a megoldási mód nem tűnik túl egyszerűnek. Ezért mutatunk még két megoldási módot abban a reményben, hogy a három módszer közül valamelyik meg fog felelni az olvasó igényeinek.

II. megoldás:

A P pontra illeszkedő egyenesek egyenlete (egyetlen kivétellel) ilyen alakba írható:

$$e: y-2 = m(x-10)$$

(adott pontra illeszkedő, adott meredekségű egyenes egyenlete). Az egyetlen kivétel az y tengellyel párhuzamos egyenes, de az biztosan nem érinti a kört.

E sok egyenes közül azokat keressük, amelyeknek egy közös pontjuk van a körrel, azaz az egyenletükből és a kör egyenletéből álló egyenletrendszernek egy megoldása van.

Fejezzük ki az egyenes egyenletéből y-t!

$$y = mx - 10m + 2.$$

Helyettesítsük be a kapott értéket a kör egyenletébe! Egy másodfokú, paraméteres egyenletet kapunk:

$$(x-3)^2 + (mx-10m+2-4)^2 = 25,$$

$$(x-3)^2 + (mx-10m-2)^2 = 25,$$

$$x^2 - 6x + 9 + m^2x^2 + 100m^2 + 4 - 20m^2x - 4mx + 40m = 25,$$

$$(m^2+1)x^2 - 2(10m^2+2m+3)x + 4(25m^2+10m-3) = 0.$$

Akkor lesz az egyenes érintő, ha ennek az egyenletnek egy megoldása van, azaz ha a diszkriminánsa 0.

$$4(10m^2+2m+3)^2 - 16(m^2+1)\cdot(25m^2+10m-3) = 0,$$

$$24m^2 + 28m - 21 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai:

$$m_{1;2} = \frac{-7 \pm 5\sqrt{7}}{12}.$$

Megkaptuk a keresett érintők meredekségeit, innen az egyenletük felírható.

$$e_1: y-2 = \frac{-7+5\sqrt{7}}{12}(x-10),$$

$$e_2: y-2 = \frac{-7-5\sqrt{7}}{12}(x-10).$$

III. megoldás:

Úgy indulunk, mint az előző megoldás esetében. A P pontra illeszkedő egyenesek egyenlete (egyetlen kivétellel) ilyen alakba írható: $e: y-2 = m(x-10)$ (adott pontra illeszkedő, adott meredekségű egyenes egyenlete). Az egyetlen kivétel az y tengellyel párhuzamos egyenes, de az biztosan nem érinti a kört.

Alakítsuk át az egyenesek egyenletét! $e: mx - y = 10m - 2.$ Ezek közül az egyenesek közül azokat keressük, melyeknek az O-tól való távolságuk sugárnyi.

$$d(O,e) = 5,$$

$$\frac{|3m - 4 - 10m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5,$$

$$|7m + 2| = 5\sqrt{m^2 + 1},$$

$$49m^2 + 28m + 4 = 25m^2 + 25,$$

$$24m^2 + 28m - 21 = 0.$$

Látható, hogy az előző megoldásban szereplő másodfokú egyenletre jutottunk.

Az előző példa első megoldásában szereplő két körnek két közös pontja van.

Hány közös pontja lehet két körnek?

Mindkét kör egyenlete másodfokú, kétismeretlenes egyenlet. A metszéspontok kereséséhez az ezekből álló egyenletrendszert kell megoldani, amelynek legfeljebb négy megoldása lehet. Láttuk azonban, hogy a kör egyenlete speciális másodfokú, kétismeretlenes egyenlet. Nincs olyan tagja, amelyben mindkét ismeretlen tényezőként szerepel, a másodfokú tagok együtthatója pedig ugyanaz a 0-tól különböző valós szám. Ebből következően a két egyenlet mindkét oldalát egy-egy jól megválasztott számmal osztva, majd a két egyenletet egymásból kivonva elsőfokú, kétismeretlenes egyenletet kapunk. Ez az egyenlet a két kör hatványvonalának egyenlete. A hatványvonal azon pontok halmaza, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő. A pont körre vonatkozó hatványa a kör középpontjától való távolsága négyzetének és a kör sugara négyzetének különbsége. Az egyik ismeretlent innen kifejezve és behelyettesítve valamelyik kör egyenletébe egyismeretlenes, másodfokú egyenletet kapunk, amelynek legfeljebb két megoldása lehet.

Koordináta-geometriai módszerrel igazoltuk azt az – elemi geometriából már jól ismert – tényt, hogy két különböző körnek legfeljebb két közös pontja lehet.

6. példa Adott két kör az egyenletével:

$$k_1: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25,$$

$$k_2: (x-10)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

a) Adjuk meg kölcsönös helyzetüket!

b) Adjuk meg közös érintőik egyenletét!

Megoldás:

a) A körök középpontjai: $O_1(3;4)$ és $O_2(10;-2)$. Ebből következően a középpontok távolsága:

$$O_1O_2 = \sqrt{(10-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{85}.$$

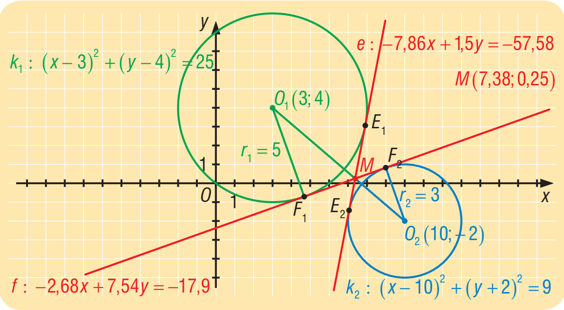
A körök sugarainak összege:

$$r_1 + r_2 = 5 + 3 = 8.$$

Tekintettel arra, hogy $r_1 + r_2 < O_1O_2$, a két kör egymáson kívül helyezkedik el.

b) Az a) rész eredményéből következően a két körnek négy közös érintője van, két belső és két külső, amelyek meghatározását a következő két alleckében mutatjuk meg.

3.1. A közös belső érintők egyenletének meghatározása



3.7. ábra Két kör közös belső érintői

Használjuk a 3.7. ábra jelöléseit!

Az érintési pontokba húzott sugarak merőlegesek az érintőkre, és az $O_1MF_1\angle = O_2MF_2\angle$. Ebből következően $O_1MF_1\triangle \sim O_2MF_2\triangle$. A megfelelő oldalak aránya: $\dfrac{O_1M}{MO_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{5}{3}$.

Az osztópont koordinátáira vonatkozó tétel szerint:

$$M\left(\frac{3\cdot 3+5\cdot 10}{3+5}; \frac{3\cdot 4+5\cdot(-2)}{3+5}\right), \text{ azaz } M\left(\frac{59}{8}; \frac{1}{4}\right).$$

Ezzel a problémát visszavezettük egy adott körhöz (pl. k_1) adott külső pontból húzott érintők egyenletének keresésére.

Az M pontra illeszkedő egyenesek egyenlete (egyetlen kivétellel) ilyen alakba írható: $e\colon y-\dfrac{1}{4} = m\left(x-\dfrac{59}{8}\right)$ (adott pontra illeszkedő, adott meredekségű egyenes egyenlete). Az egyetlen kivétel az y tengellyel párhuzamos egyenes, de az biztosan nem érinti a kört.

Alakítsuk át az egyenesek egyenletét! $e\colon mx-y=\dfrac{59}{8}m-\dfrac{1}{4}$. Ezek közül az egyenesek közül azokat keressük, amelyeknek az O-tól való távolságuk sugárnyi.

$$d(O_1,e)=5,$$

$$\frac{\left|3m-4-\dfrac{59}{8}m+\dfrac{1}{4}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=5,$$

$$\left|-\frac{35}{8}m-\frac{15}{4}\right|=5\sqrt{m^2+1},$$

$$\frac{1225m^2}{64}+\frac{525m}{16}+\frac{225}{16}=25m^2+25,$$

$$-375m^2+2100m-700=0,$$

$$15m^2-84m+28=0,$$

$$m_{12}=\frac{84\pm\sqrt{5376}}{30}=\frac{84\pm 16\sqrt{21}}{30}=\frac{42\pm 8\sqrt{21}}{15}.$$

Az érintők egyenletei:

$$e_1\colon y-\frac{1}{4}=\frac{42+8\sqrt{21}}{15}\left(x-\frac{59}{8}\right),$$

$$e_2\colon y-\frac{1}{4}=\frac{42-8\sqrt{21}}{15}\left(x-\frac{59}{8}\right).$$

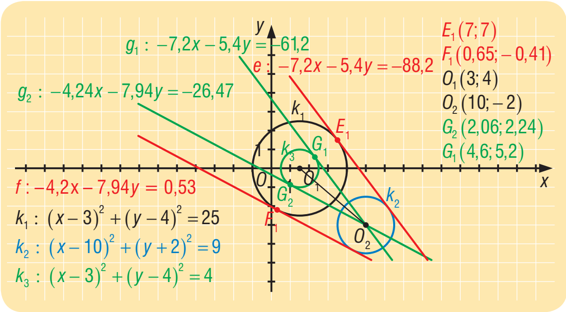
3.2. A közös külső érintők egyenletének meghatározása

Ebben az esetben is követhetnénk az előbb bemutatott utat, de most egy olyan módszert vázolunk, ami követi ez elemi geometriában tanult szerkesztési módot.

Adjuk meg az O_1 középpontú, $r_1 - r_2$ sugarú (k_3) kör egyenletét!

$$k_3 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4 .$$

Az 5. példában bemutatott módon adjuk meg az O_2 pontra illeszkedő k_3 kört érintő egyenesek egyenletét (g_1 és g_2)!



3.8. ábra Két kör közös külső érintői

Az $O_2(10;-2)$ pontra illeszkedő egyenesek egyenlete (egyetlen kivétellel) ilyen alakba írható: $g: y+2 = m(x-10)$ (adott pontra illeszkedő adott meredekségű egyenes egyenlete). Az egyetlen kivétel az y tengellyel párhuzamos egyenes, de az biztosan nem érinti a kört.

Alakítsuk át az egyenesek egyenletét! $g: mx - y = 10m + 2$. Ezek közül az egyenesek közül azokat keressük, melyeknek az O-tól való távolságuk sugárnyi.

$$d(O_1, e) = 2,$$

$$\frac{|3m - 4 - 10m - 2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2,$$

$$|-7m-6| = 2\sqrt{m^2+1},$$

$$49m^2 + 84m + 36 = 4m^2 + 4,$$

$$45m^2 + 84m + 33 = 0,$$

$$m_1 = -\frac{8}{15},$$

$$m_1 = -\frac{4}{3}.$$

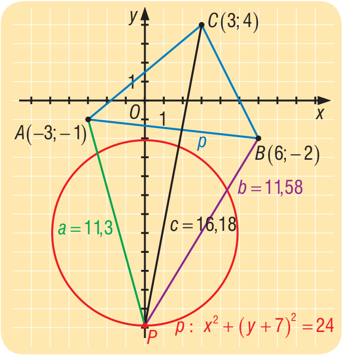
Az érintők egyenletei:

$$g_1 : y + 2 = -\frac{8}{15}(x-10),$$

$$g_2 : y + 2 = -\frac{4}{3}(x-10).$$

A keresett érintők (e és f) a k_1 kör g_1-gyel és g_2-vel párhuzamos érintői lesznek.

7. példa Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg a síkon azon $P(x;y)$ pontoknak a halmazát, melyekre $PA^2 + PB^2 = PC^2$!



3.9. ábra A kapott kör

Megoldás:
Írjuk fel a feltételegyenletet a koordináták segítségével, majd végezzünk algebrai átalakításokat!

$$(x+3)^2+(y+1)^2+(x-6)^2+(y+2)^2=(x-3)^2+(y-4)^2,$$

$$2x^2+2y^2-6x+6y+50=x^2+y^2-6x-8y+25,$$

$$x^2+y^2+14y+25=0,$$

$$x^2+(y+7)^2=24.$$

A keresett ponthalmaz a $(0;-7)$ középpontú, $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ sugarú kör.

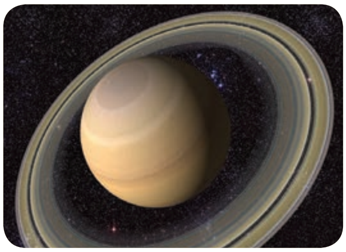
Oldjuk meg!

1. Adott három pont a koordinátáival, $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg az általuk meghatározott háromszög
a) **Feuerbach-kör**ének egyenletét! (a háromszög oldalainak felezőpontjaira illeszkedő kör)
b) Feuerbach-körének és a beírt körének a közös pontjait!

2. Adott két kör az egyenletével $k_1\colon (x-3)^2+(y-4)^2=25$, $k_2\colon (x-10)^2+(y+2)^2=16$. Milyen ponthalmaz egyenletét kapjuk, ha a két kör egyenletét kivonjuk egymásból?

3. Döntsük el, hogy melyik egy kör egyenlete az alábbi kétismeretlenes, másodfokú egyenletek közül! A köregyenletek esetében adjuk meg a körök középpontjait és sugarait is!
a) $x^2+2y^2-3xy=0$
b) $2x^2+2y^2-12x-8y=0$
c) $x^2+y^2-6x-10y-1954=0$
d) $x^2+y^2-6x-10y+1954=0$

4. Adott egy kör és egy egyenes az egyenletével: $k\colon (x-3)^2+(y-4)^2=25$, $e\colon x+2y=3$.
Adjuk meg a k kör
a) e-vel párhuzamos érintőinek egyenletét;
b) e-re merőleges érintőinek egyenletét!



3.10. ábra A Szaturnusz gyűrűi

5. Adott két pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$. Adjuk meg azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát a síkon, melyekre $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{5}$!

6. Adott két pont: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$, és egy kör: $k\colon (x-3)^2+(y-4)^2=25$.
Adjuk meg a kör azon pontjainak halmazát,
a) amelyek egyenlő távolságra vannak A-tól és B-től;
b) amelyekből az AB szakasz 45°-os szögben látszik!

7. Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg a síkon azon $P(x;y)$ pontoknak a halmazát, melyekre $PA^2+PB^2+PC^2=20$!

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 371., 373., 377. és 378. feladatok

4. A parabola koordináta-geometriai jellemzése

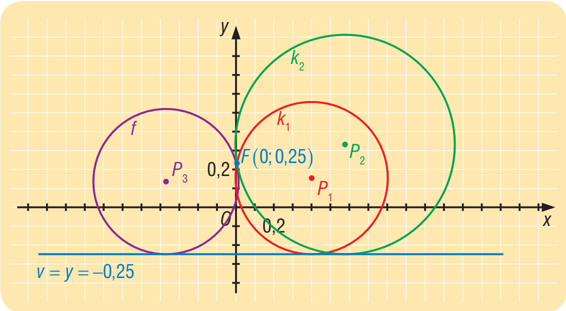
1. példa Adott egy pont a koordinátáival: $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$ és egy egyenes az egyenletével: $v: y=-\frac{1}{4}$. Adjuk meg azon körök P középpontjainak halmazát, melyek illeszkednek a F pontra és érintik a v egyenest!

Megoldás:
A kör definíciójából következően olyan $P(x;y)$ pontokat keresünk a síkon, melyekre teljesül, hogy $d(P,F)=d(P,v)$. Írjuk fel koordinátákkal ezt a feltételt, és végezzünk algebrai átalakításokat!

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}=\left|y+\frac{1}{4}\right|,$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16},$$

$$x^2=y.$$



4.1. ábra Néhány a keresett körök közül

Megkaptuk a keresett ponthalmaz egyenletét, amely egy másodfokú, kétismeretlenes egyenlet. Azt is láthatjuk, hogy az egyenlet nem egy kör egyenlete, tehát a kapott ponthalmaz nem kör.

Sokak számára ismerős lehet ez az egyenlet, hiszen már találkoztunk vele a függvénytani tanulmányaink során. Ez a valós számok halmazán értelmezett, $x \mapsto x^2$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonjának egyenlete. Ezt a ponthalmazt **parabolá**nak neveztük.

Definíció A parabola azon pontok halmaza a síkon, melyek egy egyenestől (v – **vezéregyenes**) és egy rá nem illeszkedő ponttól (F – **fókusz**) egyenlő távolságra vannak.

A fókusz és a vezéregyenes távolságát a parabola **paraméter**ének nevezzük, és általában p-vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $p>0$. A sík azon pontjait, amelyek a fókuszhoz közelebb vannak, mint a vezéregyeneshez, a parabola **belső pontja**inak nevezzük, míg azokat, amelyek a vezéregyeneshez közelebb vannak, mint a fókuszhoz, a parabola **külső pontja**inak hívjuk.

Az 1. példában egy speciális parabolát vizsgáltunk. Mennyi volt a paramétere? A fókusz és a vezéregyenes távolsága $p=\frac{1}{2}$.


4.2. ábra Parabolaantenna

Általánosítsunk! Legyen $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ és $v: y=-\frac{p}{2}\,(0<p)$!

Adjuk meg a parabola egyenletét!

Hasonló lépéseket végezhetünk, mint az 1. példa megoldásában.

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right|,$$

$$x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}=y^2+py+\frac{p^2}{4},$$

$$x^2=2py,$$

$$y=\frac{1}{2p}x^2.$$

A kapott egyenletből látható, hogy ez a parabola szimmetrikus az y-tengelyre, azaz a **tengelye** az y-tengely egyenese. Az origó illeszkedik rá, hiszen a $(0;0)$ számpár megoldása a parabola egyenletének. Az is igaz, hogy egyedül az origó a parabolapont a parabola tengelyén. Más szóval a parabola **tengelypontja** az origó. Ebből következően ezt az egyenletet a parabola **tengelyponti egyenlet**ének nevezzük.

Az egyenletből megállapítható az is, hogy a parabolának az x-tengellyel egyetlen közös pontja az origó (tengelypont) és az összes többi parabolapont az x-tengelyre vonatkozó pozitív félsíkban van. Az x-tengely origótól különböző pontjai külső pontjai a parabolának, ezért az x-tengely egyenese a parabola **tengelyponti érintő**je.

A függvénytani tanulmányaink során bizonyítás nélkül azt is állítottuk, hogy **a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvények grafikonja parabola**. Itt az ideje, hogy **igazoljuk** ezt az állítást!

Az említett függvények grafikonjának egyenlete: $y=ax^2+bx+c$, ahol $a\neq 0$. Alakítsuk át az egyenletet!

4.3. ábra Parabola egy épületen

$$y=ax^2+bx+c,$$

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c,$$

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c,$$

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c,$$

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

A függvénytranszformációkról tanultak alapján tudjuk, hogy ez a grafikon az $y=ax^2$ egyenletű ponthalmaz $\vec{v}\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ vektorral való eltolásával kapható.

A parabola definíciójából következik, hogy bármely egybevágósági transzformáció parabolának parabolát feleltet meg. Ezért az $y=ax^2+bx+c$ egyenletű ponthalmaz parabola, ha az $y=ax^2$ egyenletű az. A továbbiakban ezt **bizonyítjuk**.

Ha $a>0$, akkor tekintsük az $F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$ fókuszú, v: $y=-\frac{1}{4a}$ vezéregyenesű parabolát! Ennek paramétere: $p=\frac{1}{2a}$, egyenlete a korábban tárgyaltak szerint: $y=\frac{1}{2\frac{1}{2a}}x^2$, azaz $y=ax^2$.

Ha $\boldsymbol{a < 0}$**,** akkor tekintsük az $F\left(0;\dfrac{1}{4a}\right)$ fókuszú, $v\colon y=-\dfrac{1}{4a}$ vezéregyenesű parabolát! A parabola definíciója miatt ez nyilván az $y=|a|x^2$ egyenletű parabola x-tengelyre vonatkozó tükörképe, a függvénytranszformációkról tanultak szerint ennek egyenlete: $y=ax^2$.

Kaptuk, hogy az $y=ax^2$ egyenletű ponthalmaz parabola, a korábbiakból következően ez azt is jelenti, hogy az $y=ax^2+bx+c$ egyenletű ponthalmaz is parabola. Az alkalmazott egybevágósági transzformációk (eltolás, tengelyes tükrözés) tulajdonságainak ismeretében meg tudjuk adni az $y=ax^2+bx+c$ egyenletű parabola jellemző adatait:

paraméter: $p=\dfrac{1}{2|a|}$;

tengelypont: $T\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$;

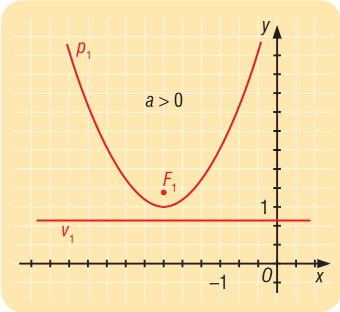
tengely: $x=-\dfrac{b}{2a}$;

tengelyponti érintő: $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$;

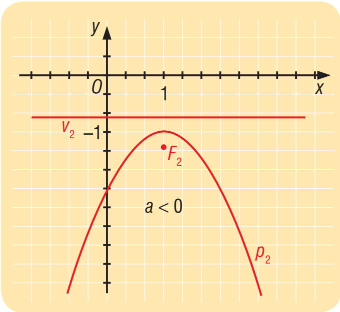
fókusz: $F\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$;

vezéregyenes: $y=\dfrac{4ac-b^2-1}{4a}$.

Az előző gondolatmenet alapján már nyilvánvaló, hogy minden y-tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenlete $y=ax^2+bx+c$, ahol $a\neq 0$ alakba írható.



4.4. ábra Az $y=ax^2$ parabola eltolásával kapott görbe



4.5. ábra Az $y=-ax^2$ parabola eltolásával kapott görbe

2. példa Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg annak a parabolának az egyenletét és jellemző adatait, amelyik illeszkedik a három pontra, és tengelye párhuzamos az y-tengellyel!

Megoldás:

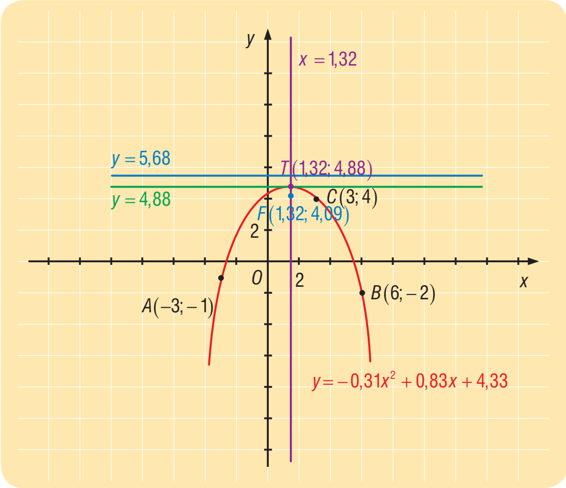
Keressük a parabola egyenletét $y=ax^2+bx+c$ alakban, ahol $a\neq 0$! Ha egy pont illeszkedik a parabolára, akkor koordinátapárja megoldása a parabola egyenletének. Helyettesítsük az adott pontok koordinátáit a parabola egyenletébe!

$$-1=9a-3b+c,$$
$$-2=36a+6b+c,$$
$$4=9a+3b+c.$$

Oldjuk meg a kapott egyenletrendszert! A megoldások:

$$a=-\frac{17}{54},\ b=\frac{5}{6},\ c=\frac{13}{3}.$$

A parabola egyenlete tehát $y=-\dfrac{17}{54}x^2+\dfrac{5}{6}x+\dfrac{13}{3}$.



4.6. ábra A keresett parabola

A parabola jellemző adatai:

paraméter: $p=\frac{1}{2\left|\frac{-17}{54}\right|}=\frac{27}{17}$;

tengelypont: $T\left(\frac{45}{34};\frac{1993}{408}\right)$;

tengely: $x=\frac{45}{34}$;

tengelyponti érintő: $y=\frac{1993}{408}$;

fókusz: $F\left(\frac{45}{34};\frac{1669}{408}\right)$;

vezéregyenes: $y=\frac{2317}{408}$.

A kapott együtthatókat behelyettesítettük a korábban tárgyalt általános összefüggésekbe. A közelítő értékek a 4.6. ábrán ellenőrizhetők.

Tükrözzük most az $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolát az $y=x$ egyenletű egyenesre! Tekintettel a tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonságára, a tükörkép is parabola lesz, amelynek jellemző adatai:

tengelypont: $T(0;0)$;

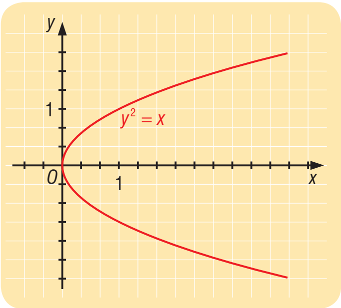
tengely: $y=0$;

tengelyponti érintő: $x=0$;

fókusz: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$;

vezéregyenes: $x=-\frac{p}{2}$.

A korábbiakhoz hasonló meggondolásokat végezve megmutatható, hogy az $x=ay^2+by+c$ (ahol $a\neq 0$) egyenletű ponthalmaz is parabola, amelynek jellemző adatai:



4.7. ábra Az x tengellyel párhuzamos tengelyű parabola

paraméter: $p=\frac{1}{2|a|}$;

tengelypont: $T\left(\frac{4ac-b^2}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$;

tengely: $y=-\frac{b}{2a}$;

tengelyponti érintő: $x=\frac{4ac-b^2}{4a}$;

fókusz: $F\left(\frac{4ac-b^2+1}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$;

vezéregyenes: $x=\frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

MatEm_Book.indb 116 2012.07.05. 11:57:40

Az is megmutatható, hogy minden x-tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenlete $x = ay^2 + by + c$ alakba írható fel.

Az ilyen parabolák speciális esete az $x = y^2$ egyenletű parabola. Ezt szemlélteti a 4.7. ábra.

A szemfüles szemlélődő rájöhet, hogy a ponthalmaz x-tengelytől pozitív irányba eső részével már találkozott. Ez a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto \sqrt{x}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja. Ez nem meglepő, hiszen az $x = y^2$ egyenletből következik, hogy csak nemnegatív x-re van megoldása, a ponthalmaz egyenlete így alakítható át:

$$\pm\sqrt{x} = y.$$

Az eddigiekben olyan parabolák egyenleteit vizsgáltuk, melyeknek tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel. Természetesen a tetszőleges fókuszú és vezéregyenesű parabolák egyenlete is vizsgálható lenne, de ez nem része az emelt szintű érettségi vizsga tananyagának.

3. példda

3. példa Egy parabola egyenlete: $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$. Adjuk meg a parabola közös pontjait az alábbi egyenletű egyenesekkel!

a) $a: x = -1$ b) $b: 3x + 4y = 7$ c) $c: y = -\frac{1}{3}x - 3$ d) $d: x + y = -6$

Megoldás:

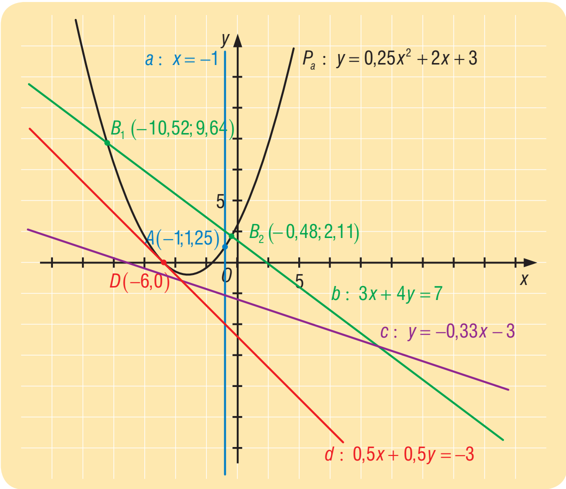
Az egyenes egyenletéből kifejezzük valamelyik ismeretlent, és behelyettesítjük a parabola egyenletébe. Egyismeretlenes, másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldásai lesznek a közös pontok egyik koordinátái. A másik koordináták visszahelyettesítéssel adódnak.

a) A parabola és az egyenes egyenleteiből álló egyenletrendszernek egy megoldása van: $A\left(-1; \frac{5}{4}\right)$.

b) Két közös pont van:

$$B_1\left(\frac{-11-\sqrt{101}}{2}; \frac{47+3\sqrt{101}}{8}\right),$$

$B_2\left(\frac{-11+\sqrt{101}}{2}; \frac{47-3\sqrt{101}}{8}\right)$. A közelítő értékek a 4.8. ábrán láthatók.



4.8. ábra A feladat megoldásai

c) Nincs közös pont, hiszen az egyenletrendszernek nincs valós számpár megoldása.

d) Az egyenletrendszernek egy megoldása van, így a parabolának és az egyenesnek egy közös pontja van: $D(-6; 0)$.

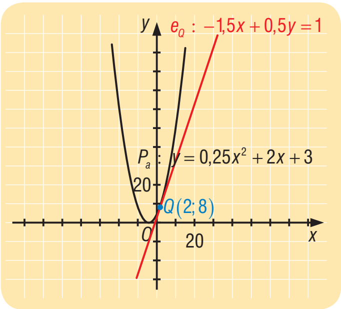
Az előző példa megoldásából látjuk, hogy két esetben van egy közös pontja a parabolának és az egyenesnek. Az *a* egyenes párhuzamos a parabola tengelyével, és a rá vonatkozó mindkét félsíkban van a parabolának pontja (például: $(0;3)$, $(-2;0)$).

A *d* egyenesnek is egy közös pontja van a parabolával. Az ábrán látható, de könnyen igazolható is, hogy a parabola összes többi pontja a *d*-re vonatkozó egyik félsíkban van, az egyenes összes többi pontja a parabola külső pontja. Az ilyen egyenest a **parabola érintőjé**nek nevezzük.

Igazolható az is, hogy ha egy egyenes nem párhuzamos a parabola tengelyével, és egy közös pontja van a parabolával, akkor érintője a parabolának.

4. példda

4. példa Egy parabola egyenlete: $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$, Q pedig a parabola 2 abszcisszájú pontja. Adjuk meg a parabola Q-ra illeszkedő érintőjének egyenletét!



4.9. ábra A parabola és érintője

Megoldás:

A parabola egyenletébe x helyére 2-t helyettesítve megkapjuk a Q hiányzó koordinátáját: $Q(2;8)$. Az erre a pontra illeszkedő, az y-tengellyel nem párhuzamos összes egyenes egyenlete a következő alakba írható: $y - 8 = m(x-2)$. Közülük azt keressük, amelyiknek egy közös pontja van a parabolával, azaz egy megoldása van a parabola és az egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszernek. Fejezzük ki az egyenes egyenletéből y-t!

$$y = mx + 8 - 2m.$$

Behelyettesítve a parabola egyenletébe,

$$mx + 8 - 2m = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3,$$

$$0 = \frac{1}{4}x^2 + (2-m)x + 2m - 5.$$

Ez egy másodfokú, egyismeretlenes, paraméteres (m) egyenlet, melynek akkor van egy megoldása, ha a diszkriminánsa 0.

$$(2-m)^2 - 2m + 5 = 0,$$

$$4 - 4m + m^2 - 2m + 5 = 0,$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0,$$

$$(m-3)^2 = 0,$$

$$m = 3.$$

Az érintő egyenlete: $y = 3x + 2$.

4.10. ábra Üstökös

Megjegyzés:

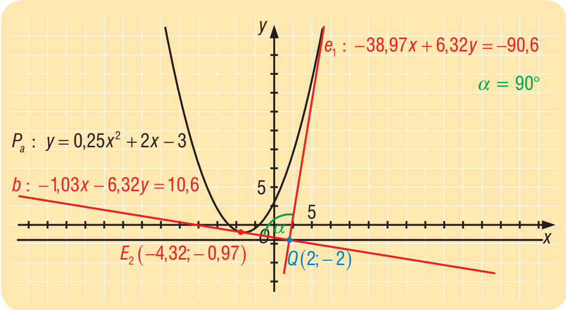
A későbbiekben tanulni fogunk egy általánosabb módszert egy görbe adott pontjába húzható érintő egyenletének meghatározására.

5. példa Egy parabola egyenlete: $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$, Q pedig a parabola vezéregyenesének 2 abszcisszájú pontja. Adjuk meg a parabola Q-ra illeszkedő érintőinek egyenletét és azok hajlásszögét!

Megoldás:

A korábbiak szerint a vezéregyenes egyenlete: $y=\dfrac{4ac-b^2-1}{4a}$, azaz $Q(2;-2)$. Az erre a pontra illeszkedő, az y-tengellyel nem párhuzamos összes egyenes egyenlete a következő alakba írható:

$$y+2=m(x-2).$$



4.11. ábra A parabola és a keresett érintők

Közülük azokat keressük, amelyeknek egy közös pontja van a parabolával, azaz egy megoldása van a parabola és az egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszernek. Fejezzük ki az egyenes egyenletéből y-t!

$$y=mx-2-2m.$$

Behelyettesítve a parabola egyenletébe,

$$mx-2-2m=\frac{1}{4}x^2+2x+3,$$

$$0=\frac{1}{4}x^2+(2-m)x+2m+5.$$

Ennek az egyenletnek akkor van egy megoldása, ha a diszkriminánsa 0.

$$(2-m)^2-2m-5=0,$$

$$4-4m+m^2-2m-5=0,$$

$$m^2-6m-1=0,$$

$$m_1=3+\sqrt{10},$$

$$m_2=3-\sqrt{10}.$$

A két érintő egyenlete: e_1: $y=\left(3+\sqrt{10}\right)x-8-2\sqrt{10}$, és e_2: $y=\left(3-\sqrt{10}\right)x-8+2\sqrt{10}$.

Ezek az érintők merőlegesek egymásra, hiszen a meredekségeik szorzata –1.

Megjegyzés:

Igazolható az az állítás, miszerint a vezéregyenes bármely pontjából a parabolához húzott érintők merőlegesek egymásra.

6. példa Egy parabola egyenlete: $y=2x^2-16x+30$, egy kör egyenlete: $(x-4)^2+(y-6)^2=4$. Adjuk meg a parabola és a kör közös pontjának koordinátáit!

Megoldás:

Meg kell oldanunk a parabola és a kör egyenletéből álló egyenletrendszert. Alakítsunk teljes négyzetté a parabola egyenletében, és fejezzük ki az $(x-4)^2$-t!

$$y = 2\left(x^2 - 8x\right) + 30,$$
$$y = 2\left[\left(x-4\right)^2 - 16\right] + 30,$$
$$y = 2\left(x-4\right)^2 - 32 + 30,$$
$$y = 2\left(x-4\right)^2 - 2,$$
$$\left(x-4\right)^2 = \frac{y+2}{2}.$$

A kapott eredményt behelyettesítve a kör egyenletébe, egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$2y^2 - 23y + 66 = 0,$$
$$y_1 = 6,$$
$$y_2 = \frac{11}{2}.$$

Visszahelyettesítés után megkapjuk a metszéspontok koordinátáit:

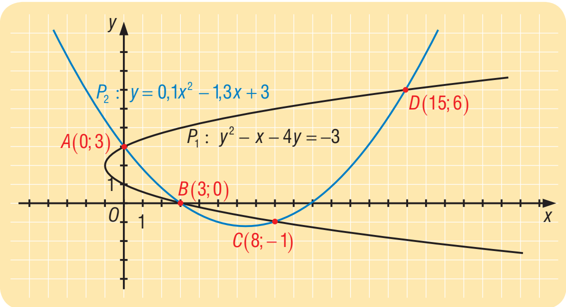
$$M_1\left(2;6\right),$$
$$M_2\left(6;6\right),$$
$$M_3\left(4+\frac{\sqrt{15}}{2};\frac{11}{2}\right),$$
$$M_4\left(4-\frac{\sqrt{15}}{2};\frac{11}{2}\right).$$

7. példa Adott két parabola az egyenletével: $P_1: x = y^2 - 4y + 3$ és $P_2: y = \frac{1}{10}x^2 - \frac{13}{10}x + 3.$ Adjuk meg a közös pontjaik koordinátáit!

Megoldás:

Meg kell oldanunk a két parabola egyenletéből álló egyenletrendszert. Helyettesítsük a P_1 egyenletében y helyére az $\left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{13}{10}x + 3\right)$ kifejezést!

$$x = \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{13}{10}x + 3\right)^2 - 4\left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{13}{10}x + 3\right) + 3.$$



4.12. ábra A példában szereplő parabolák és metszéspontjaik

Elvégezve a szükséges algebrai átalakításokat azt kapjuk, hogy

$$x^4 - 26x^3 + 189x^2 - 360x = 0.$$

Az x kiemelése után:

$x\left(x^3 - 26x^2 + 189x - 360\right) = 0.$ Az egyenlet bal oldalán egy szorzat van, amely csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Innen adódik az első megoldás:

$$x_1 = 0.$$

Most már csak az $x^3 - 26x^2 + 189x - 360 = 0$ egyenlet megoldásával kell foglalkozni. Általános megoldóképletet nem ismerünk, de tudjuk, hogy ha van egész megoldása az egyenletnek, akkor az osztója a konstans tagnak, a 360-nak. Rövid keresgélés után rálelhetünk a következő megoldásra, $x_2 = 3$. Ebben az esetben az egyenlet bal oldalából kiemelhető az $(x-3)$ gyöktényező:

$$(x-3)\left(x^2 - 23x + 120\right) = 0.$$

A második tényező egy másodfokú polinom, melynek gyökei:

$$x_3 = 8 \text{ és } x_4 = 15.$$

Visszahelyettesítés után kaphatók a két parabola közös pontjai:

$$A(0;3),$$

$$B(3;0),$$

$$C(8;-1),$$

$$D(15;6).$$

Oldjuk meg!

1. Adott három pont a koordinátáival: $A(-3;-1)$, $B(6;-2)$ és $C(3;4)$. Adjuk meg annak a parabolának az egyenletét és jellemző adatait, amely illeszkedik a három pontra, és tengelye párhuzamos az x-tengellyel!

2. Egy parabola egyenlete: $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$. Adjuk meg a fókuszára illeszkedő $\frac{1}{2}$ meredekségű egyenes parabolával közös pontjaiba húzható érintők
a) egyenletét;
b) metszéspontját;
c) hajlásszögét!

3. Egy parabola egyenlete: $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$, egy egyenesé pedig: $e\colon 2x + 3y = 5$.
a) Adjuk meg a parabola e egyenesre merőleges érintőjének egyenletét!
b) Adjuk meg a parabola e egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét!

4. Adjuk meg azon $P(x;y)$ pontoknak a halmazát a síkon, amelyek egyenlő távolságra vannak az x-tengely $[-3;6]$ és az y-tengely $[2;8]$ intervallumától!

5. Oldjuk meg rendezett valós számpárok halmazán a következő egyenletet!

$$\sin\left(x^2 + 2x + 3\right) = \cos y$$

6. Tükrözzük az $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$ egyenletű parabolát a $(-2;2)$ pontra! Adjuk meg a tükörkép egyenletét! Számítsuk ki az eredeti parabola és tükörképe közös pontjainak koordinátáit!

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 382., 383., 385. és 386. feladatok

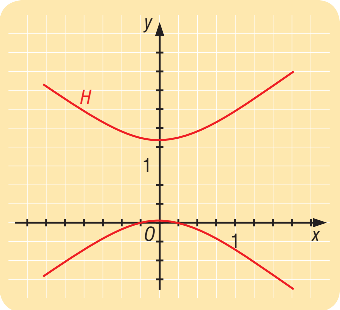
5. Egyéb ponthalmazok (Kiegészítő lecke)

1. példa Adott egy pont a koordinátáival: $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$ és egy egyenes az egyenletével: $v\colon y=-\frac{1}{4}$. Adjuk meg azon $P(x;y)$ pontoknak a halmazát a síkon, melyeknek az egyenestől és a ponttól mért távolságuk aránya

a) $\frac{1}{2}$; b) 2!

Megoldás:

a) A feltétel matematikai módszerekkel megfogalmazva: $\frac{d(P,v)}{d(P,F)}=\frac{1}{2}$. Írjuk fel koordinátákkal ezt a feltételt, és végezzünk algebrai átalakításokat azért, hogy megkapjuk a ponthalmaz egyenletét!



5.1. ábra A keresett ponthalmaz: hiperbola

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}=2\left|y+\frac{1}{4}\right|,$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=4y^2+2y+\frac{4}{16},$$

$$x^2-3y^2-\frac{5}{2}y=\frac{3}{16},$$

$$x^2-3\left(y^2+\frac{5}{6}y\right)=\frac{3}{16},$$

$$x^2-3\left[\left(y-\frac{5}{12}\right)^2-\frac{25}{144}\right]=\frac{3}{16},$$

$$x^2-3\left(y-\frac{5}{12}\right)^2+\frac{25}{48}=\frac{9}{48},$$

$$3\left(y-\frac{5}{12}\right)^2-x^2=\frac{1}{3},$$

$$\frac{\left(y-\frac{5}{12}\right)^2}{\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{\frac{1}{3}}=1.$$

A keresett ponthalmaz az 5.1. ábrán látható. Megmutatható, hogy ez a ponthalmaz **hiperbola**.

5.2. ábra Hiperbolikus felület

Definíció A hiperbola azon pontok halmaza a síkon, melyeknek két adott ponttól mért távolságkülönbségük abszolút értéke állandó.

b) A feltétel matematikai módszerekkel megfogalmazva: $\dfrac{d(P,v)}{d(P,F)} = 2.$ Írjuk fel koordinátákkal ezt a feltételt, és végezzünk algebrai átalakításokat azért, hogy megkapjuk a ponthalmaz egyenletét!

$$2\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2} = \left|y+\frac{1}{4}\right|,$$

$$4x^2+4y^2-2y+\frac{1}{4} = y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16},$$

$$4x^2+3y^2-\frac{5}{2}y = -\frac{3}{16},$$

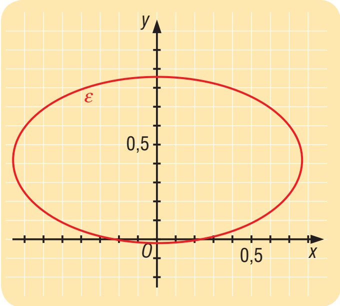
$$4x^2+3\left(y^2-\frac{5}{6}y\right) = -\frac{3}{16},$$

$$x^2+\frac{3}{4}\left[\left(y-\frac{5}{12}\right)^2-\frac{25}{144}\right] = -\frac{3}{64},$$

$$x^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{5}{12}\right)^2-\frac{75}{576} = -\frac{27}{576},$$

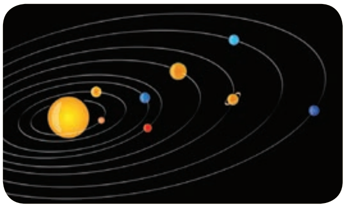
$$x^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{12},$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{12}}+\frac{\left(y-\frac{5}{12}\right)^2}{\frac{1}{9}} = 1.$$



5.3. ábra A vizsgált ponthalmaz: ellipszis

A keresett ponthalmazt az 5.3. ábra szemlélteti. Megmutatható, hogy ez a ponthalmaz **ellipszis**.



5.4. ábra Ellipszispályán keringő bolygók

Definíció Az ellipszis azon pontok halmaza a síkon, melyeknek két adott ponttól mért távolságösszegük állandó.

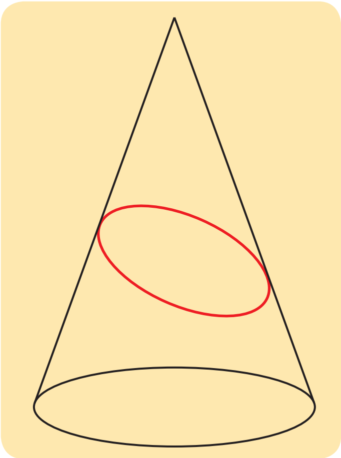
Az előbbi példában szereplő ponthalmazok egyenlete – csakúgy, mint a körök és az általunk vizsgált parabolák esetében – másodfokú, kétismeretlenes egyenlet. Ebből következően ezeket a ponthalmazokat **másodrendű görbék**nek nevezzük. Megmutatható, hogy másodrendű görbe lehet például:

- metsző egyenespár,
- kör,
- parabola,

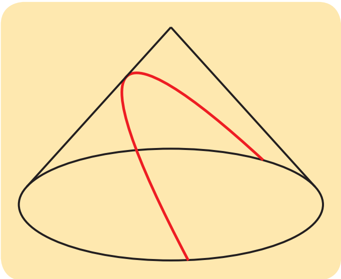
- hiperbola,
- ellipszis.

Szokás ezeket a ponthalmazokat **kúpszeletek**nek is hívni, mert egy végtelen kúpfelület síkkal való metszéseként állhatnak elő.

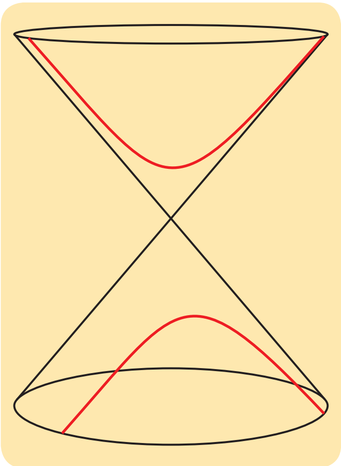
Ezek a megállapítások már túllépik az emelt szintű érettségi vizsga követelményeinek kereteit. Az ebben a témában elmélyedni kívánó olvasó figyelmébe ajánljuk a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMaL) http://www.komal.hu/cikkek/dandelin/dandelin.h.shtml címen található weboldalát, ahol Kós Rita cikke olvasható erről a témáról.



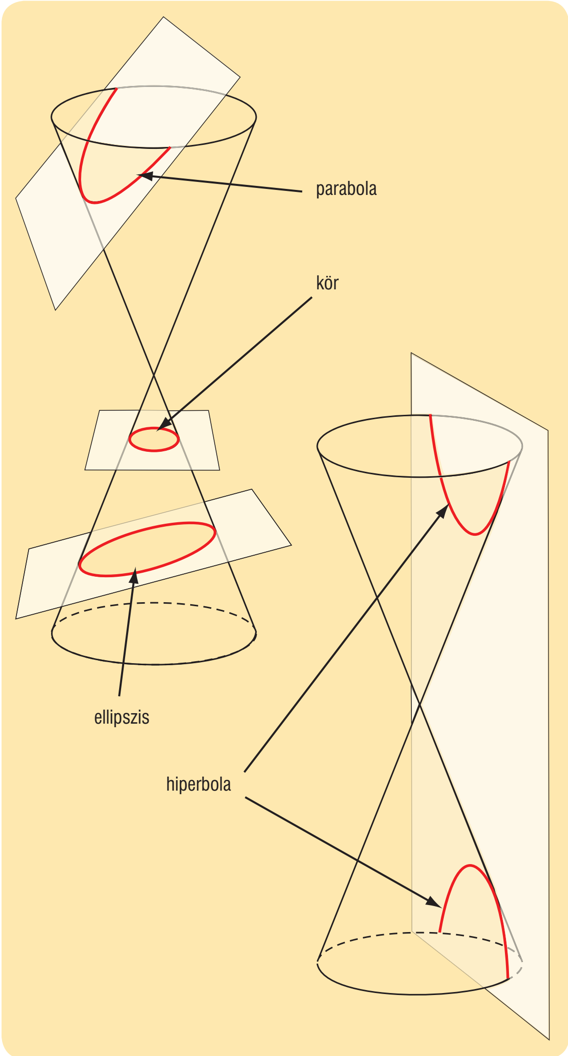
5.5. ábra Ellipszis



5.6. ábra Parabola

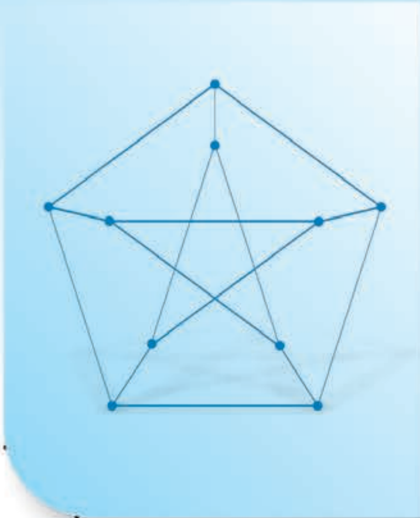


5.7. ábra Hiperbola



5.8. ábra Kúpszeletek

V. fejezet
Kombinatorika és gráfok



Kombináljunk!

1. A skatulyaelv

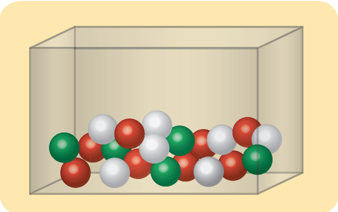
A kombinatorika a matematikának az egyik legnehezebben körülhatárolható része. Ide tartoznak a nevezetes összeszámlálások, a véges halmazok részhalmazaira vonatkozó ismeretek, a gráfokkal kapcsolatos problémák, a geometria határterületei (pl. rácsgeometria) stb. Könyvünkben ezek közül csak azokkal foglalkozunk, amelyek az emelt szintű érettségi követelményrendszerébe illeszkednek.

A korábbi tanulmányokból fel fogjuk használni, hogy n különböző dolog összes lehetséges sorba rakásainak száma (**ismétlés nélküli permutáció**) $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

A kombinatorikai vizsgálatok során sokszor használunk jellegzetesen ebben a témakörben előforduló bizonyítási módszereket, melyekkel célszerű először külön-külön részletesen megismerkedni.

1. példa Egy dobozban 20 egyforma méretű golyó van: 8 piros, 7 fehér és 5 zöld. Legalább hány golyót kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük
a) mindhárom színűből legalább egy;
b) két piros;
c) két azonos színű;
d) két különböző színű?

Megoldás:



1.1. ábra Az 1. példa doboza

a) Mivel a zöldből van a legkevesebb, ezért $8+7=15$ golyó kihúzása után még nem lehetünk biztosak benne, hogy mindhárom szín előfordul, azonban a 16. után már igen, hiszen, ha addig nem fordult elő mindhárom szín, akkor most biztosan zöldet húztunk.
b) Mivel $7+5+1=13$, ezért 13 golyó kihúzható úgy, hogy csak egy piros van köztük, de a 14. húzás után már biztosan lesz két piros színű golyó.
c) Háromféle szín van, ezért a negyedik húzás után lesz biztos, hogy a húzott golyók között van két azonos színű.
d) A piros golyókból van a legtöbb, ezért csak a 9. húzás után válik biztossá, hogy van a húzottak között két különböző színű.

1.2. ábra Folyik a munka

2. példa Egy iskola 10. osztályos tanulói egy 50 kérdésből álló matematikatesztet töltöttek ki. Az értékelés után kiderült, hogy Kovács Pistának 40 jó válasza volt, a többieknek viszont ennél kevesebb. Igazoljuk, hogy ha az évfolyamon összesen 124 gyerek írt tesztet, akkor van 4 olyan tanuló, akik azonos eredményt értek el!

Megoldás:
A jó válaszok száma 0, 1, …, 40 lehetett, ami 41-féle eredmény. Mivel $3\cdot 41 = 123 < 124$, ezért lennie kell 4 olyan tanulónak, aki azonos számú jó választ adott, tehát azonos eredményt ért el.

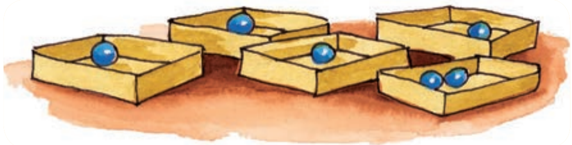
A fenti példákból leszűrhető általános következtetéseket foglaljuk össze:

1. Ha *n* darab helyre *n*-nél több dolgot teszünk, akkor lesz olyan hely, ahová egynél több dolog kerül.

Általánosabban is megfogalmazhatjuk.

2. Ha *n* darab helyre („skatulyába”) *k* db tárgyat helyezünk el, továbbá $k > m\cdot n$, akkor legalább egy helyre legalább *m* + 1 tárgy kerül.

Ezek a következtetési formák jelentik az ún. **skatulyaelv**et. Megjegyezzük, hogy általában minden nyelvterületen más-más elnevezés vonatkozik rá. (Angolul például „pigeonhole principle”.) A skatulyaelv a matematika számos más területén is megjelenik, ennek bemutatására szolgálnak a következő feladatok.



1.3. ábra A skatulyák

3. példa Igazoljuk, hogy a 2009-nek van olyan többszöröse a 10-es számrendszerben, amely csupa 2-es számjegyből áll!

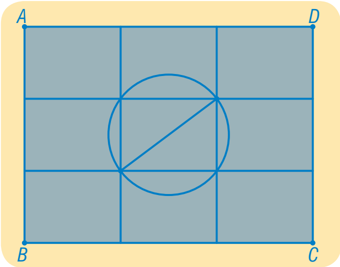
Megoldás:
Egy egész szám 2009-cel osztva 2009-féle maradékot adhat. Tekintsük a 2, 22, …, 22…2 számokat, ahol az utolsó szám 2010 darab 2-es számjegyből áll! Mivel összesen 2010 darab számot írtunk le, ezért lesz közöttük kettő, melyek 2009-cel osztva azonos maradékot adnak, így különbségük osztható lesz 2009-cel. A nagyobbik számból kivonva a kisebbiket, a kapott szám:

$$A = 2...20...0 = 2...2\cdot 10^k$$

alakú lesz. Mivel a 2009 és a 10 relatív prímek (azaz nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk), ezért a 2009 osztója lesz az *A* szám szorzatként való előállításában szereplő 2…2, csak 2-es számjegyekből álló számnak.

4. példa Egy téglalap oldalai 18, illetve 24 egység hosszúak. Igazoljuk, hogy bárhogyan is választunk ki rajta 20 pontot, azok között lesz három, melyek lefedhetők egy 5 egység sugarú körlappal!

Megoldás:
Osszuk fel a téglalapot az oldalaival párhuzamos szakaszokkal kilenc darab kisebb téglalapra, melyek oldalai 6, illetve 8 egység hosszúak! A 20 kiválasztott pont között a skatulyaelv miatt biztosan lesz legalább három, amely azonos kis téglalapra esik. A Thalész-tétel megfordítása miatt a kis téglalap köré írt kör átmérője a téglalap átlója. A Pitagorasz-tételből adódik, hogy az átmérő hossza $\sqrt{6^2+8^2}=10$ egység, ezért sugara 5 egység.

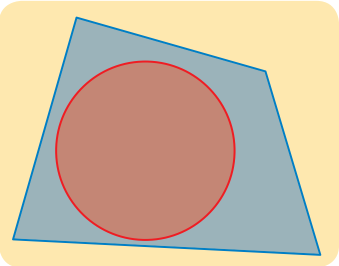


1.4. ábra Egy „kis” téglalap

Világos, hogy a megfelelő téglalap köré írt kör lefedi a téglalapon lévő pontokat, amiből adódik a feladat állítása.

5. példda Mutassuk meg, hogy egy T területű és K kerületű konvex négyszögben el lehet helyezni egy $\frac{T}{K}$ sugarú kört!

Megoldás:



1.5. ábra Kör a négyszögben

Írjunk minden oldalra befelé olyan téglalapokat, melyeknek a négyszöggel nem közös oldala $\frac{T}{K}$ hosszúságú! Ha a négyszög oldalainak hossza a, b, c és d, akkor e téglalapok területének összege:

$$a\frac{T}{K}+b\frac{T}{K}+c\frac{T}{K}+d\frac{T}{K}=(a+b+c+d)\frac{T}{K}=T,$$

vagyis éppen a négyszög területe. Mivel azonban az egyes csúcsoknál lévő szögek 180°-nál kisebbek, így lesznek többszörösen lefedett részek, és ezért lesz olyan pont is a négyszög belsejében, amely nincs lefedve. Ez mint a $\frac{T}{K}$ sugarú kör középpontja megfelel, hiszen mindegyik oldaltól távolabb van a $\frac{T}{K}$ távolságnál.

A megoldásban csak azt használtuk fel, hogy a négyszög konvex, így az állítás minden konvex sokszögre érvényes.

Oldjuk meg!

1. Legalább hány ember van abban a társaságban, ahol biztosan van két olyan ember, akiknek ugyanannyi foga van?
2. Legalább hány diák jár abba az osztályba, amelyben biztosan van 3 diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat?
3. Igazoljuk, hogy négy négyzetszám között biztosan van kettő, amelyek különbsége osztható 8-cal!
4. Egy 5 × 9-es téglalapot 10 téglalapra daraboltak fel, melyek minden oldalának mérőszáma egész szám. Mutassuk meg, hogy a keletkező téglalapok között lennie kell két egybevágónak!
5. Egy 90 cm × 160 cm méretű téglalap alakú asztallapon 10 db 10 cm × 15 cm-es fényképet helyeztünk el tetszés szerinti elrendezésben. Lerakhatunk-e ezek után még egy 10 cm sugarú körlapot is az asztalra anélkül, hogy bármelyik fényképbe beleérjen?

További feladatok:

Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: Bizonyítási módszerek című fejezet feladatai

2. A teljes indukció (matematikai indukció)

1. példa Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n szám esetén:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Megoldás:
Könnyű ellenőrizni, hogy az állítás $n=1$ esetén igaz. (További n értékeket is ki lehet persze próbálni.) Tegyük fel, hogy a feladatban szereplő állítás **valamely *n*-re** igaz és lássuk be, hogy akkor a **rákövetkező pozitív egészre**, tehát $(n+1)$ -re is igaz lesz! Ha ez sikerül, akkor – mivel az állítás igaz volt $n=1$ esetén – igaz lesz $n=2$ -re és így tovább, tehát minden pozitív egészre érvényes. Az állításnak az $(n+1)$-re vonatkozó alakja:

$$(1)\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}.$$

Feltevésünket felhasználva a bizonyítandó összefüggés-egyenlőség:

$$\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}.$$

Innen $(n+1)$-gyel való osztás és 6-tal való szorzás után:

$$n(2n+1)+6(n+1)=(n+2)\cdot(2n+3),$$

$$2n^2+7n+6=2n^2+7n+6.$$

Azonossághoz jutottunk, így az ekvivalens átalakítások miatt az (1) összefüggést igazoltuk, tehát a kitűzött célt elértük.

2. példa Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számra $4^n+15n-1$ osztható 9-cel!

Megoldás:
Próbáljuk meg alkalmazni az előző feladat megoldásában szereplő gondolatmenetet! Látszik, hogy az állítás $n=1$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz, ekkor elegendő igazolnunk, hogy $(n+1)$-re is igaz lesz, azaz

$$9\,\middle|\,4^{n+1}+15(n+1)-1 \Leftrightarrow 9\,\middle|\,4^{n+1}+15n+14.$$

Szeretnénk megjeleníteni a feltevésben szereplő kifejezést. Figyeljük meg, hogy

$$4^{n+1}+15n+14=4\left(4^n+15n-1\right)-45n+18.$$

Innen a feltevésünk miatt leolvasható az állítás teljesülése.

3. példa Igazoljuk, hogy ha k pozitív egész szám, akkor $k!\geq 2^{k-1}$.

MatEm_Book.indb 129 2012.07.05. 11:58:54

Megoldás:
Könnyen ellenőrizhető, hogy az állítás $k=1$-re igaz. Tegyük fel, hogy valamely k-ra igaz, ekkor azt kellene megmutatnunk, hogy

$$(k+1)! \ge 2^k.$$

Feltevésünket felhasználva:

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) \ge 2^{k-1} \cdot (k+1) \ge 2^{k-1} \cdot 2 = 2^k,$$

amit éppen igazolni szerettünk volna.
(A módszer alkalmazásának bemutatására választottuk ezt az utat, de természetesen az állítás bizonyításához nemcsak teljes indukcióval lehet eljutni, lényegében „ránézésre” is nyilvánvaló.)

4. példa Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy $2^n \ge n^2$? Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás:
Óvatosságra int, hogy bár az egyenlőtlenség $n=1;2$ esetén igaz, de $n=3$ esetén nem! További n értékeket behelyettesítve kialakulhat az a sejtés, hogy $n \ge 5$ esetén az egyenlőtlenség teljesül és egyenlőség nem áll fenn, míg $n=4$ esetén a két oldalon álló számok egyenlők. Próbáljuk meg igazolni sejtésünket a korábban már látott módszerrel! Mivel $n=5$-re a sejtés igaz, így feltesszük, hogy valamely n-re $(n \ge 5)$

$$2^n \ge n^2.$$

Felírva $(n+1)$-re:

$$2^{n+1} \ge (n+1)^2.$$

A feltevésünk alapján $2^{n+1} \ge 2n^2$, ezért elegendő megmutatnunk, hogy

$$2n^2 \ge (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 \ge 2n+1,$$

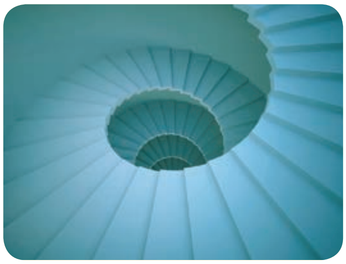
ahonnan

$$n(n-2) \ge 1,$$

ami $n \ge 5$ miatt igaz.
A megoldást végignézve adódik, hogy az eredeti egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha n értéke 2 vagy 4.

Foglaljuk össze, hogyan is működik a fenti négy feladat megoldásában használt módszer, melynek neve: **teljes indukció** (használatos a **matematikai indukció** elnevezés is). Van egy állítás, amely sejtésünk szerint esetleg véges sok szám kivételével minden pozitív egészre igaz. Jelöljük az állítást A_n-nel, azt a legkisebb pozitív egészet, amelytől kezdve sejtésünk szerint A_n teljesül, jelölje n_0. (Leggyakrabban $n_0=1$.) Ellenőrizzük az állítást először $n=n_0$-ra. Ha igaz, akkor tegyük fel, hogy valamely n_0-nál nem kisebb n-re igaz (***indukciós feltevés***). Végül azt felhasználva, hogy A_n igaz, mutassuk meg, hogy A_{n+1} is igaz lesz (***indukciós lépés***)! Ezzel minden $n \ge n_0$ pozitív egészre bizonyítottuk, hogy az állítás teljesül.

Szemléletesen a módszer működése azt biztosítja, hogy egy „végtelen lépcsőn” kapaszkodva bármilyen magasra fel tudunk jutni, ha van honnan elindulni, és mindig tudunk feljebb lépni egy lépcsőfokot.



2.1. ábra „Végtelen” lépcső

A teljes indukció elve a XVII. századból származik, Blaise Pascal (1623–1662) írta le először. A számelmélet precíz felépítése során kiderült, hogy axiómaként kell rá tekinteni. Alkalmazási területe igen széles, viszont a módszer közben előkerülő ún. indukciós lépés végrehajtásának módja nem mindig egyszerű és erősen függ a vizsgált állítás természetétől, amint azt az előző példák is mutatják. Az is sokszor előfordul, hogy egy probléma vizsgálata során először meg kell sejtenünk az állítást, melynek bizonyítását aztán teljes indukció segítségével végezhetjük el.

5. példa Egy körlapot részekre osztottunk n számú húrral oly módon, hogy a húrok között bármely kettő belső pontban metszi egymást, valamint semelyik három nem megy át egy ponton. Igazoljuk, hogy a keletkező részek száma:

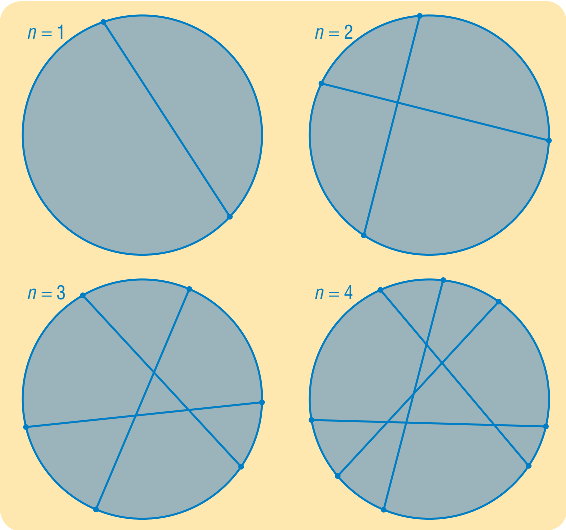
$$\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Megoldás:

Jelölje s_n a körlapon keletkező részek számát n darab húr esetén. Könnyű ellenőrizni, hogy $s_1=2, s_2=4, s_3=7, s_4=11,$ ezért az állítás ezekben az esetekben igaz. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz, akkor azt kell igazolnunk, hogy $n+1$ húr mellett a részek száma:

$$\frac{(n+1)^2+n+1+2}{2}=\frac{n^2+3n+4}{2}.$$

Vegyük észre, ha a feladatban szereplő feltételek mellett behúzzuk az $(n+1)$-edik húrt, akkor az a meglévő n darab húr mindegyikét különböző pontokban metszi, ezért a metszéspontok őt $n+1$ részre bontják. Mivel minden egyes darabja egy korábban már meglévő körlaprészt vág ketté, ezért ezek száma $(n+1)$-gyel fog növekedni, tehát



2.2. ábra Körök és húrjaik

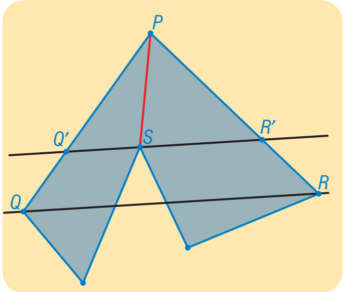
$$\frac{n^2+n+2}{2}+(n+1)=\frac{n^2+3n+4}{2}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

6. példa Igazoljuk, hogy minden, legalább négyoldalú sokszög felbontható egymást (belső pontban) nem metsző belső átlókkal háromszögekre!

Megoldás:

Az állítás konvex sokszögekre nyilvánvaló, ehhez elég behúzni valamely csúcsból a többi csúcsba vezető átlót. Konkáv sokszögekre először belátjuk, hogy minden, legalább 4 oldalú, önmagát nem metsző sokszögnek van belső átlója.



2.3. ábra Belső átló létezése

Legyen P olyan csúcs, amelynél lévő belső szög konvex (ilyennek léteznie kell), a vele szomszédos csúcsok Q, illetve R. Ha a $PQR_\triangle$ nem tartalmaz a sokszög kerületéhez tartozó pontot a PQ, illetve PR szakaszon kívül, akkor QR megfelelő belső átló. Ha igen, akkor vegyük a sokszögnek QR-től legtávolabbi csúcsát, melyet a $PQR_\triangle$ tartalmaz. (Az is lehetséges, hogy csak a QR szakaszon van csúcsa a sokszögnek, a $PQR_\triangle$ belsejében nincs. Ekkor egy ilyet P-vel összekötve belső átlót kapunk.) Jelöljük S-sel ezt a pontot (vagy több ilyen pont közül az egyiket). Húzzunk S-en át QR-rel párhuzamost, legyen $Q'R'$ ez az egyenes. A $PQ'R'_\triangle$ -ben nem lehet sokszögcsúcs, ezért a PS szakaszt egyetlen sokszögoldal sem metszheti, így PS belső átló. Térjünk vissza a feladat állítására. Ez $n = 4$ estén igaz. Tegyük fel, hogy n-nél kevesebb oldallal rendelkező sokszögekre az állítás igaz, belátjuk, hogy akkor n oldalú sokszögre is igaz lesz. Tekintsük az n oldalú konkáv sokszög egy belső átlóját! (Ilyen a fentiek miatt létezik.) Ez két, n-nél kevesebb oldalú sokszögre vágja szét az eredetit, így az indukciós feltevés miatt készen is vagyunk.

Oldjuk meg!

1. Az alábbi feladatokban az n pozitív egész számot jelöl. Igazoljuk, hogy
a) $16 \mid 3^{2n+2} + 8n - 9$, b) $13 \mid 3^{n+2} + 4^{2n+1}$!

2. Mutassuk meg, hogy egy négyzet feldarabolható n darab négyzetre, ahol $n \geq 6$.

3. Igazoljuk, hogy az 5. példában szereplő részek kiszínezhetők két színnel úgy, hogy az oldalszomszédos tartományok különböző színűek legyenek!

4. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

5. Igazoljuk, hogy a 6. példában szereplő felbontásban a háromszögek száma mindig $n - 2$.

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: Bizonyítási módszerek című fejezet teljes indukcióval foglalkozó feladatai

3. A véges halmazok részhalmazai

A korábbi matematikai tanulmányaink során megismerkedhettünk a halmazokkal kapcsolatos alapvető fogalmakkal, jelölésekkel, illetve műveleteket értelmeztünk két vagy több halmaz között. Ezeket az ismereteket meglevőnek tételezzük fel a továbbiakban. (Lásd a 9. osztályos tankönyv Halmazok című fejezetét.) Mivel a továbbiakban sok szó esik majd egy véges sok elemet tartalmazó halmaz ún. részhalmazairól, így először megismételjük a részhalmaz meghatározását.

Definíció Egy H halmaznak az A halmaz részhalmaza, ha A minden eleme H-nak is eleme. (Minden halmaznak részhalmaza saját maga, illetve az üres halmaz.)

1. példa Egy zsákban 10 különböző tárgy van. Hányféle módon tudunk valahány tárgyat kivenni a zsákból? (Azt is beleértve, hogy minden tárgyat kiveszünk, illetve azt is, hogy egyetlen tárgyat sem veszünk ki.)

Megoldás:
Legyenek a tárgyak $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Egy adott tárgyat vagy kiveszünk, vagy nem. Ha kivesszük, akkor írjunk alá 1-est, ha pedig nem, akkor írjunk alá 0-t. Így kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (bijekciót) létesítettünk valahány tárgy kivétele és a 10 jelből álló 1, illetve 0 jeleket tartalmazó jelsorozatok között. **(A párba állítás elve.)** Ha pl. az a_1, a_3, a_4 és a_8 lettek kiválasztva:


3.1. ábra A zsák

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0

A különböző kiválasztások száma megegyezik a különböző jelsorozatok számával, amely $2^{10} = 1024$.

A megoldás során látott ötlet – a párba állítás elve – a kombinatorika egyik klasszikus, bár általában nem könnyen alkalmazható módszere. Lényege a következő: átfogalmazzuk a problémát a feltett kérdés szempontjából vele egyenértékű problémává, és azt oldjuk meg. A párba állítás elve nagyon hatékony eszköz összeszámlálási feladatok vizsgálata során.

Vegyük észre, hogy az 1. példa megoldása során azt határoztuk meg, hogy hány részhalmaza van egy 10 elemű halmaznak! Teljesen hasonló módon igazolható a következő, alapvetőnek számító megállapítás.

1. tétel Egy n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n.

2. példa Egy zsákban 10 különböző tárgy van.
a) Hányféle módon tudunk 3 tárgyat kivenni közülük?
b) Hányféle módon tudunk 7 tárgyat kivenni közülük? (A kivett tárgyakat nem rakjuk vissza.)

3.2. ábra Kivétel után

Megoldás:

a) Ez egyszerű: az elsőt 10 tárgyból választhatjuk, a másodikat 9-ből, a harmadikat 8-ból, mivel az egyes választások száma egymástól független, ezért a válasz: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$ Nincs itt valami hiba? De van: számunkra teljesen lényegtelen, hogy adott három tárgy milyen sorrendben kerül elő! Így adott három tárgy kiválasztását a fenti eredmény annyiszor tartalmazza, ahányféleképpen azokat sorba lehet rendezni, ami $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6.$ A helyes eredmény tehát:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120.$$

b) Vegyük észre, hogy a két kérdésre a válasz ugyanaz a szám, hiszen kiválasztani 7 tárgyat ugyanannyi módon lehet, mint kiválasztani azt, hogy melyik három tárgyat nem választjuk ki!

Általánosítsunk! A zsákban lévő tárgyak helyett beszéljünk egy n elemű halmaz kapcsán arról, hogy hány k elemű részhalmaza van? Erre a matematikában külön jelölést vezettek be:

$$\binom{n}{k}. \quad \text{(Olvasd: } n \text{ alatt a } k.\text{)}$$

A példában szereplő adatokkal:

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120.$$

Sokszor találkozhatunk a következő jelöléssel is: $C_n^k = \binom{n}{k}$. Ebben a könyvben ezt nem fogjuk használni, de például az orosz nyelvű szakirodalomban nagyon gyakori. Szokás azt mondani rá, hogy ***n* elem *k*-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi**. (Innen ered a *C* betű a jelölésben. Az „ismétlés nélküli” kifejezés arra utal, hogy egy elemet csak egyszer választhatunk.)

2. tétel Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

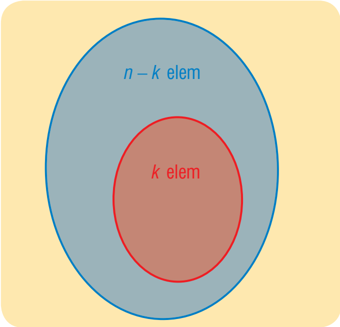
Bizonyítás:

A k elemű részhalmaz első elemét n elem közül választhatjuk, a másodikat $n-1$ elem közül, és így tovább, végül a k-adik elemét $n-k+1$ elem közül. Az összes lehetséges kiválasztások számának megállapításakor figyelembe kell vennünk, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, amiből adódik a tételben szereplő összefüggés.

3. tétel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Bizonyítás:
A tételben szereplő állítás nyilvánvaló (triviális), lásd a 3.3. ábrát!



3.3. ábra A k elemű részhalmazok száma

A fenti összefüggést sokszor (pl. számításokhoz) célszerű rövidebb formában leírni, ami a faktoriális jel segítségével lehetséges:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Célszerű még megállapodnunk abban, hogy $0!=1$, egyezésben azzal, hogy az egyetlen elemet sem tartalmazó részhalmazok száma 1. (Az üres halmaz.) Fontos hangsúlyoznunk: az $\binom{n}{k}$ szimbólumra vonatkozó kiszámítási képletet nem szabad összekeverni a definíciójával! Ez egyébként talán a leggyakrabban látott jelölés a kombinatorikában, a fenti két tétel jelentőségét nehéz túlbecsülni.

Nagyon gyakran előfordul, hogy $k=1$, illetve $k=2$, ezért érdemes megjegyeznünk, hogy

$$\binom{n}{1}=n \text{ és } \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Ha szemügyre vesszük az 1. és 2. tételben szereplő állításokat, akkor azonnal kaphatunk egy érdekes összefüggést:

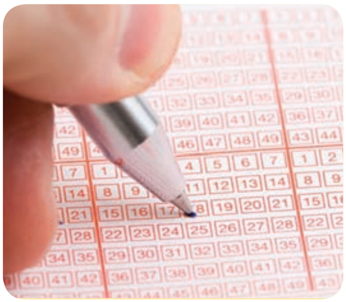
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Erre az összefüggésre később még visszatérünk. Most néhány mintafeladat következik, amelyek megoldásait gondosan tanulmányozzuk át! Ezek segítenek, hogy minél több feladatot tudjunk önállóan is jól megoldani!

3. példa a) Hányféle módon tölthető ki az ötös lottó játékban egy lottószelvény?
b) Hány olyan kitöltés van, amely pontosan hármas találathoz vezet?
c) Hány olyan kitöltés van, amely legalább hármas találatot eredményez?

Megoldás:
a) Mivel a 90 számból öt számot kell kiválasztanunk és megjelölnünk, ezért a válasz:

$$\binom{90}{5}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5!}=43949268\approx 44 \text{ millió}.$$



3.4. ábra Lottószelvény

b) Tudjuk, hogy 85 nem nyerő számból kettőnek, míg az öt nyerő számból háromnak kell szerepelnie a szelvényen, ezért a válasz:

$$\binom{85}{2}\cdot\binom{5}{3}=\frac{85\cdot 84}{2}\cdot\frac{5\cdot 4}{2}=35700.$$

c) Legalább hármas találatnak az felel meg, ha pontosan három vagy pontosan négy vagy pontosan öt számot találtunk el. Ezek páronként egymást kizáró események, a b) rész alapján ezért a válasz:

MatEm_Book.indb 135 2012.07.05. 11:59:30

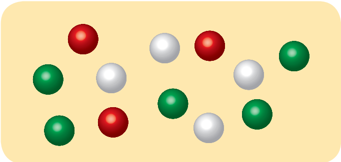
$$\binom{85}{2}\cdot\binom{5}{3}+\binom{85}{1}\cdot\binom{5}{4}+\binom{85}{0}\cdot\binom{5}{5}=36126.$$

Egyszer egy tanuló a c) feladatra a következő megoldást adta: az öt nyerő számból válasszunk ki hármat, majd a megmaradt 87 számból még kettőt. Ez jó lesz, mert a két szám között még további nyerő szám is lehet. Valóban jó lesz ez így? Bár elég meggyőzően hangzik, de utánaszámolva kiderül, hogy ebből a gondolatmenetből

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{87}{2}=37410$$

adódik, ami nem egyezik meg a korábbi eredménnyel! A hiba ott van, hogy bizonyos számötösöket többször is számba vettünk. Keressünk ilyenekre példát! A fenti (egyébként igaz) történet megmutatja a kombinatorikai feladatokkal kapcsolatos egyik alapvető problémát: nagyon elegánsan és röviden lehet hibás megoldást készíteni. Igyekezzünk ezért mindig feltenni magunkban a kérdést: valóban megszámoltam minden esetet? Nem számoltam bizonyos eseteket esetleg többször is? Azt kell tehát a megoldás során biztosítanunk, hogy az összes esetet, és mindegyiket pontosan egyszer vegyük számításba.

4. példa Hányféle módon lehet egymás mellé lerakni 3 piros, 4 fehér és 5 zöld golyót? (Az azonos színű golyók teljesen egyformák.)



3.5. ábra A 4. példa golyói

Megoldás:
Számozzuk meg a golyók helyeit 1-től 12-ig! Először rakjuk le a pirosakat, erre $\binom{12}{3}$ lehetőségünk van, hiszen három helyet kell számukra kiválasztanunk. Ezután rakjuk le a fehér golyókat, erre $\binom{9}{4}$ lehetőségünk van, hiszen a megmaradt 9 helyből választhatunk. Végül a megmaradt öt helyre rakjuk le az 5 zöld golyót. Az összes elhelyezések száma tehát:

$$\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5}=\frac{12!}{3!9!}\cdot\frac{9!}{4!5!}\cdot\frac{5!}{5!0!}=\frac{12!}{3!4!5!}=220\cdot126\cdot1=27720.$$

Az utolsó tört felírása jól mutatja, hogy nem volt jelentősége annak, hogy melyik színű golyók elhelyezésével kezdtünk.

A kérdést általánosan is vizsgálhatjuk! Adott n számú tárgy, amelyek r-félék, az egyes fajtákból rendre $n_1, n_2, \ldots, n_r$ darab van. Hányféle módon rakhatjuk egymás mellé őket, ha az egyes típusokba tartozó tárgyak teljesen egyformák? (Ezeket az elrendezéseket **ismétléses permutáció**nak hívják. Az ismétlés azt jelenti, hogy ugyanaz a dolog többször is előfordul egy adott típusban.)

4. tétel A különböző lerakások száma:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!},$$

ahol $n_1+n_2+\ldots+n_r=n.$

Bizonyítás:

Számozzuk meg a helyeket 1-től n-ig! Először rakjuk le az első típusba tartozókat. Ezt $\binom{n}{n_1}$-féle módon tehetjük meg. Ezután rakjuk le a második típusba tartozókat, ezt $\binom{n-n_1}{n_2}$-féle módon tehetjük meg. Következnek a harmadik típusba tartozók, ezeket $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$-féle módon helyezhetjük el. A gondolatmenetet ismételve adódik, hogy a különböző lerakások száma:

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n_r}{n_r}=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdot\ldots\cdot\frac{n_r!}{n_r!0!},$$

ahonnan az egyszerűsítések elvégzése után adódik a tétel állítása.

5. példa Egy körvonalon kijelöltünk 10 pontot.

a) Hány húrt határoznak meg?
b) Hány háromszöget határoznak meg?
c) Az általuk kijelölt húroknak hány (belső) metszéspontja van, ha semelyik három húr nem megy át közös ponton?

Megoldás:

a) Pontosan annyi húrt határoznak meg, ahányféleképpen két pontot ki lehet választani a 10 adott pont közül, tehát a válasz:

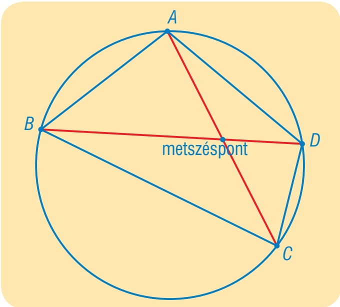
$$\binom{10}{2}=45.$$

b) Pontosan annyi háromszöget határoznak meg, ahányféleképpen három pontot ki lehet választani a pontok közül:

$$\binom{10}{3}=120.$$

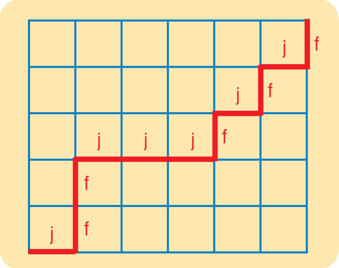
c) Két metsző húr összesen 4 végpontja konvex négyszöget alkot és megfordítva: bármely olyan konvex négyszög, melynek csúcsai az adott pontok közül valók, meghatároz egy metsző húrpárt. (A párba állítás elve!) A metszéspontok száma tehát egyenlő a négyszögek számával, vagyis

$$\binom{10}{4}=210.$$



3.6. ábra Metsző húrok

6. példa Hányféle útvonalon juthatunk el a rácsvonalak mentén haladva egy 6×5-ös négyzetrács bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha utunk során csak jobbra vagy felfelé mehetünk?



3.7. ábra Egy lehetséges útvonal

Megoldás:
Összesen 6-szor kell egy egységnyit jobbra és 5-ször felfelé haladnunk. Jelölje j betű a jobbra megtett egységnyi utat, f betű pedig a felfelé megtettet. Ekkor minden útvonal jellemezhető 6 darab j és 5 darab f betűből álló 11 betűs jelsorozattal és megfordítva: minden ilyen jelsorozat megad egy lehetséges útvonalat. (A párba állítás elve!) Az útvonalak száma így megegyezik a jelsorozatok számával. Ez pedig a 4. tétel alapján:

$$\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!6!} = 462.$$

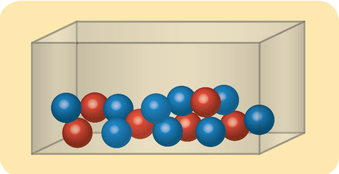
7. példa Igazoljuk, ha $n \geq k$ és mindkettő pozitív egész, akkor

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Megoldás:
A feladat megoldható a kiszámítási képlet alkalmazásával, amelyet az olvasóra bízunk. Ez az út azonban semmit nem mond arról, hogyan is keletkezhetett a feladat, és persze a kombinatorika lényegéhez sincs túl sok köze. Most bemutatunk egy olyan megoldást, amelyhez ugyan nagy gyakorlat kell, de rávilágít a probléma lényegére. Tekintsünk egy *n* elemű halmazt, amelynek egyik elemét színezzük ki! Ha most megkérdezzük, hogy a halmaznak hány *k* elemű részhalmaza van, akkor a válasz egyrészt nyilván $\binom{n}{k}$, másrészt egy kiválasztott részhalmaz vagy tartalmazza a kiszínezett elemet, vagy nem. Ha nem tartalmazza, akkor ilyenből összesen $\binom{n-1}{k}$ darab van, hiszen $n-1$ másik elemből kell *k* darabot kiválasztani. Ha tartalmazza, akkor ilyenből összesen $\binom{n-1}{k-1}$ darab van, mivel a színes elem mellé kell még $k-1$ másikat választani $n-1$ elem közül. Mindezekből a feladat állítása nyomban leolvasható.

8. példa Egy dobozban 6 piros és 9 kék golyó van. Egymás után kihúzunk 5 golyót úgy, hogy minden húzás után feljegyezzük a kihúzott golyó színét, majd visszatesszük a dobozba. Hányféle esetben fordulhat elő az, hogy háromszor húzunk pirosat és kétszer kéket?

Megoldás:



3.8. ábra A példában szereplő golyók

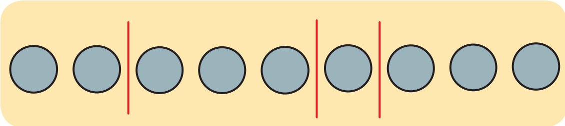
Gondolatban különböztessük meg (pl. számozzuk meg) az azonos színű golyókat! A húzások után $\binom{5}{3}$-féle színsorrend alakulhat ki, de minden piros 6-féle és minden kék 9-féle számmal szerepelhet, ezért a válasz:

$$\binom{5}{3} \cdot 6^3 \cdot 9^2 = 174960.$$

9. példa Hányféle módon oszthatunk szét 9 darab 100 Ft-os érmét 4 gyerek között, ha minden gyereknek legalább egy érmét kell kapnia?

Megoldás:

Jelölje a gyerekeket *A*, *B*, *C* és *D*. Képzeljük el egymás mellé lerakva az érméket! Az érmék sorát három helyen megszakítva kapunk egy lehetséges kiosztást: balról jobbra haladva adjuk oda az érméket az *A*, *B*, *C*, végül a *D* gyereknek.



3.9. ábra Egy lehetséges elosztás

Mivel 8 helyből választunk ki hármat, ezért a válasz:

$$\binom{8}{3} = 56.$$

10. példa Hányféle módon oszthatunk szét 9 darab 100 Ft-os érmét 4 gyerek között?

Megoldás:

Most nem kell feltétlenül mindegyik gyereknek pénzérmét osztanunk, de egy ötlettel visszavezethetjük a példa megoldását az előzőére. Osszunk ki gondolatban $9+4=13$ darab 100 Ft-os érmét 4 gyerek között úgy, hogy minden gyerek kap legalább egy érmét! Ha a kiosztás után minden gyerektől elkérünk egy érmét, akkor megkapunk egy, a jelen példában megfelelő kiosztást. (A párba állítás elve!) A 9. példa alapján tehát a válasz:

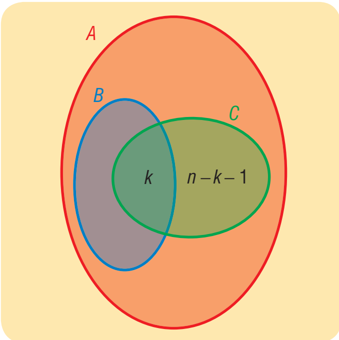
$$\binom{9+4-1}{3} = \binom{12}{3} = 220.$$

11. példa Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{s-1}{k} \binom{N-s}{n-k-1} = \binom{N-1}{n-1},$$

ahol $k < n \le s \le N$ természetes számok!

(Ennek az azonosságnak egy fontos alkalmazását a Valószínűség-számítás című fejezetben fogjuk látni.)



3.10. ábra A példához kötődő halmazábra

Megoldás:

Tekintsünk egy $N-1$ elemű, különböző számokkal számozott golyókat tartalmazó halmazt, amelyben a golyók közül $s-1$ darab fekete és $N-s$ darab fehér. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy hányféleképpen választhatunk ki egy $n-1$ elemet tartalmazó részhalmazt?

Erre a válasz könnyű: $\binom{N-1}{n-1}$. Tekintsük most az ábrát, ahol *A* az $N-1$ elemű halmaz, *B* az $s-1$ darab fekete golyót tartalmazó részhalmaz, *C* pedig egy $n-1$ elemet tartalmazó részhalmaz.

A k szám jelentse azt, hogy a kiválasztott C halmaz hány feketére színezett golyót tartalmaz. Mivel az $A \setminus B$ halmaz elemeinek száma $N-s$, ezért az ilyen C részhalmazok száma:

$$\binom{s-1}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k-1}.$$

(A fekete, illetve fehér színű golyók kiválasztása egymástól függetlenül történik.) A C halmazra vonatkozó összes lehetséges kiválasztás számát úgy is megkaphatjuk, hogy minden lehetséges k értékre összegezzük a fenti számokat, azaz

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{s-1}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k-1}.$$

A kétféle számítás eredménye ugyanazt adja meg, ami bizonyítja a feladat állítását.

Oldjuk meg!

1. Igazoljuk teljes indukció felhasználásával azt, hogy az n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n!

2. Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész szám, akkor

$$\frac{n^2+n+2}{2} \le 2^n.$$

3. Hány kézfogásra kerül sor egy 12 fős társaságban, ha mindenki kezet fog mindenkivel?

4. Legfeljebb hány egyenest határoz meg a síkon 20 pont?

5. Hányféleképpen rakhatunk le 5 piros és 8 fehér golyót, ha két piros golyó nem állhat egymás mellett? (Az azonos színű golyók teljesen egyformák.)

6. Két párhuzamos egyenes egyikén kijelöltünk 6 pontot. Hány pontot jelöltünk ki a másik egyenesen, ha a két egyenesen kijelölt pontok által meghatározott háromszögek száma 960?

7. Hány elemű az a halmaz, amelynek összesen 210 darab egy-, illetve kételemű részhalmaza van?

8. Igazoljuk, ha n pozitív egész, akkor

$$\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{0} = \binom{2n}{n}.$$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: Kombinatorika című fejezet 16-23. és 40-50. feladatai

4. A binomiális tétel és a Pascal-háromszög

Korábbi tanulmányaink során megismertük a következő azonosságokat:

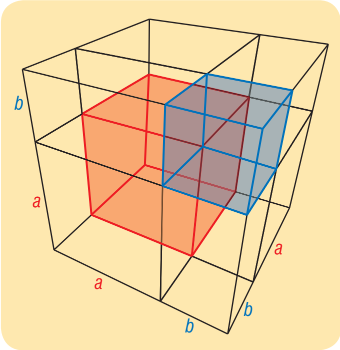
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Jogosan merül fel a kérdés, hogy mi az általános eredmény kéttagú összeg n-edik hatványára, ha n pozitív egész szám? Bár ez a kérdés tisztán algebrai problémának látszik, elegáns választ adhatunk rá a kombinatorika eszközeinek felhasználásával. Vegyük észre, hogy az

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$$

szorzás elvégzése után a kapott polinom minden tagja $a^{n-k}b^k$ alakú lesz, ahol $k = 0,1,\ldots,n.$ Egy ilyen tag úgy adódik, hogy az összeszorzásnál k darab zárójelből választjuk a b, míg $n-k$ darabból az a betűt. A különböző választások száma ezért adott k esetén $\binom{n}{k}$, tehát ennyiszer fog szerepelni $a^{n-k}b^k$ a szorzás elvégzése után kapott polinomban. Összegezve minden k-ra a kapott tagokat adódik az ún. **binomiális tétel**.



4.1. ábra $(a + b)^3$

Tétel Ha n pozitív egész szám, akkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Érdemes megemlíteni, hogy ezt az eredményt már a középkori kínai matematika is ismerte. Newton általánosította tetszőleges kitevőre, ezért a szakirodalomban több helyen Newton binomiális tételének hívják. Ezért van, hogy gyakran nevezzük az $\binom{n}{k}$ szimbólumot binomiális együtthatónak.

Nézzük meg most a tétel néhány alkalmazását!

1. példa Írjuk fel a következő hatványok rendezett polinom alakját!

a) $(a+b)^4$ b) $(x+y)^5$ c) $(x-2)^6$

Megoldás:

Írjuk fel a kifejezéseket a binomiális tétel szerint:

a) $(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k}b^k = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 =$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

b) $(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5y^0 + \binom{5}{1}x^4y^1 + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}x^1y^4 + \binom{5}{5}x^0y^5 =$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

c) $(x-2)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{6-k}(-2)^k = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$

Mivel $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$, így kapunk egy új bizonyítást az n elemű halmaz összes részhalmazainak számára vonatkozó tételre.

2. példa Igazoljuk, hogy egy nemüres halmaznak ugyanannyi páros sok, mint páratlan sok elemet tartalmazó részhalmaza van!

Megoldás:
Mivel

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n},$$

ha az azonos előjelű tagokat az egyenlőségben egy-egy oldalra rendezzük, éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

3. példa Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész, akkor $\binom{2n}{n} < 4^n$!

Megoldás:
Vegyük észre, hogy

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} > \binom{2n}{n}.$$

Végül egy nem könnyű, de nagyon fontos eredményt igazolunk, amellyel majd a könyv egy másik fejezetében fogunk újra találkozni.

4. példa Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ha n pozitív egész!

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Megoldás:
Ha $n = 1$, illetve $n = 2$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. A továbbiakban feltesszük, hogy $n \ge 3$.
A binomiális tétel miatt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Vegyük észre, hogy

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) < n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k,$$

ezért

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

A teljes indukcióval foglalkozó fejezet 3. példájának állítása szerint

$$k! \geq 2^{k-1} \Leftrightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

ezért igaz az, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ismeretes, hogy

$$(a-1)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1\right)=a^n-1,$$

így $a=\frac{1}{2}$ helyettesítéssel:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2,$$

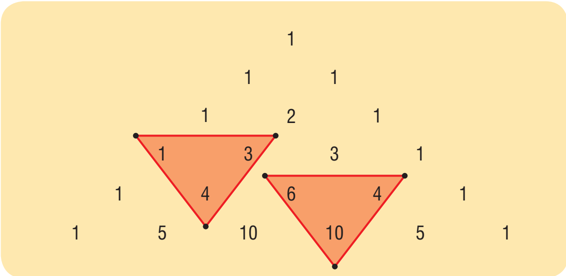
ahonnan

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2=3.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A binomiális tétel alkalmazása során sokszor ki kell számolnunk a binomiális együtthatókat. Természetesen ez a kiszámítási képlet segítségével mindig megtehető, de a matematika történetében egymástól függetlenül többen is felfedeztek egy olyan számtáblázatot, amellyel (legalábbis kis n-ek mellett) gyorsabban is célhoz érhetünk. A 4.2. ábra a binomiális együtthatókat tartalmazza adott n-ek esetén soronként, a tetején az 1-gyel kiegészítve, ha $n=1,2,3,4,5$.

Feltűnhet (ezt az ábrán külön ki is emeltük) az, hogy egy adott sor két szomszédos elemének összege éppen a következő sorban alattuk szereplő szám. Ez alapján a táblázat tetszés szerinti méretig folytatható, azzal a megjegyzéssel, hogy balról, illetve jobbról egy-egy 1-essel egészítsünk ki minden sort. A táblázat neve: Pascal-háromszög. (Valójában Pascal a XVII. században csak újra megtalálta az európai matematika számára ezt a máshol már sokkal korábban ismert eredményt.)



4.2. ábra Pascal-háromszög

Bebizonyítjuk, hogy a táblázatnak a fentebb leírt módon történő folytatása az n-edik sorában valóban megadja tetszőleges pozitív egész n-re a hozzá tartozó binomiális együtthatókat. Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. Mint láttuk, az állítás az $n=1,2,3,4,5$ értékekre igaz. Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re igaz, be kell látnunk, hogy akkor n-re is igaz lesz.

Tudjuk, hogy

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k},$$

amiből adódik az állítás.

Oldjuk meg!

1. Igazoljuk a binomiális tételt teljes indukció segítségével, felhasználva azt a korábban kapott eredményt, mely szerint

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}!$$

2. Igazoljuk, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában álló számok összege 2^n!

3. Írjuk fel a következő hatványok rendezett polinom alakját a binomiális tétel segítségével!

a) $(x-2y)^4=?$ b) $(2a-1)^5=?$ c) $(n+2)^6=?$

4. Az $(5x+2)^{10}$ kifejezés polinom alakjában mi lesz x^6 együtthatója?

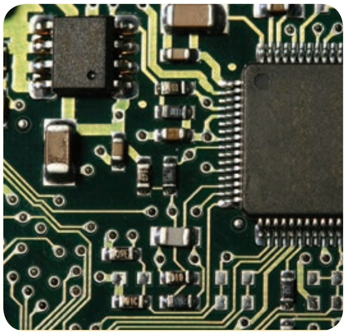
5. Igazoljuk számológép felhasználása nélkül, hogy $1{,}1^5<1{,}611$!

6. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n szám esetén

$$n<\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n!$$

5. A gráf fogalma, fokszámtétel, teljes gráf, körmérkőzések

A matematikának az a területe, amellyel az alábbiakban megismerkedünk, viszonylag fiatal. A gráfokkal kapcsolatos első általános megállapításokat Leonhard Euler (1707–1783) tette a XVIII. század első felében. (A königsbergi hidak problémája.) A témakör jelentősége a XX. században növekedett meg, miután kiderült, hogy pl. a logisztika, a genetika, a hálózatok tervezése és építése (legyen az közút, csatorna, elektromos vagy mikroelektronikai) vagy a közgazdaságtan olyan általános kérdéseket vet fel, melyekre a **gráfelmélet** eszközeinek és eredményeinek segítségével érdemes keresni a válaszokat. Mai világunkat átszövik a gráfelméleti problémák! Büszkén említhetjük meg, hogy a magyar matematikusok vezető szerepet játszottak és játszanak ma is a gráfokkal kapcsolatos kutatásokban. Néhányan közülük: Kőnig Dénes (1884–1944), Gallai Tibor (1912–1992), Erdős Pál (1913–1996), Pósa Lajos, Lovász László, Szemerédi Endre.



5.1. a) ábra Chip

5.1. b) ábra Csőhálózat

5.1. c) ábra Elektromos hálózat

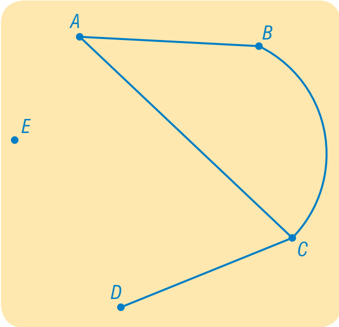
A gráfelmélet egy-egy eredményét a mindennapi életből vett problémák tanulmányozásán keresztül mutatjuk be. Ezzel is azt kívánjuk hangsúlyozni, hogy a matematikának olyan fejezetéről lesz szó, amely rendkívül sok gyakorlati alkalmazással bír.

Következzen most bevezetésképpen néhány feladat. Ha a feladat egy társaságról és tagjainak ismeretségi viszonyairól szól, akkor feltesszük, hogy az ismeretségek kölcsönösek.

1. példa Van-e olyan 5 emberből álló társaság, amelyben az egyes emberek a többiek közül pontosan 0, 1, 2, 2, 3 másikat ismernek?

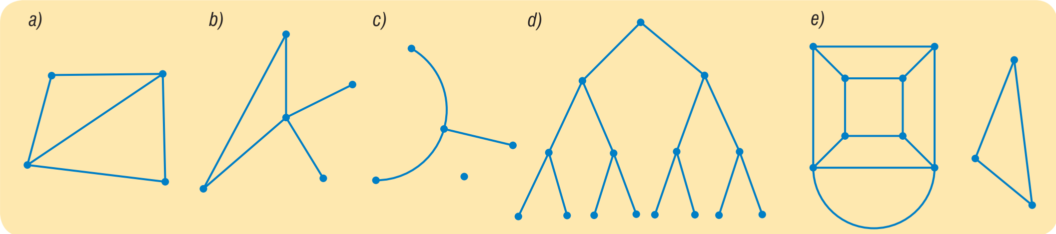
Megoldás:
Feleltessük meg a társaság tagjainak a sík öt pontját: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*! Két pontot egy vonallal kötöttünk össze, ha a nekik megfelelő emberek ismerik egymást. Ezek alapján adódott az 5.2. ábra.

A feltett kérdésre tehát a válasz: igen.



5.2. ábra Az 1. példa gráfja

Definíció Az olyan ábrát, amely pontokból és azok közül néhányat összekötő vonalakból áll, ahol nem lényeges, hogy a vonalak alakja milyen, **gráf**nak nevezzük. Az adott pontok a gráf **csúcsai (pontjai)**, az őket összekötő vonalak a gráf **élei**.



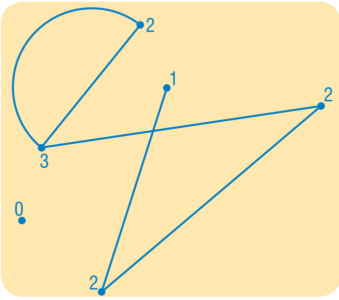
5.3. ábra Gráfok

Definíció A gráfot **véges gráf**nak nevezzük, ha csúcsainak száma véges.

(Mi csak ilyen típusú gráfokkal foglalkozunk a tanulmányaink során. Minden kijelentésünk véges gráfokra értendő tehát a továbbiakban.)

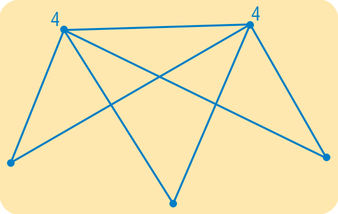
Az egy csúcsból kiinduló élek száma az adott csúcs **fokszáma**. Az olyan pontot, melynek fokszáma 0, **izolált pont**nak nevezzük. A gráf két csúcsa szomszédos, ha él köti őket össze egymással.

Fontos megjegyezni, hogy egy gráf két élének geometriai értelemben vett (belső) metszéspontja (ha van ilyen) nem pontja a gráfnak!



5.4. ábra Fokszámok egy gráfban

2. példa Van-e olyan 5 emberből álló társaság, amelyben az egyes emberek a többiek közül pontosan 1, 2, 3, 4, 4 másikat ismernek?



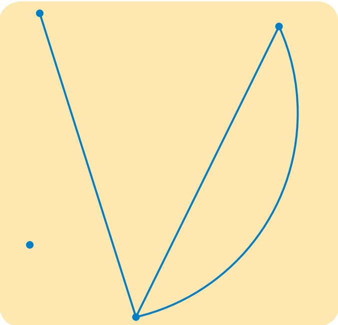
5.5. ábra Minden pont fokszáma legalább 2

Megoldás:
Azok, akik 4-4 másikat ismernek a többiek közül, mindenkit ismernek. Ez azt is jelenti, hogy a társaság minden tagjának legalább 2 ismerőse kellene, hogy legyen, ami ellentmond annak, hogy egyiküknek csak 1 ismerőse van. Nincs tehát ilyen társaság.

3. példa Egy társaságban néhányan kezet fogtak egymással. (Bármely két ember legfeljebb egyszer fogott kezet.)

a) Igazoljuk, hogy van két olyan ember, akik ugyanannyiszor fogtak kezet!

b) Igaz marad-e az állítás, ha megengedjük, hogy két ember között több kézfogás is történjen?



5.6. ábra Ellenpélda

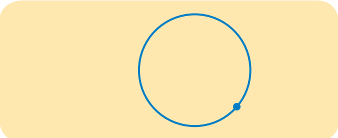
Megoldás:
a) Tegyük fel, hogy a társaság $n \geq 2$ főből áll. Feleltessünk meg a problémának egy gráfot, melynek csúcsai a társaság tagjai, élei pedig a kézfogások! A csúcsok lehetséges fokszámai: $0, 1, \ldots, n-1$. Vegyük észre, hogy a 0 és $n-1$ fokszám egyszerre nem léphet fel, hiszen izolált pont nem lehet egy olyan gráfban, amelyben van olyan csúcs, amely minden másikkal össze van kötve! Összességében tehát legfeljebb $n-1$ darab különböző fokszám léphet fel az n számú csúcsnál, így szükségképpen lesz legalább két azonos fokszámmal bíró csúcs.

b) Ebben az esetben nem feltétlenül teljesül az a) állítás, erre az 5.6. ábra mutat egy egyszerű példát 4 főből álló társaság esetén.

Bebizonyítható, hogy bármely $n \geq 3$-ra adható ellenpélda.

5.7. ábra Többszörös él

Definíció Ha a gráf két csúcsa több éllel is össze van kötve, akkor a két csúcs közötti **többszörös élről** beszélünk. Szokás ugyanerre a **párhuzamos élek** elnevezést is használni.



5.8. ábra Hurokél

Definíció Ha egy él két végpontja azonos, akkor **hurokélnek** nevezzük. A csúcs fokszámát ilyenkor 2-nek vesszük.

Definíció Azt a gráfot, amely nem tartalmaz sem hurokélt, sem párhuzamos éleket, **egyszerű** vagy **ismeretségi gráf**nak hívjuk.

A 3. példa megoldásával bebizonyítottunk egy fontos állítást!

Tétel Egy egyszerű gráfban mindig van két olyan csúcs, amelyek fokszáma egyenlő.

4. példa Létezik-e olyan 8 fős társaság, amelyben az egyes emberek a többiek közül pontosan 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5 másikat ismernek?


5.9. ábra Társaság

Megoldás:
Tegyük fel, hogy van ilyen társaság! A társaságnak megfelelő gráf minden éle egy-egy ismeretségnek felel meg. Mivel minden élnek két vége van, ezért a csúcsok fokszámainak összege egyenlő az élek számának kétszeresével! Esetünkben a fokszámok összege 29, ami páratlan, ezért nem lehet az élek számának kétszerese. Ellentmondásra jutottunk, így a válasz: nem.

A 4. példa megoldása során tett egyszerű megállapítással, hogy ti. minden élnek két vége van, be is bizonyítottuk az alábbi tételt:

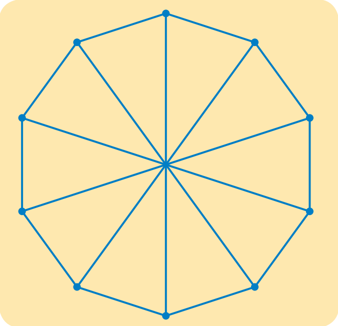
Tétel Fokszámtétel: egy véges gráfban a fokszámok összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

Egy további egyszerű észrevétel is nyomban adódik.

Tétel Egy véges gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.

Bizonyítás:
Mivel minden csúcs fokszáma vagy páros, vagy páratlan természetes szám, és a fokszámok összege páros, ez csak úgy teljesülhet, ha igaz a tételben megfogalmazott összefüggés.

5. példa a) Van-e olyan 11 főből álló társaság, amelyben mindenki pontosan három embert ismer?
b) Van-e olyan 10 főből álló társaság, amelyben mindenki pontosan három embert ismer?



5.10. ábra 5. példa b) részéhez tartozó gráf

Megoldás:
a) Tegyük fel, hogy van ilyen társaság! Mivel a fokszámok összege páratlan, ezért máris ellentmondásra jutottunk, tehát a válasz: nincs.
b) Képzeljük el azt a gráfot, melynek pontjai egy szabályos tízszög csúcsai! A gráf élei legyenek a tízszög oldalai, valamint a szemközti csúcsokat összekötő átlók (a szabályos tízszög köré írt körének átmérői). Az ennek az ismeretségi gráfnak megfelelő társaság teljesíti a követelményeket.

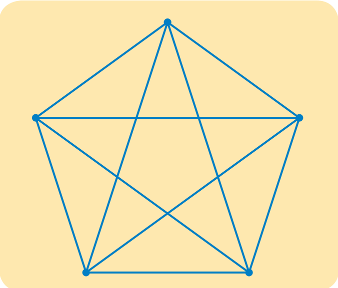
6. példa Egy 11 fős társaságban mindenki ismer mindenkit. Hány ismeretség van a társaság tagjai között?

Megoldás:
Mivel minden ember pontosan 10 másikat ismer, továbbá minden ismeretség 2 emberhez tartozik egyszerre, ezért összesen

$$\frac{11\cdot 10}{2}=55$$

ismeretség van a társaság tagjai között.

Definíció Az olyan egyszerű gráfot, melynek bármely két csúcsát él köti össze, **teljes gráfnak** nevezzük.



5.11. ábra 5 pontú teljes gráf

A 6. példát és a megoldásában látott gondolatmenetet a gráfok nyelvén elmondva azonnal adódik a következő:

Tétel Egy n csúcsú teljes gráf éleinek száma $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Egy 5 pontú teljes gráfra példa az 5.11. ábra.

7. példa Igazoljuk, hogy egy társaságban van két olyan ember, akik ugyanannyi embert *nem ismernek* a többiek közül!

Megoldás:
Tekintsük azt a gráfot, melynek csúcsai a társaság tagjai, két csúcsot pedig akkor kössünk össze éllel, ha a nekik megfelelő emberek *nem ismerik* egymást! Ha az így kapott gráfra alkalmazzuk azt a

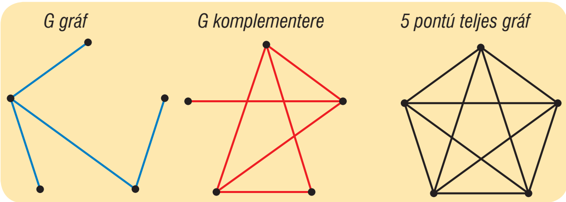
tételt, mely szerint egy egyszerű gráfban mindig van két olyan csúcs, amelynek fokszáma egyenlő, akkor adódik az állítás.

Hasonlítsuk össze azt a két gráfot, melyet a 3. a) példában, illetve az előző példában értelmeztünk ugyanazt a társaságot tekintve! Figyeljük meg, hogy az egyik gráfban pontosan akkor van összekötve két csúcs, amikor a másikban nincs.

Definíció Ha két egyszerű gráf csúcsai ugyanazok, de az egyik gráfban pontosan akkor van összekötve két csúcs, amikor a másikban nincs, akkor azt mondjuk, hogy a **két gráf egymás komplementere**.

Jelölés: a G gráf komplementere $\overline{G}$.

Könnyű belátni, hogy egy n csúcsú egyszerű gráfnak és komplementerének egyesítése az n csúcsú teljes gráf. Az 5.12. ábra példát mutat erre $n = 5$ esetén.



5.12. ábra Komplementer

8. példa Egy körmérkőzéses tornán 7 csapat vesz részt. (A **körmérkőzéses lebonyolítás** esetén minden csapat minden másikkal pontosan egyszer játszik.)

a) Hány mérkőzésre kerül sor összesen?

b) Igazoljuk, ha egy mérkőzés időtartama 1 óra, és 3 pálya áll rendelkezésre, akkor a torna lebonyolítható 7 óra alatt, de kevesebb idő alatt nem!

Megoldás:

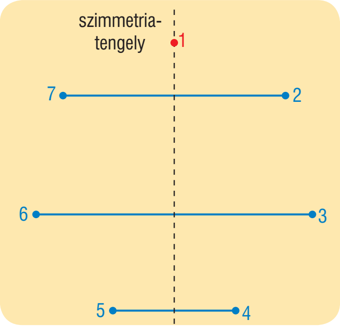
a) A problémához rendelt gráf csúcsai legyenek a csapatok, a gráf élei pedig a csapatok közötti mérkőzések. Világos, hogy egy 7 pontú teljes gráf éleinek számát kell meghatároznunk, ami

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

b) Mivel egy mérkőzéshez 2 csapat tartozik, ezért 1 óra alatt 3 mérkőzést tudnak legfeljebb lejátszani a 3 pályán, ezért legalább 7 óra kell a torna megrendezéséhez, hiszen 21 mérkőzésre kerül sor összesen.

5.13. ábra Mérkőzés

Egyáltalán nem könnyű azonban látni, hogyan szervezhetők meg az egyes fordulók. Helyezzük el a 7 csapatot egy szabályos hétszög csúcsaiba és az óramutató járásának megfelelően számozzunk meg őket! Ennek a szabályos hétszögnek éppen 7 darab szimmetriatengelye van, melyeket annak a csapatnak a számával lássunk el, amelynek megfelelő csúcson átmennek. Ezek után a k-adik fordulóban játszanak egymással azok a csapatok, melyek a k-adik tengelyre vonatkozóan szimmetrikusan helyezkednek el. (A tengelyen lévő csapat nem játszik.) Mivel bármely két csúcshoz létezik pontosan egy tengely, melyre nézve helyzetük szimmetrikus és egy csapat 6 meccset játszik, így 7 forduló, vagyis 7 óra alatt a torna lebonyolítható.



5.14. ábra Az 1. fordulóban játszó csapatok

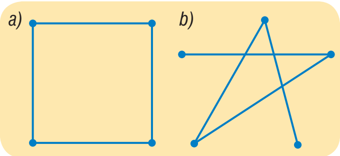
Az 5.14. ábrán az 1. fordulónak megfelelő helyzet látható. A mérkőzések: 7-2, 6-3, 5-4. A további fordulók:
2. forduló: 1-3, 7-4, 6-5,
3. forduló: 2-4, 1-5, 7-6,
4. forduló: 5-3, 6-2, 7-1,
5. forduló: 6-4, 7-3, 1-2,
6. forduló: 7-5, 1-4, 2-3,
7. forduló: 6-1, 5-2, 4-3.

A megoldásból az is kiderül, hogy $2n+1$ számú csapat esetén ugyanilyen módszerrel szervezhető meg a minimális idejű lebonyolítás.

Oldjuk meg!

1. Igazoljuk, hogy minden poliédernek van legalább két olyan csúcsa, amelyből ugyanannyi él indul ki!

2. Igazoljuk, hogy minden poliédernek van két azonos oldalszámú lapja!

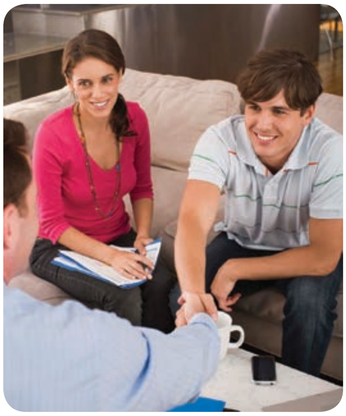


5.15. ábra A 3. feladat gráfjai

3. Rajzoljuk meg az 5.15. ábrán látható gráfok komplementerét!

4. Van-e olyan 6 emberből álló társaság, amelyben az egyes emberek a többiek közül pontosan
a) 2, 2, 3, 3, 3, 4, b) 2, 2, 3, 3, 5, 5,
c) 2, 3, 3, 4, 5, 5, d) 2, 3, 4, 5, 5, 5,
másikat ismernek?

5. Egy körmérkőzéses tornán most minden csapatnak 3 mérkőzése van hátra, eddig 48 mérkőzés fejeződött be.
a) Hány csapat vesz részt a tornán?
b) Hány mérkőzést rendeznek összesen?
(A torna során mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik.)

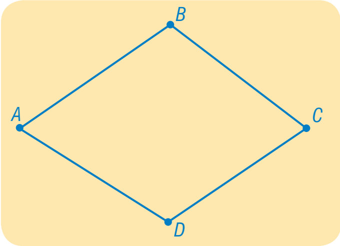


5.16. ábra Vendégségben...

6. Egy bajnokságban összesen 900 pontot osztottak ki a csapatok között. A győzelem 3, a döntetlen 1, a vereség 0 pontot ért. Tudjuk, hogy éppen annyi döntetlen született, mint ahány csapat van. Hány csapat vett részt a bajnokságon, ha mindenki mindenkivel 2 mérkőzést játszott?

7. Tamás 8 embert hívott meg magához vendégségbe. A vendégek közül néhányan kezet fogtak egymással, illetve a házigazdával. (Bármely két ember legfeljebb egyszer fogott kezet.) Amikor megszámolták, hogy ki hányszor fogott kezet, kiderült, hogy a vendégek közül mindenki különböző számú emberrel fogott kezet. Hányszor fogott kezet Tamás?
Fogalmazzunk meg az egyszerű gráfokra vonatkozó tételt a feladat alapján!

8. Egy estélyen 20 ember vesz részt, mindenki legalább 10 másikat ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan ember: *A*, *B*, *C* és *D*, hogy *A* ismeri *B*-t, *B* ismeri *C*-t, *C* ismeri *D*-t és *D* ismeri *A*-t! (Az ismeretség kölcsönös.)



5.17. ábra *A* ismeri *B*-t...

9. Igazoljuk, hogy $2n$ számú csapat körmérkőzéses tornájának lebonyolítása $2n-1$ fordulóban megszervezhető!

10. a) Egy szabályos hatszög oldalait és átlóit két színnel kiszíneztük. Igazoljuk, hogy bármely színezés mellett keletkezik egyszínű háromszög!

b) Bizonyítsuk be, hogy egy 6 csúcsú egyszerű gráf vagy a komplementere tartalmaz három olyan csúcsot, melyek közül bármelyik kettőt él köti össze!

Mi a kapcsolat az a) és b) feladatok között? Készítsünk ez alapján további feladatot a fenti állításra!

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: Gráfok fejezet feladatai

6. Összefüggő gráf, út, kör, részgráf, fa

A következő problémát néhány évvel ezelőtt a matematika OKTV 1. fordulójában tűzték ki.

1. példa Egy megyében 32 település van és a települések között 466 db út. (Egy út pontosan két települést köt össze, és két település közt legfeljebb egy út található). Bizonyítsuk be, hogy bármely településről eljuthatunk egy másik településre az utakat felhasználva!

Megoldás:
Feleljenek meg a települések egy gráf csúcsainak, az utak pedig a gráf éleinek! A feladat szövegéből következik, hogy egyszerű gráfról van szó. Mivel a 32 pontú teljes gráfnak $\frac{32\cdot 31}{2}=496$ éle van, ezért ebből arra következtethetünk, hogy a települések egy részéből sok út vezet ki. Pontosabban: azt állítjuk, hogy a gráfban van olyan *A* csúcs, ahonnan legalább 30 él vezet ki. Ellenkező esetben ugyanis legfeljebb $\frac{32\cdot 29}{2}=464$ éle van a gráfnak,


6.1. ábra Települések és utak

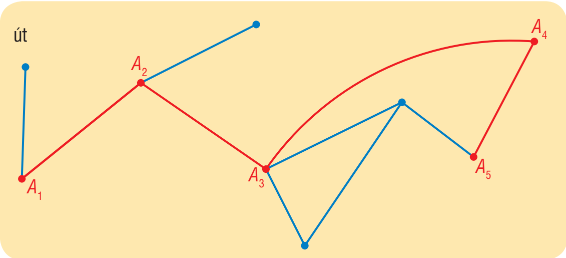
ami nem lehet, hiszen tudjuk, hogy az élek száma 466. Ha az *A* csúcs fokszáma 31, akkor készen vagyunk, hiszen minden más csúccsal össze van kötve, és ekkor *A* közbeiktatásával bármelyik csúcsból bármelyikbe biztosan eljuthatunk. Ha az *A* fokszáma 30, akkor pontosan egy másik csúccsal nincs összekötve, ami legyen *B*. A *B* csúcs azonban biztos össze van kötve az *A*-val összekötött csúcsok közül legalább eggyel, ellenkező esetben ui. a gráfnak legfeljebb $\frac{31\cdot 30}{2}=465$ éle lehetne (31 pontú teljes gráf éleinek száma), ami ellentmondásra vezet.
Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Definíció Ha egy gráf tetszőleges csúcsából az élek mentén eljuthatunk bármely más csúcsba, akkor azt mondjuk, hogy a **gráf összefüggő**.

Ezt a szemléletes meghatározást néhány további fogalom bevezetése után precízebben is kimondjuk.
Az 1. példa annak a gráfelméleti tételnek az alkalmazása, mely szerint: ha egy *n* csúcsú egyszerű gráfnak $(n\geq 3)$ legalább

$$\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}+1=\frac{n^2-3n}{2}+2$$

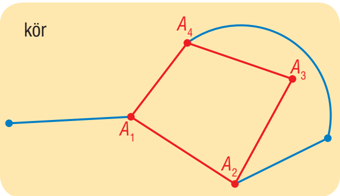
éle van, akkor a gráf összefüggő (*n* = 32 volt a feladatban).



6.2. ábra Az út

Definíció A gráf különböző csúcsainak egy olyan $A_1, A_2, \ldots A_k, A_{k+1}$ sorozatát, amelyben minden A_i csúcsot él köt össze A_{i+1}-gyel, **útnak** nevezzük.

Az **út hossza** az út által tartalmazott élek száma. A gráf egyetlen élét is útnak tekintjük, melynek a hossza 1.



6.3. ábra Egy kör

Definíció A gráf csúcsainak egy olyan $A_1, A_2, \ldots A_k, A_{k+1}$ sorozatát, amelyben minden A_i csúcsot él köt össze A_{i+1}-gyel, továbbá $A_1 = A_{k+1}$, de a köztük lévő csúcsok különbözők, **körnek** nevezzük.

A **kör hossza** az általa tartalmazott élek száma. Egy kör legalább 3 csúcsot tartalmaz és hossza legalább 3.

Definíció Egy gráfot **összefüggőnek** nevezünk, ha bármely két csúcsa között van út.

Az út és a kör (ha van a gráfban) a gráf részei. Általában is beszélhetünk egy G gráf valamely részéről.

Definíció Egy G gráf **részgráfja** minden olyan gráf, amelyet úgy kaphatunk, hogy G élei és csúcsai közül bizonyosakat elhagyunk.

2. példa Egy 10 tagú titkos társaság tagjai még egymást sem ismerik feltétlenül. Tudjuk viszont, hogy bármely tagtól származó üzenet bármely taghoz elér vagy közvetlenül, vagy a többiek közül néhányon keresztül. Igazoljuk, ha a társaság tagjai között 10-nél kevesebb ismeretség van, akkor van közöttük olyan, aki csak egy másik tagot ismer!

Megoldás:
Tegyük fel indirekt módon, hogy mindenki legalább 2 másik tagot ismer! Ekkor a társaságot leíró gráf csúcsainak fokszámösszege legalább $10 \cdot 2 = 20$. A 2. tétel (fokszámtétel) szerint az élek számának kétszerese tehát legalább 20, ami ellentmond annak, hogy a gráfban 10-nél kevesebb él van!

6.4. ábra Titkos társaság

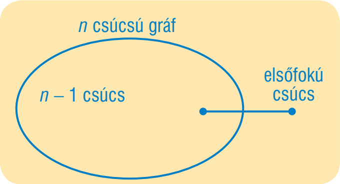
A példa megoldásának menete mutatja, hogy általában is igaz a következő tétel.

Tétel Ha egy n csúcsú összefüggő gráfban n-nél kevesebb él van, akkor a gráf tartalmaz elsőfokú csúcsot.

3. példa Legalább hány telefonvonalat kell létesíteni n számú telefonközpont között, ha azt akarjuk, hogy bármelyik központból bármelyikbe lehessen telefonálni?

Megoldás:
A gráfok nyelvén a feladat azt kérdezi, hogy legalább hány éle van egy n csúcsú összefüggő gráfnak. (A gráf pontjai a központok, az élek a telefonvonalak.) Világos, hogy az egyik pontot $n-1$ éllel összekötve a többivel összefüggő gráf adódik. Most igazoljuk, hogy ennél kevesebb éllel nem lehet összefüggővé tenni a gráfot. A 2. példa után tett megfigyelés miatt n számúnál kevesebb él esetén biztosan van elsőfokú csúcs a gráfban. Használjunk teljes indukciót! Ha $n=1$, illetve $n=2$, akkor

6.5. ábra Telefonközpont



6.6. ábra Minimális élszám

az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az állítás bármely $n-1$ csúcsú gráfra igaz! Az *n* csúcsú összefüggő gráf biztosan létező elsőfokú csúcsát a hozzá tartozó éllel elhagyva, a kapott $n-1$ csúcsú gráfnak az indukciós feltevés szerint legalább $n-2$ éle van, így az *n* csúcsúnak legalább $n-1$ éle lesz, amint azt állítottuk. Ezzel egy fontos megállapítást igazoltunk.

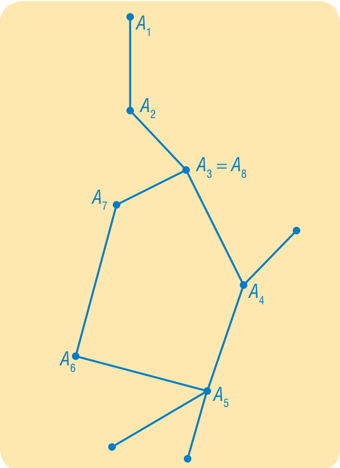
Tétel Az *n* csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak legalább $n-1$ éle van.

6.7. ábra Asztal körül

4. példa Egy társaságban mindenkinek van legalább két ismerőse. Bizonyítsuk be, hogy van a társaságban néhány (legalább három) ember, akik leültethetők egy kör alakú asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön!

Megoldás:
Legyen a társaság egyik tagja A_1. Tekintsük az egyik ismerősét, őt jelöljük A_2-vel. Az A_2-nek A_1-től különböző egyik ismerősét jelölje A_3 és így tovább: A_i-nek A_{i-1}-től különböző ismerőse legyen A_{i+1}! (Ilyen biztosan van, hiszen minden ember rendelkezik legalább 2 ismerőssel.) Mivel a társaság véges sok emberből áll, ezért előbb-utóbb olyan emberhez érünk, aki már szerepelt a felsorolásban. Ha A_k az első olyan, aki már korábban szerepelt, azaz $A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n, A_{n+1} = A_k$, akkor üljenek le az asztalhoz sorrendet tartva a társaság $A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n, A_{n+1} = A_k$-val jelölt tagjai!

A példát átfogalmazva gráfokra, a következő eredményt kaptuk:



6.8. ábra Van kör ebben a gráfban

Tétel Ha egy egyszerű gráfban minden csúcs fokszáma legalább kettő, akkor a gráf tartalmaz kört.

Definíció A körmentes, összefüggő, egyszerű gráfot **fának** nevezzük.

A tétel alapján világos, hogy ha egy egyszerű, összefüggő gráf nem tartalmaz kört, akkor van benne elsőfokú csúcs. Mindezek, valamint a fákat tartalmazó 6.9. ábra alapján megsejthető egy nagyon fontos állítás.

Tétel Az *n* csúcsú fának $n-1$ éle van.

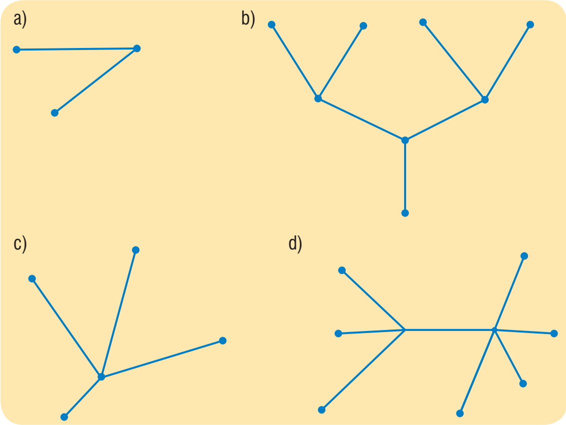
Bizonyítás:
A 3. példa megoldásában leírt teljes indukciós gondolatmenetet alkalmazhatjuk most is, hiszen minden fában van elsőfokú csúcs!

Ha pontokat akarunk összekötni a lehető legkevesebb él felhasználásával, akkor fát kell megadnunk. Ha egy egyszerű gráf összefüggő és tartalmaz kört, akkor a kör valamely élét elhagyva a gráf még mindig összefüggő marad. Mivel a kapott gráfra az eljárás ismételhető, de a gráfnak véges sok éle van, így az eljárás előbb-utóbb leáll. Ekkor egy fát kapunk. Ebből következik, hogy minden egyszerű, összefüggő G gráfnak van ún. **feszítő fája**, azaz olyan fa részgráfja, amely G összes pontját tartalmazza. Könnyű látni, hogy egy összefüggő gráfnak általában több feszítő fája is van.

Nehéz kérdésnek bizonyult, hogy n csúcsot hányféleképpen lehet fává összekötni. (A csúcsokat pl. számozással megkülönböztetjük egymástól.) **Cayley tétele** szerint az n csúcsú fák száma n^{n-2}.

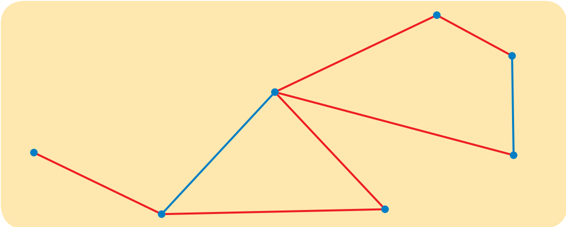
A fagráfoknak igen nagy a gyakorlati jelentősége. Fagráfok jelennek meg pl. genetikafeladatokban (öröklődés), összefüggő hálózatok tervezésében (közművezetékek, internet, chipek), szállítási problémák során.

Végezetül a gráfokkal kapcsolatos, történeti szempontból első problémáról szólunk, melyet L. Euler oldott meg 1736-ban.



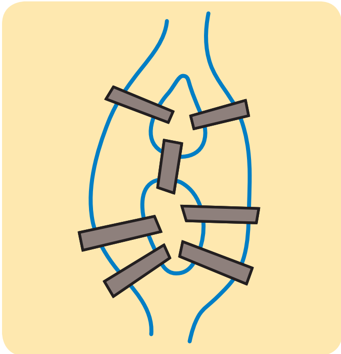
6.9. ábra Fagráfok

6.10. ábra Fák



6.11. ábra Feszítő fa

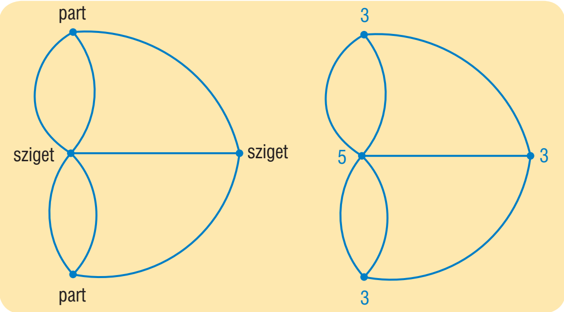
5. példa A Königsberg városán átmenő folyón két sziget található. A partok és a szigetek között abban az időben, amikor Euler élt, volt 7 híd, az ábra szerint. A város lakói azzal a kérdéssel fordultak hozzá, hogy létezik-e olyan séta, amely során az összes hídon pontosan egyszer haladnak át.



6.12. ábra Königsberg hídjai

Megoldás:
Euler észrevette, hogy a séta szempontjából a két part és a két sziget egy-egy pontnak tekinthetők, a hidak pedig a közöttük futó éleknek. Másképpen fogalmazva: az azonos parton, illetve azonos szigeten lévő hídfők egyetlen ponttá vonhatók ösz-

sze. A problémához tartozó gráf látható a 6.13. ábrán. A városlakók problémája a következőképpen fogalmazható át. Végig lehet-e járni a gráf éleit valamely csúcsból indulva úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladunk?

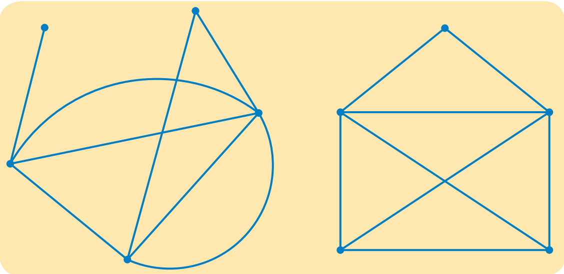


6.13. ábra Az 5. példa gráfja

Tekintsük a csúcsok fokszámait! Ha egy csúcs fokszáma páratlan, akkor ott a séta kezdő- vagy végpontjának kell lennie, hiszen egy adott csúcson való áthaladáskor két élt „használunk el” a csúcshoz tartozó élek közül. Ebből következik, hogy ha létezik megfelelő bejárás, akkor a gráfban vagy minden csúcs fokszáma páros (**zárt bejárás**: a kezdő- és végpont közös), vagy pontosan két páratlan fokszámú csúcs van (**nyílt bejárás**: a kezdő- és végpont különböző). A königsbergi hidak problémáját leíró gráfra ezek egyike sem érvényes, ezért a feltett kérdésre tagadó választ kell adni. Mivel a gondolatmenet általánosan is alkalmazható, így szükséges feltételt nyertünk arra, hogy egy összefüggő gráfban mikor létezhetnek a fent leírt típusú bejárások. Euler emlékére ezek elnevezése: zárt, illetve nyílt **Euler-séta**. Ő egyébként igazolta, hogy a feltételek elegendők, azaz teljesülésük esetén létezik zárt, illetve nyílt bejárás az összefüggő gráfban.

Oldjuk meg!

1. Bizonyítsuk be az 1. példa után szereplő tételt! (Használhatjuk a példa megoldásában leírt gondolatmenetet.)
2. Igazoljuk, hogy bármely fagráfban van legalább két elsőfokú csúcs!
3. Adott öt pont úgy, hogy nincs közöttük három egy egyenesen. Négy egyenes szakaszból álló hálózattal szeretnénk összekötni őket, a szakaszok kereszteződése megengedett.
   Bizonyítsuk be, hogy összesen 125 ilyen hálózat készíthető! (A pontokat megkülönböztetjük egymástól pl. számozással.)
4. Egy országban két vasúttársaság van, amelyek együttesen bármely két település között létesítettek legalább egy járatot. Igazoljuk, hogy az egyik társaság járatainak megszüntetésével még mindig eljuthatunk vasúton az ország egyik településéről egy tetszőleges másikba!
   Fogalmazzuk meg a feladat állítását a gráfok nyelvén!



6.14. ábra A 7. feladat gráfjai

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú összefüggő, egyszerű gráfnak n éle van, akkor pontosan egy kör van benne!
6. Anna és Béla a következő gráfjátékot játssza n ponton: felváltva húznak be éleket, és az veszít, aki kört zár be. Kinek van nyerő stratégiája?
7. Létezik-e nyílt vagy zárt Euler-séta a 6.14. ábrán ábrázolt gráfok élein?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: Gráfok fejezet feladatai

VI. fejezet
Valószínűség-számítás és statisztika

Esélyes, esélytelen?

Valószínűség-számítás és statisztika

1. Véletlen jelenségek


1.1. ábra Nofertari

A Homo sapiens megjelenése után az „értelmes ember” idővel homo ludensszé (játszó emberré) is vált. A játékok között már az ókorban is fellelhetőek voltak az úgynevezett szerencsejátékok. Az 1.1. ábrán Nofertari egyiptomi királyné a szenet elnevezésű táblás játékot játssza. Ebben a játékban a dobókocka elődjei, a dobópálcák határozták meg a véletlen lépéseket. Az ősidők óta népszerű **szerencsejátékok**ban olyan jelenségek kapnak szerepet, melyekkel kapcsolatos történéseket nem lehet előre biztosan meghatározni (**véletlen jelenségek**). Ilyenek például a kockajátékok, a kártyajátékok, a rulett stb.

A komoly játékosok az eredményeikről feljegyzéseket készítenek, és az így kapott adatrendszereket vizsgálatoknak vetik alá.

Nézzünk meg egy ilyen adatrendszert!

Egy piros és egy kék dobókockát dobtunk fel egyszerre többször, és a következő eredményeket (**kimenetelek**et) kaptuk:

(**6**,**1**) (**5**,**6**) (**1**,**1**) (**2**,**2**) (**2**,**2**) (**3**,**5**) (**2**,**1**) (**1**,**2**) (**4**,**1**) (**1**,**3**) (**4**,**2**)
(**6**,**1**) (**5**,**4**) (**6**,**5**) (**2**,**2**) (**3**,**5**) (**5**,**5**) (**1**,**4**) (**5**,**5**) (**6**,**2**) (**3**,**3**) (**3**,**1**)
(**4**,**6**) (**2**,**4**) (**5**,**3**) (**3**,**3**).

A kapott adatrendszer a korábban már megismert statisztikai módszerekkel vizsgálható. Az egyes kockával való dobások **gyakorisági** táblázata:

Dobások		
értéke	**gyakorisága**	
	piros kocka	**kék kocka**
1	4	6
2	5	6
3	5	4
4	3	3
5	5	5
6	4	2

A statisztikai közepek és szóródásmértékek:


1.2. ábra Piros és kék kockával dobtunk

Statisztikai jellemzők	Piros kocka	Kék kocka
számtani közép	3,46	3,04
módusz	2, 3 és 5	1 és 2
medián	3	3
terjedelem	5	5
szórás	1,69	1,65

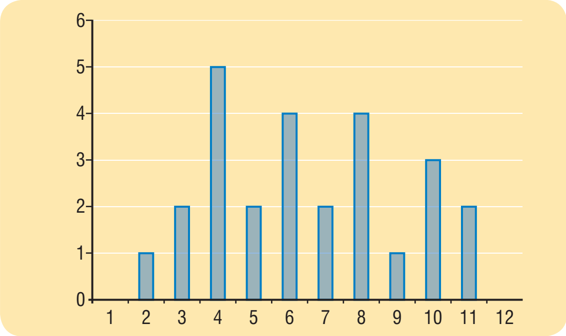
(A **terjedelem** a maximális és a minimális adat különbsége. A **szórás** az átlagtól való eltérések négyzetei átlagának négyzetgyöke.)

A következőkben a két kockával dobott számok összegét vizsgáljuk. Az előző dobássorozatban az összegek:

7, 11, 2, 4, 4, 8, 3, 3, 5, 4, 6, 7, 9,
11, 4, 8, 10, 5, 10, 8, 6, 4, 10, 6, 8, 6.

Erről az adatsorról is készítsük el a fenti táblázatokat azzal a kiegészítéssel, hogy az egyes összegek (események) **relatív gyakoriság**át is kiszámoljuk. (A relatív gyakoriság a gyakoriság és a kísérletek számának hányadosa.)

Esemény	**Gyakoriság**	**Relatív gyakoriság**
2	1	0,0385
3	2	0,0769
4	5	0,1923
5	2	0,0769
6	4	0,1538
7	2	0,0769
8	4	0,1538
9	1	0,0385
10	3	0,1154
11	2	0,0769
12	0	0

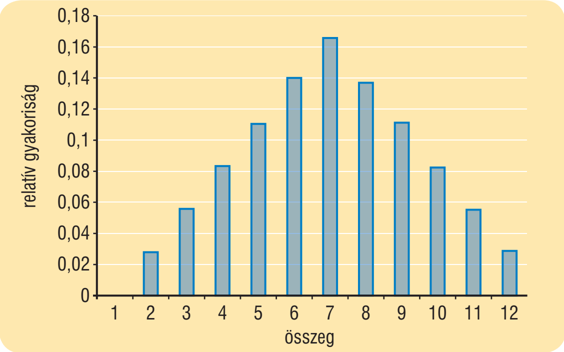


1.3. ábra Két kockával dobott számok összegeinek gyakoriságai

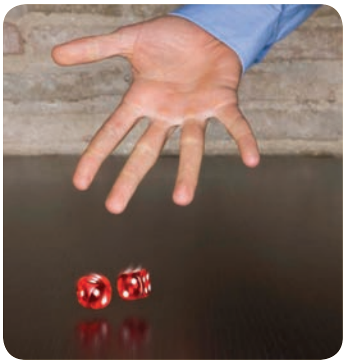
Statisztikai jellemzők	**26 dobás után**
számtani közép	6,5
módusz	4
medián	6
terjedelem	9
szórás	2,59

26 dobás nyilvánvalóan nem ad túl sok információt a problémáról, több kísérletre van szükség. Az alábbi táblázat több dobásból álló kísérletsorozatok esetében adja meg az egyes események relatív gyakoriságát. (A kísérleteket elvégző program megtalálható a könyvhöz tartozó digitális anyagban.)

	Relatív gyakoriság				
Esemény	100 dobás után	500 dobás után	1000 dobás után	10 000 dobás után	100 000 dobás után ≈
2	0,0300	0,0240	0,0350	0,0278	0,0282
3	0,0300	0,0400	0,0500	0,0543	0,0564
4	0.0700	0,0840	0,0700	0,0805	0,0833
5	0,1100	0,1260	0,1140	0,1115	0,1110
6	0,1400	0,1500	0,1450	0,1371	0,1399
7	0,1500	0,1580	0,1790	0,1763	0,1658
8	0,1900	0,1560	0,1480	0,1337	0,1373
9	0,1700	0,1120	0,0960	0,1134	0,1118
10	0,0600	0,0660	0,0800	0,0885	0,0823
11	0,0500	0,0560	0,0560	0,0523	0,0557
12	0,0000	0,0260	0,0270	0,0246	0,0285



1.4. ábra Két kockával dobott számok összegeinek relatív gyakoriságai 100 000 dobás után



1.5. ábra Dobás két kockával

1. példa Vizsgáljuk az előző táblázat utolsó oszlopával leírt (100 000 dobás) kísérletsorozatot!

Adjuk meg annak a relatív gyakoriságát, hogy
a) a két kockával dobott számok összege páros volt;
b) a két kockával dobott számok összege páros és legalább 5 volt;
c) a két kockával dobott számok összege páros vagy prím volt;
d) a két kockával dobott számok összege legfeljebb 4 volt;
e) a két kockával dobott számok összege 14 volt;
f) a két kockával dobott számok összege legfeljebb 14 volt;
g) a két kockával dobott számok összege páros, de legfeljebb 4;
h) a két kockával dobott számok összege kisebb, mint 3 és nagyobb, mint 10;
i) a két kockával dobott számok összege kisebb, mint 3 vagy nagyobb, mint 10.

Megoldás:

a) $0,0282+0,0833+0,1399+0,1373+0,0823+0,0285=0,4955$

b) $0,1399+0,1373+0,0823+0,0285=0,388$

c) $0,0282+0,0833+0,1399+0,1373+0,0823+0,0285+0,0564+0,1110+0,1658+0,0557=$
$=0,8884$

d) $0,0282+0,0564+0,0833=0,1679$

e) 0

f) 1

g) $0,0282+0,0833=0,1115$

h) 0

i) $0,0282+0,0557+0,0285=0,1124$

Az utóbbi táblázat oszlopainak vizsgálata azt sejteti, hogy a kísérletek számának növelésével az események relatív gyakorisága egyre nagyobb eséllyel egy, az **eseményre jellemző szám** „közelében van”. Ez azt sugallja, hogy a véletlen jelenségek esetében is törvényszerűségek érvényesülnek, és ezek a törvényszerűségek matematikai eszközökkel vizsgálhatók.

Erre a meggyőződésre jutott a XVII. században élő de Méré lovag, aki szerencsejátékos volt, kockadobással kapcsolatos kérdésével Blaise Pascalhoz fordult.

Pascal foglalkozni kezdett a kérdéssel, sőt levelezésbe kezdett róla Pierre de Fermat-val. (Fermat-val már megismerkedhettünk a 9. osztályos tanulmányaink során.)

2. Valószínűség-számítás


2.1. ábra Blaise Pascal (1623–1662)

Sokan a XVII. században felmerült kockadobásra vonatkozó kérdéshez kapcsolják a véletlen jelenségek tanulmányozására is alkalmazható matematikai tudományág, a **valószínűség-számítás** létrejöttét. A következőkben ennek a tudományágnak az alapjaival ismerkedünk meg.

Foglaljuk össze, hogy a véletlen jelenségek vizsgálata közben eddig milyen fogalmakkal találkoztunk!

A véletlen jelenségek vizsgálatához **kísérletek**et végzünk (sokszor, lényegében változatlan körülmények között).

A kísérlet **kimenetelei**ből halmazokat alkotunk, ezek az **események**. Az eseményeknek **gyakoriságuk** és **relatív gyakoriságuk** van. Azt is tapasztalhatjuk, hogy minél többször végezzük el a kísérletet, annál nagyobb az esélye annak, hogy az események relatív gyakorisága egy, az **eseményre jellemző szám** „közelében van”. Ez a szám a [0;1] intervallum eleme.

A feladat tehát adott. Olyan matematikát kell alkotni, amely leírja a fentiekben összefoglaltakat. Más szóval olyan **matematikai modellt** kell alkotni, amely jól írja le a véletlen jelenségekkel kapcsolatos tapasztalatainkat. (*A zárójelbe tett, dőlt betűs megjegyzések nem tartoznak a modellalkotáshoz, csak utalnak a véletlen jelenségekhez való kapcsolódásra*.)

2.1. Az események

Definíció Legyen H egy nemüres halmaz! (*A kísérlet során a kimenetelek halmazát vizsgáljuk.*)
A H halmaz neve: **eseménytér**.
Az eseménytér részhalmazait **esemény**eknek nevezzük[1] (*pl. az 1.1. példa a) része*).
Az $\varnothing \subseteq H$, ezért az Ø esemény, a neve **lehetetlen esemény** (*pl. az 1.1. példa e) része*).
A $H \subseteq H$, ezért a H esemény, **a neve biztos esemény** (*pl. az 1.1. példa f) része*).
A H egyelemű részhalmazai az **elemi esemény**ek.


2.2. ábra Lehetetlen esemény

A fenti definíciókból már következik, hogy a továbblépéshez a 9. osztályban tanult **halmazelméleti ismeretek** szükségesek. Az események közötti **műveletek**:

[1] Az itt megadott definíció nem teljesen pontos, a felsőoktatásban majd pontosítjuk. Létezik olyan eseménytér, melynek nem minden részhalmaza esemény. Lásd később: geometriai valószínűségi mező.

Definíció Legyen H egy eseménytér, A és B tetszőleges események a H-n!
a) Események összege: $A+B=A\bigcup B$ (*lásd: az 1.1. példa c) része*).
b) Események szorzata: $A\cdot B=A\bigcap B$ vagy $AB=A\bigcap B$ (*lásd: az 1.1. példa b) része*).
c) Események különbsége: $A-B=A\setminus B$ (*lásd: az 1.1. példa g) része*).
d) Komplementer esemény: $\overline{A}=H-A$ (*lásd: az 1.1. példa d) része*).
e) Ha $A\cdot B=\varnothing$, akkor A és B kizáró események (*lásd: az 1.1. példa h) része*).

Tekintettel arra, hogy az előző definíciókban kizárólag halmazelméleti fogalmakat használtunk, – a 9. osztályban tanultakra hivatkozva – bizonyíthatók a következő **műveleti tulajdonságok**:

Tétel Legyen H egy eseménytér, A, B és C tetszőleges események a H-n!
a) $A+B=B+A$ (Az események összeadása **kommutatív** művelet.)
b) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (Az események összeadása **asszociatív** művelet.)
c) $A+A=A$
d) $A+\varnothing=A$ (A lehetetlen esemény **egységelem** az összeadásra nézve.)
e) $A\cdot B=B\cdot A$ (Az események szorzása **kommutatív** művelet.)
f) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ (Az események szorzása **asszociatív** művelet.)
g) $A\cdot A=A$
h) $A\cdot\varnothing=\varnothing$ (A lehetetlen esemény **zéróelem** a szorzásra nézve.)
i) $A-B+A\cdot B=A$
j) $A+B=(A-B)+(A\cdot B)+(B-A)$
k) $\overline{\overline{A}}=A$ (Bármely esemény komplementerének komplementere önmaga.)
l) $\overline{\varnothing}=H$ (A lehetetlen esemény komplementere a biztos esemény.)
m) $\overline{H}=\varnothing$ (A biztos esemény komplementere a lehetetlen esemény.)
n) $\begin{matrix}\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}\\ \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}\end{matrix}$ (**de Morgan-azonosságok**)

2.3. **ábra** Biztos esemény

Definíció Legyen H egy eseménytér, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ olyan események a H-n, melyek páronként kizáróak, és $A_1+A_2+\ldots+A_n=H$! Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$-t teljes eseményrendszernek nevezzük.

2.2. A valószínűség

Most már csak az eseményekre jellemző, [0;1] intervallumba eső valós szám megadása hiányzik. Ennek pontos definícióját Andrej Nyikolajevics Kolmogorov adta meg akkor, amikor megfogalmazta a **Kolmogorov-axiómák**at:

Axiómák Legyen H egy eseménytér! Létezik az eseménytér eseményeinek halmazán értelmezett P függvény, amelyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

I. Bármely A eseményre $0 \le P(A) \le 1$.

II. $P(H) = 1$. (A biztos esemény valószínűsége 1.) *(Lásd az 1.1. példa f) része.)*

III. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként kizáró események, akkor $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$, ahol n egynél nagyobb pozitív egész szám. *(Lásd az 1.1. példa i) része.)*

2.4. ábra Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987)

Definíció A P függvény neve: **valószínűség**.

Nézzük meg ezen axiómák néhány következményét!

Tétel Tétel: $P(\emptyset) = 0$. (A lehetetlen esemény valószínűsége 0.) (*Lásd az 1.1. példa e) része.*)

Bizonyítás:

A h) műveleti tulajdonság szerint $\emptyset \cdot H = \emptyset$.

A d) műveleti tulajdonságból következően $\emptyset + H = H$.

A III. axióma alapján: $P(H + \emptyset) = P(H) + P(\emptyset)$.

A II. axióma szerint: $P(H) = 1 + P(\emptyset)$,

$1 = 1 + P(\emptyset)$,

$0 = P(\emptyset)$.

Tétel Legyen H egy eseménytér, A és B tetszőleges események a H-n. Ekkor $P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B)$.

Bizonyítás:

A műveletek definíciói miatt: $(A - B) \cdot (A \cdot B) = \emptyset$.

A III. axióma szerint: $P(A - B + A \cdot B) = P(A - B) + P(A \cdot B)$.

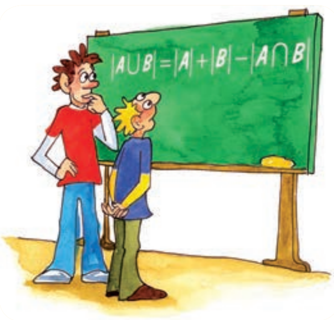
Az i) műveleti tulajdonság miatt: $P(A) = P(A - B) + P(A \cdot B)$,

$P(A) - P(A \cdot B) = P(A - B)$.

Tétel Legyen H egy eseménytér, A és B tetszőleges események a H-n. Ekkor $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. (Két esemény összegére vonatkozó szitaformula.)

Bizonyítás:

A műveletek definícióiból következően $A - B, A \cdot B$ és $B - A$ páronként kizáró események.



2.5. ábra Találkoztunk már a szitaformulával?

A III. axióma szerint:
$$P\big((A-B)+(A\cdot B)+(B-A)\big)=P(A-B)+P(A\cdot B)+P(B-A).$$
A j) műveleti tulajdonság alapján:
$$P(A+B)=P(A-B)+P(A\cdot B)+P(B-A).$$
Alkalmazva az előző tételt: $P(A+B)=P(A)-P(A\cdot B)+P(A\cdot B)+P(B)-P(A\cdot B)$,
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$
Nézzük meg, hogy három esemény összegének valószínűségéről tudunk-e valamit mondani! Alkalmazzuk az asszociativitást, a disztributivitást és a két esemény összegére vonatkozó szitaformulát!
$$P(A+B+C)=P\big((A+B)+C\big)=P(A+B)+P(C)-P\big((A+B)C\big)=P(A)+P(B)-P(AB)+$$
$$+P(C)-P(AC+BC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P\big((AC)(BC)\big)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$
Bebizonyítottuk a következő tételt:

Tétel Három esemény összegére vonatkozó szitaformula: legyen H egy eseménytér, A, B és C tetszőleges események a H-n!
Ekkor $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

Tétel Legyen H egy eseménytér, A tetszőleges esemény a H-n! Ekkor $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(Lásd: az 1.1. példa d) része.)

2.6. ábra Több esemény összegére vonatkozó szitaformula?

Bizonyítás:
A d) definícióból következően: $A\cdot\overline{A}=\varnothing$ és $A+\overline{A}=H$.

A III. axióma szerint: $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$,
$$P(H)=P(A)+P(\overline{A}).$$

A II. axiómából következően: $1=P(A)+P(\overline{A})$,
$$1-P(A)=P(\overline{A}).$$

Tétel Ha $A_1, A_2, ..., A_n$ teljes eseményrendszer H eseménytéren, akkor $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1$.

Bizonyítás:
A teljes eseményrendszer definíciója a II. és a III. axióma szerint:

$$1 = P(H) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

A most bizonyított tételekből is látszik, hogy a néhány egyszerű axiómával megadott valószínűség több esetben olyan viselkedést mutat, mint amit az **eseményre jellemző szám**ról gondolunk. A későbbiekben erre a kapcsolatra még visszatérünk.

Nézzünk most egy speciális eseményteret!

2.3. A klasszikus valószínűségi mező

Definíció Ha a H eseménytér nemüres véges halmaz, és minden elemi eseményének valószínűsége egyenlő, akkor ezt az eseményteret az eseményeivel és a köztük értelmezett műveletekkel (összeadás, szorzás, kivonás, komplementer) együtt **klasszikus valószínűségi mező**nek nevezzük.

A definíció következményeként két tételt bizonyítunk.

Tétel Ha a H klasszikus valószínűségi mező eseménytere, továbbá $|H| = n,$ ahol n pozitív egész szám, elemi eseményei: $E_1, E_2, \ldots, E_n,$ akkor $P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_n) = \frac{1}{n}.$

Bizonyítás:
$E_1, E_2, \ldots, E_n$ páronként kizáró események, és $E_1 + E_2 + \ldots + E_n = H.$

A III. axióma szerint: $P(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n).$

A definíció szerint: $P(H) = nP(E_1).$

A II. axiómából következően: $1 = nP(E_1),$

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_n) = \frac{1}{n}.$$

Tétel Ha a H klasszikus valószínűségi mező eseménytere, továbbá $|H| = n,$ ahol n pozitív egész szám, az A eseményre pedig igaz, hogy $|A| = k,$ ahol k pozitív egész szám, akkor $P(A) = \frac{k}{n}.$

Bizonyítás:
Legyenek az A elemi eseményei: $A_1, A_2, \ldots, A_k$! Ekkor igaz, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként kizáró események, és

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k = A.$$

A III. axióma szerint:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k).$$

2.7. ábra Direkt szorzat

Az előző tétel következtében:

$$P(A)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+....+\frac{1}{n},$$

$$P(A)=\frac{k}{n},$$

(avagy a kedvező elemi események számát osztjuk az összes elemi események számával).

Vizsgáljuk meg most a klasszikus valószínűségi mező modelljének segítségével a bevezető problémát (két kockával dobott számok összege)!

A kimenetelek felsorolása azt sugallja, hogy az eseménytér legyen az {1, 2, 3, 4, 5, 6} halmaz elemeiből képezhető rendezett elempárok halmaza (a halmaz önmagával vett **direkt szorzata**). Ennek számossága: $n=36$. (Feltételeztük, hogy a két kockával való dobáskor minden számpár dobásának valószínűsége egyenlő.) Foglaljuk táblázatba az egyes eseményekhez tartozó elemi eseményeket, azok számát (k) és a valószínűségüket!

Esemény	**Elemi események**	**Elemi események száma (k)**	**Valószínűség $\frac{k}{n}$**
2	(1;1)	1	$\frac{1}{36}\approx 0,0278$
3	(1;2), (2;1)	2	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\approx 0,0556$
4	(1;3), (2;2), (3;4)	3	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\approx 0,0833$
5	(1;4), (2;3), (3;2), (4;1)	4	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\approx 0,1111$
6	(1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5;1)	5	$\frac{5}{36}\approx 0,1389$
7	(1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1)	6	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\approx 0,1667$
8	(2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2)	5	$\frac{5}{36}\approx 0,1389$
9	(3;6), (4;5), (5;4), (6;3)	4	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\approx 0,1111$
10	(4;6), (5;5), (6;4)	3	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\approx 0,0833$
11	(5;6), (6;5)	2	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\approx 0,0556$
12	(6;6)	1	$\frac{1}{36}\approx 0,0278$

Vessük össze a valószínűségeket tartalmazó oszlopot a relatív gyakoriságokat tartalmazó táblázat oszlopaival (lásd: 1.4. ábra)! Látható, hogy (legalábbis ebben az esetben) a valószínűség tekinthető a − már sokszor emlegetett − eseményre jellemző számnak, azaz a probléma klasszikus valószínűségi modellel való vizsgálata jól írja le a véletlen jelenséget. Emiatt szoktuk azt is mondani, hogy az esemény valószínűsége megadja az esemény bekövetkezésének esélyét a kísérlet során.

A klasszikus valószínűségi mező definíciójában véges halmazok számosságai szerepelnek, melyek vizsgálatával a **kombinatorika** foglalkozik. (Természetes tehát, hogy az ilyen jellegű problémák megoldásához szükség van kombinatorikai ismeretekre. Lásd a Kombinatorika című fejezetet!)

2. példa Egy 17 fős informatikus tanulócsoport, melyben 3 lány van, részt vesz egy Forma–1 road show-n. A nézőtéren egy sorban, véletlenszerűen foglalnak helyet. Mennyi annak valószínűsége, hogy

a) a három lány egymás mellett foglal helyet;

b) két lány nem ül egymás mellett;

c) van legalább két olyan lány, akik egymás mellett ülnek;

d) a lányok középről nézik a bemutatót?

Megoldás:

Feltételezzük, hogy az egyenlő valószínűségű elemi események a csoport összes lehetséges sorrendjei, ezeknek száma 17! (17 elem **ismétlés nélküli permutáció**inak száma).

a) Tekintsük először a 3 lányt egyetlen elemnek, ekkor 15 különböző elem összes lehetséges sorrendjét kell meghatározni, ami 15!. Minden ilyen sorrendben a lányok még 3! = 6-féle sorrendben foglalhatnak helyet, így a kedvező esetek száma: 15! · 3!. Ebből következően a keresett valószínűség:

2.8. ábra Gyerekek a road show-n

$$P_a = \frac{15!\cdot 3!}{17!} = \frac{3\cdot 2}{17\cdot 16} = \frac{3}{17\cdot 8} = \frac{3}{136} \approx 0,0221.$$

b) A fiúk 14!-féle sorrendben ülhetnek. Bármelyik sorrendben a lányok 15 hely közül választhatnak, minden helyre egy lány ülhet, így a lányok helyeit $\binom{15}{3}$-féle módon választhatjuk ki (15 elem 3-adosztályú **ismétlés nélküli kombinációi**nak száma), és ezeken a helyeken a lányok 3!-féle sorrendben foglalhatnak helyet, ebből következően a kedvező esetek száma:

$$14!\cdot\binom{15}{3}\cdot 3! = \frac{14!\cdot 15!}{3!\cdot 12!}\cdot 3! = 14!\cdot 15\cdot 14\cdot 13.$$

A keresett valószínűség:

$$P_b = \frac{14!\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{17!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{17\cdot 16\cdot 15} = \frac{14\cdot 13}{17\cdot 16} = \frac{91}{136} \approx 0,6691.$$

c) Ez az esemény a b) pontban vizsgált esemény komplementere, így a keresett valószínűség:

$$P_c = 1 - P_b = 1 - \frac{91}{136} = \frac{45}{136} \approx 0,3309.$$

d) A lányok középen 3!-féle sorrendben ülhetnek le, míg bárhogy is ülnek a lányok, a fiúk 14!-féle módon foglalhatják el helyeiket. Így a keresett valószínűség:

$$P_c = \frac{3!\cdot 14!}{17!} = \frac{3\cdot 2}{17\cdot 16\cdot 15} = \frac{1}{17\cdot 8\cdot 5} = \frac{1}{680} \approx 0,0015.$$

3. példa Az előző példában szereplő tanulócsoport tagjai között kisorsolnak egy BMX kerékpárt, egy személyi számítógépet, egy mobiltelefont, egy hajszárítót és egy baseballsapkát. Minden tanuló legfeljebb egy ajándékot kaphat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) lesz olyan lány, aki kap ajándékot;
b) a névsor elején levő öt tanuló kapja az ajándékokat;
c) minden lány kap ajándékot?

2.9. ábra A sorsolás

Megoldás:
Feltételezzük, hogy egyenlő valószínűségű elemi események az öt tárgy kiosztásának lehetőségei, ezeknek száma: $\frac{17!}{12!} = 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13 = 742560$ (17 elem 5-ödosztályú **ismétlés nélküli variációinak száma**).

a) Könnyebb összeszámolni a komplementer esemény elemi eseményeinek számát, azaz, hogy egyetlen lány sem kap ajándékot. Ez azt jelenti, hogy az ajándékokat csak a fiúk között osztják el, ezt $\frac{14!}{9!} = 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10 = 240240$-féleképpen tehetik meg. Így a keresett valószínűség:

$$P_a = 1 - \frac{\frac{14!}{9!}}{\frac{17!}{12!}} = 1 - \frac{240240}{742560} = 1 - \frac{11}{34} = \frac{23}{34} \approx 0,6765.$$

b) A névsor elején levő 5 tanuló 5!-féle módon kaphatja az ajándékokat, így a keresett valószínűség:

$$P_b = \frac{5!}{\frac{17!}{12!}} = \frac{120}{742560} = \frac{1}{6188} \approx 0,0002.$$

c) Az első lány 5-féle ajándékot kaphat, bármit kapott az első, a második lány 4-féle ajándékot kaphat, és bármit kapott az első kettő, a harmadik lány 3-féle ajándékot kaphat. Most már csak a maradék két ajándék kiosztása a feladat, ezek $14\cdot 13$-féle módon oszthatók ki a fiúk között. Ebből következően a keresett valószínűség:

$$P_c = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 14\cdot 13}{\frac{17!}{12!}} = \frac{10920}{742560} = \frac{1}{68} \approx 0,0147.$$

4. példa A 2. példában szereplő tanulócsoport tagjai között kisorsolnak öt, azonos időtartamra szóló mártélyi táborozást. Minden tanuló legfeljebb egy táborozást nyerhet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) lesz olyan lány, aki táborozást nyer;
b) a névsor elején levő öt tanuló nyeri el a táborozásokat;
c) minden lány táborozni fog?

Megoldás:
Feltételezzük, hogy egyenlő valószínűségű elemi események az öt táborozás kiosztásának lehetőségei, ezeknek száma:

$$\binom{17}{5} = 6188.$$

2.10. ábra Mártély

a) Ismét a komplementer módszerrel számolunk, a keresett valószínűség:

$$P_a = 1 - \frac{\binom{14}{5}}{\binom{17}{5}} = 1 - \frac{11}{34} = \frac{23}{34} \approx 0{,}6765.$$

b) A kedvező esetek száma 1, a keresett valószínűség

$$P_b = \frac{1}{\binom{17}{5}} = \frac{1}{6188} \approx 0{,}0002.$$

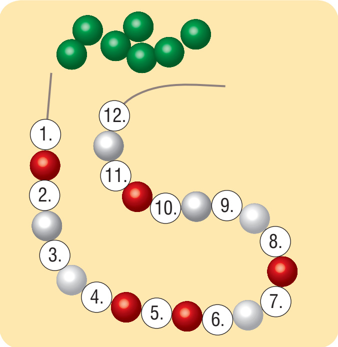
c) A kedvező esetek száma annyi, ahányféleképpen a fiúk között ki tudjuk osztani a maradék két táborozást, azaz: $\binom{14}{2} = 91$. A keresett valószínűség:

$$P_c = \frac{91}{6188} = \frac{1}{68} \approx 0{,}0147.$$

A figyelmes szemlélő észreveheti, hogy bár az utóbbi két példa különbözik egymástól, az eredmények mégis ugyanazok. Az egyezés okának meggondolását az olvasóra bízzuk.

5. példa Öt piros, hat fehér és hét zöld gyöngyből véletlenszerűen gyöngysort fűzünk. A gyöngyök legfeljebb csak színükben különböznek egymástól. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) legalább két zöld gyöngy lesz egymás mellett;
b) először az összes pirosat, aztán az összes fehéret, végül a zöld gyöngyöket fűzzük fel;
c) az első és az utolsó gyöngy fehér lesz?

Megoldás:
Az összes eset száma: $\frac{18!}{5! \cdot 6! \cdot 7!} = 14702688$ (**ismétléses permutáció**).



2.11. ábra A zöld golyókat ezekre a helyekre tehetjük

a) A komplementer módszert alkalmazzuk. Ha nincs két zöld gyöngy egymás mellett, akkor a piros és a fehér gyöngyök $\binom{11}{5}$ -féle sorrendben követhetik egymást. Bármelyik sorrendben a zöld gyöngyöket 12 hely valamelyikére tehetjük, s minden helyre legfeljebb egy zöld gyöngy kerülhet, így e gyöngyök helyeit $\binom{12}{7}$-féle módon választhatjuk ki. Így a keresett valószínűség:

$$P_a = 1 - \frac{\binom{11}{5}\cdot\binom{12}{7}}{\frac{18!}{5!\cdot 6!\cdot 7!}} = 1 - \frac{11}{442} = \frac{431}{442} \approx 0{,}9751.$$

b) A kedvező esetek száma: 1, így a keresett valószínűség:

$$P_b = \frac{1}{\frac{18!}{5!\cdot 6!\cdot 7!}} = \frac{1}{14702688} \approx 7\cdot 10^{-8}.$$

c) A maradék öt piros, négy fehér és hét zöld gyöngyöt $\frac{16!}{5!\cdot 4!\cdot 7!} = 1441440$-féle módon lehet sorbarakni, így a keresett valószínűség:

$$P_c = \frac{\frac{16!}{5!\cdot 4!\cdot 7!}}{\frac{18!}{5!\cdot 6!\cdot 7!}} = \frac{1441440}{14702688} = \frac{5}{51} \approx 0{,}0980.$$

6. példa A tízes számrendszerben ötjegyű, pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a választott
a) szám jegyei különbözőek;
b) számnak nincs 5-nél nagyobb számjegye;
c) szám palindrom szám? (Oda-vissza olvasva ugyanazt a számot kapjuk.)

2.12. ábra „Évák eledele: kávé.” (palindrom)

Megoldás:
A tízes számrendszerben ötjegyű, pozitív egész számok száma: $9\cdot 10^4$ (**ismétléses variáció**).

a) Azoknak a tízes számrendszerben ötjegyű, pozitív egész számoknak a száma, melyeknek jegyei különbözőek: $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 27216.$ Így a valószínűség:

$$P_a = \frac{27216}{9\cdot 10^4} = \frac{189}{625} = 0{,}3024.$$

b) Azoknak a tízes számrendszerben ötjegyű, pozitív egész számoknak a száma, melyeknek nincs ötnél nagyobb számjegye: $5\cdot 6^4 = 6480.$ A valószínűség:

$$P_b = \frac{5\cdot 6^4}{9\cdot 10^4} = \frac{9}{125} \approx 0{,}072.$$

c) A palindrom, tízes számrendszerben ötjegyű, pozitív egész számoknak a száma: $9 \cdot 10^2$. A valószínűség:

$$P_c = \frac{9 \cdot 10^2}{9 \cdot 10^4} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Oldjuk meg!

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötös lottó (genovai lottó) húzásakor olyan számötöst húznak, melyek között lesz legalább két olyan szám, amelyeknek különbsége 1?

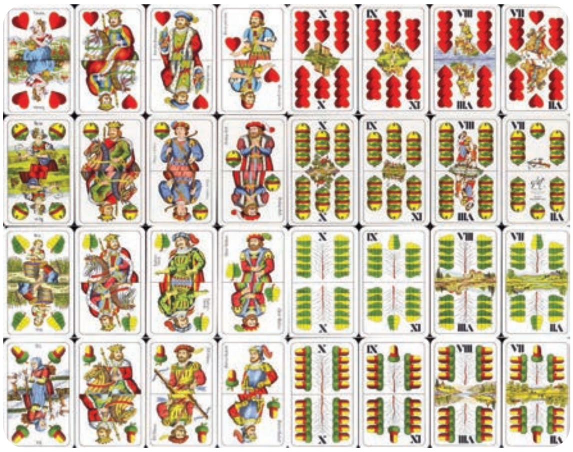
2. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kitöltött totószelvényhasábon
a) 13+1 találatot érünk el;
b) 13 találatot érünk el;
c) 12 találatot érünk el?

2.13. ábra Lottó

3. Egy dobozban öt darab egyforma golyó van 1-től 5-ig számozva. A golyókat egymás után véletlenszerűen kihúzzuk a dobozból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik golyót sem húzzuk annyiadikra, amilyen szám van rajta?

4. Egy 32 lapos magyar kártya csomagból véletlenszerűen kihúzunk 5 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között
a) pontosan két piros lesz;
b) legalább két piros lesz;
c) pontosan két ász lesz;
d) legalább két ász lesz;
e) pontosan két piros és két ász lesz?

5. Egy szabályos dobókockával hatszor dobunk egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy valamelyik három egymás utáni dobás eredménye 1, 2 és 3 lesz?



2.14. ábra Magyar kártya

6. Egy külföldre utazó csoportban három 9. osztályos, három 10. osztályos és három 11. osztályos diák van. Véletlenszerűen, egyesével fognak felszállni a vonatra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy három azonos évfolyamra járó nem fog felszállni egymás után?

7. Hány szabályos dobókocka együttes feldobása esetén legnagyobb annak a valószínűsége, hogy egy hatos lesz a dobott számok között?

8. Egy szabályos dobókockát dobálunk egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) elsőre hatost dobunk;
b) harmadikra dobunk először hatost;
c) n-edikre dobunk először hatost?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 448., 457., 464., 470., és 473. feladatok

3. A geometriai valószínűségi mező

Következzen most egy újabb speciális eseménytértípus!

Definíció Ha a H eseménytér mérhető (például van hossza, területe vagy térfogata), az eseményei mérhetők[2], és valószínűségük egyenesen arányos a mértékükkel, akkor ezt az eseményteret az eseményeivel és a köztük értelmezett műveletekkel (összeadás, szorzás, kivonás, komplementer) együtt **geometriai valószínűségi mező**nek nevezzük.

Tétel Ha a H geometriai valószínűségi mező eseménytere, a rajta értelmezett mérték (például hossz, terület vagy térfogat) μ, akkor bármely A eseményre igaz, hogy

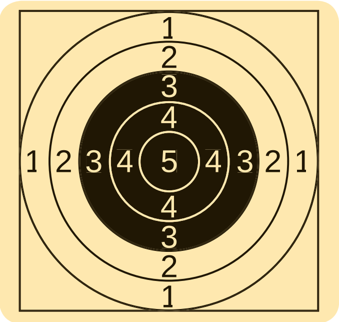
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)}.$$

Bizonyítás:

A definíció szerint $\frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{P(A)}{P(H)}$ (egyenes arányosság). A II. Kolmogorov-axióma szerint:

$$P(H) = 1, \text{ így } P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)}.$$

1. példa A 3.1. ábrán látható 10 egységnyi oldalú céltáblára véletlenszerűen érkeznek (pontszerű) lövések. A körök sugarai 1, 2, 3, 4 és 5. Ha a legnagyobb sugarú körön kívül esik a találat, akkor 0 pontot ér. Mennyi a valószínűsége az egyes találatoknak?



3.1. ábra A céltábla

Megoldás:

A problémát a geometriai valószínűségi mező modelljével oldjuk meg, a mérték legyen a terület! Ebből következően $\mu(H) = 10^2 = 100$ (a négyzet területe). Jelölje P_i azt az eseményt, hogy i pontot ér a találat!

Ekkor a megfelelő körlap, illetve körgyűrű területének és a négyzet területének hányadosa adja a keresett valószínűségeket:

$$P(P_1) = \frac{25\pi - 16\pi}{100} = \frac{9\pi}{100} \approx 0,2827;$$

$$P(P_2) = \frac{16\pi - 9\pi}{100} = \frac{7\pi}{100} \approx 0,2199;$$

$$P(P_3) = \frac{9\pi - 4\pi}{100} = \frac{5\pi}{100} \approx 0,1571;$$

[2] Az eseménytér összes részhalmaza nem esemény! (Lásd az eseménytér definícióhoz kapcsolt lábjegyzetet!)

MatEm_Book.indb 172 2012.07.05. 12:03:14

$$P(P_4)=\frac{4\pi-\pi}{100}=\frac{3\pi}{100}\approx 0,0,0942;$$

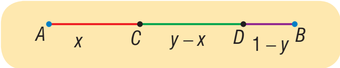
$$P(P_5)=\frac{\pi}{100}\approx 0,0324;$$

$$P(P_0)=1-\frac{\pi+3\pi+5\pi+7\pi+9\pi}{100}=\frac{100-25\pi}{100}=1-\frac{\pi}{4}\approx 0,2146.$$

Az előző példában szereplő események valószínűségei a π függvényei. Ha igaz az a sejtésünk, hogy a kísérletek számát növelve a vizsgált esemény relatív gyakorisága egyre nagyobb eséllyel a valószínűség „közelében van”, akkor kísérleti úton jó közelítést kaphatunk a π értékére (**Monte Carlo-**módszer). (A tankönyvhöz tartozó digitális anyagban egy animáció ezt mutatja be.)

Korábban láttuk, hogy a lehetetlen esemény valószínűsége 0. Most észrevehetjük, hogy nem csak a lehetetlen esemény valószínűsége lehet 0, hiszen például a geometriai valószínűségi mezőben minden elemi esemény valószínűsége 0, hiszen a mértékük is az.

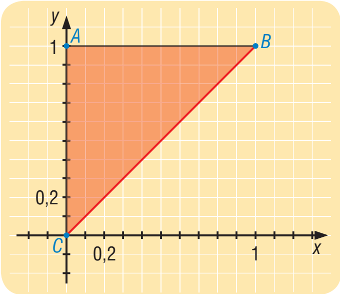
2. példa Egy egységnyi hosszú szakaszon véletlenszerűen választunk két – a végpontoktól különböző – pontot. Ezek az adott szakaszt három szakaszra bontják. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett részekből mint oldalakból háromszög szerkeszthető?



3.2. ábra A három részre bontott szakasz

Megoldás:

Legyen az egységnyi szakasz az AB, a két osztópont C és D! Legyen továbbá $AC = x$ és $AD = y$! Feltételezhetjük, hogy $x \le y$. Minden ilyen felosztásnak kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethető tehát egy $P(x; y)$ pont, melynek koordinátáira igaz, hogy $0 < x \le y < 1$. Ezek a pontok a 3.3. ábrán látható $OAB_\triangle$ lap pontjai. Ebből kiindulva a problémát a geometriai valószínűségi mező modelljével oldjuk meg, a mérték legyen a terület! Ebből következően $\mu(H)=\frac{1}{2}$ (az $OAB_\triangle$ területe).



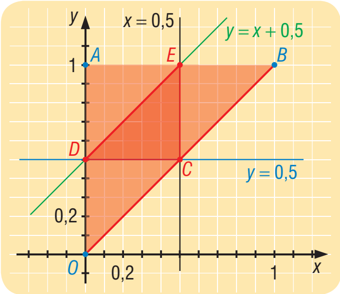
3.3. ábra Az eseménytér

Ahhoz, hogy a felosztással keletkezett szakaszokból háromszög legyen szerkeszthető, teljesülnie kell a háromszög-egyenlőtlenségnek, azaz bármely két szakasz összegének nagyobbnak kell lennie a harmadiknál, azaz

$$\left.\begin{aligned}1-y&<x+y-x\\1&<2y\\\frac{1}{2}&<y\end{aligned}\right\}(1)\quad\left.\begin{aligned}x&<y-x+1-y\\2x&<1\\x&<\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}(2)\quad\left.\begin{aligned}y-x&<x+1-y\\2y&<2x+1\\y&<x+\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}(3)$$

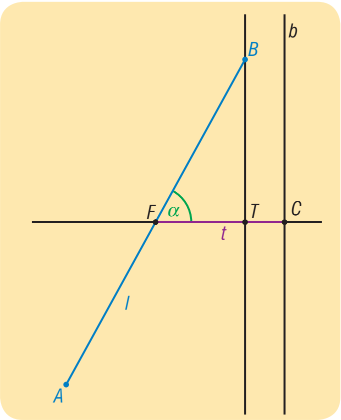
E három feltételnek a 3.4. ábrán látható $CDE_\triangle$ pontjai tesznek eleget, ennek területe $\frac{1}{8}$, így a keresett valószínűség:

$$P=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

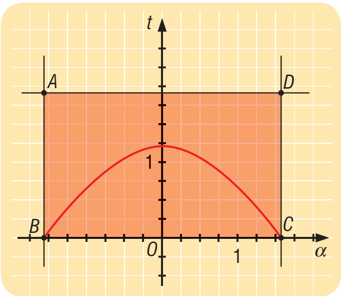


3.4. ábra A kedvező elemi események halmaza

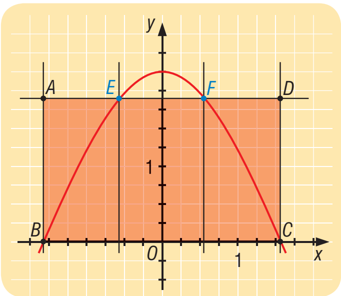
3. példa Egy szobában hajópadló van. (Azonos, *d* szélességű deszkák vannak egymás mellé hézag nélkül lefektetve.) Erre a padlóra véletlenszerűen leejtünk egy *l* hosszúságú tűt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a leejtett tű metsz legalább egyet a két deszkát elválasztó egyenesek közül? (**Buffon-féle tűprobléma**)



3.5. ábra A leejtett tű helyzetét meghatározó adatok



3.6. ábra Ha $0 < l \le \dfrac{d}{2}$



3.7. ábra Ha $\dfrac{d}{2} < l$

Megoldás:

Adottak a síkon párhuzamos egyenesek egymástól *d* távolságra. A leejtett tű helyzetét két adat határozza meg.

Az egyik, hogy *F* felezőpontja milyen távol van a tőle minimális távolságra levő *b* párhuzamostól. Legyen ez $t(=FC)$! Nyilvánvaló, hogy $0 \le t \le \dfrac{d}{2}$.

A másik meghatározó adat az az α szög, amit a tű bezár a felezőpontján átmenő, a párhuzamosokra merőleges egyenessel. Legyen $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$!

Ebből következően a tű minden helyzetének kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethető egy $P(\alpha;t)$, melynek koordinátáira teljesülnek a fenti feltételek. Ezek a *P* pontok az (α,t) sík *ABCD* téglalapjának pontjai, melynek területe: $\mu(H)=\dfrac{d\pi}{2}$.

A 3.5. ábrán $FT=\dfrac{l}{2}\cos\alpha$. Metszés akkor van, ha $t \le \dfrac{l}{2}\cos\alpha$. Ennek a feltételnek megfelelő pontok az *ABCD* téglalap azon pontjai, melyek $t=\dfrac{l}{2}\cos\alpha$ görbe „alatt” vannak. Ebből következően két eset lehetséges:

a) Ha $0 < l \le \dfrac{d}{2}$, akkor

$$P=\frac{\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\cos\alpha\, d\alpha}{\dfrac{d\pi}{2}}=\frac{l}{d\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2l}{d\pi}.$$

(Lásd az Analízis című fejezet Integrálszámítás című alfejezetét.)

b) Ha $\dfrac{d}{2} < l$, akkor bonyolultabb a probléma. Az *E* és *F* pontok által meghatározott intervallumon kell integrálni, ennek megkeresése nem könnyű feladat. Ez az oka annak, hogy a Buffon-féle tűproblémát általában csak a $0 < l \le \dfrac{d}{2}$ esetben szokás tárgyalni.

Oldjuk meg!

1. Egy egységnyi hosszú szakaszon véletlenszerűen választunk két – a végpontoktól különböző − pontot. Ezek a szakaszt három szakaszra bontják. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett részekből mint oldalakból egyenlő szárú háromszög szerkeszthető?

2. Jancsi és Juliska megbeszélik, hogy egy adott napon 12 és 13 óra között, véletlenszerűen választott időpontban kimennek a Dugonics téren levő szökőkúthoz, és 10 percet ott töltenek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ott találkoznak?

3.8. ábra Dugonics tér, Szeged

3. Egy házaspár mindennap véletlenszerűen fél hét és fél nyolc között keresi fel a fürdőszobát. Mindketten szeretnek reggel egyedül készülődni, és ezt kölcsönösen tiszteletben tartják. Az asszony 20 percet tölt el egy alkalommal szépítkezéssel a fürdőszobában. Mekkora valószínűséggel mehet be a férj a fürdőszobába?

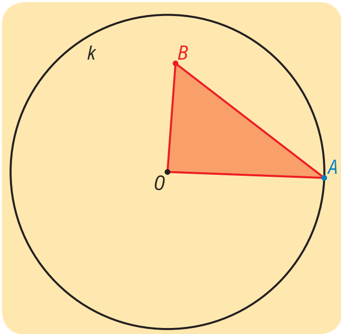
4. Adott egy egységnyi élű kocka és annak egy csúcsa. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kocka egy véletlenszerűen választott belső pontja legfeljebb 0,4 egységnyi távolságra van a kocka adott csúcsától?

5. Az $a|x|+b=0$ egyenletben szereplő a és b együtthatókat véletlenszerűen választjuk a $[-2;2]$ intervallumból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyenletnek van valós megoldása?

6. Az $x^2+px+q=0$ egyenletben szereplő p és q együtthatókat véletlenszerűen választjuk a $[-2;2]$ intervallumból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyenletnek van valós megoldása?

7. Pista megpörget egy földgömböt, majd véletlenszerűen rábök annak egy pontjára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Magyarországra mutat?

8. Egy O középpontú körvonal egy adott pontja A. E körvonal által meghatározott körlapon véletlenszerűen választunk egy $B(\neq A)$ pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az $AOB\triangle$
   a) hegyesszögű;
   b) derékszögű;
   c) tompaszögű?



3.9. ábra Ábra a 8. feladathoz

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 474., 476., 477., 478., és 482. feladatok

4. A feltételes valószínűség

1. példa Legyen A az az esemény, hogy két kockával dobott számok összege legfeljebb 8, B pedig az az esemény, hogy ez az összeg legalább 5! Adjuk meg a következőket:

a) $P(AB)$; b) $P(B)$; c) $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$!

Megoldás:

a) AB az az esemény, hogy két kockával dobott számok összege 5, 6, 7 vagy 8. Tekintettel arra, hogy ezek az események páronként kizárják egymást,

$$P(AB)=\frac{4+5+6+5}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}.\ \text{(Lásd a 2.3. lecke táblázatát!)}$$

4.1. ábra A dobott számok összege most 7

b) B az az esemény, hogy két kockával dobott számok összege 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 vagy 12. Tekintettel arra, hogy ezek az események páronként kizárják egymást,

$$P(B)=\frac{4+5+6+5+4+3+2+1}{36}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}.$$

c) $$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

2. példa Legyen A az az esemény, hogy a 3.1. példában szereplő céltáblára véletlenszerűen lőve legfeljebb 4 pontot érünk el, B pedig az az esemény, hogy legalább 2 pontunk lesz! Adjuk meg a következőket:

a) $P(AB)$; b) $P(B)$; c) $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$!

Megoldás:

4.2. ábra Lövés a táblára

a) AB az az esemény, hogy a céltáblára lőve a pontjaink száma 2, 3 vagy 4. Tekintettel arra, hogy ezek az események páronként kizárják egymást,

$$P(AB)=\frac{(7+5+3)\pi}{100}=\frac{15\pi}{100}=\frac{3\pi}{20}.$$

b) B az az esemény, hogy a céltáblára lőve a pontjaink száma 2, 3, 4 vagy 5. Tekintettel arra, hogy ezek az események páronként kizárják egymást,

$$P(AB)=\frac{(7+5+3+1)\pi}{100}=\frac{16\pi}{100}=\frac{4\pi}{25}.$$ (Lásd a 3.1. példát!)

c) $$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{3\pi}{20}}{\frac{4\pi}{25}}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 20}=\frac{15}{16}.$$

Kérdés:
Az utóbbi két példában mit adott meg a c) pontokban kiszámolt $\frac{P(AB)}{P(B)}$ hányados?

Az *A* esemény bekövetkezésének esélyét adja meg, feltéve, hogy a *B* esemény bekövetkezik.

Indokolt tehát a következő definíció:

Definíció Legyen *H* egy eseménytér, *B* pedig egy olyan eseménye, melyre igaz, hogy $P(B)\neq 0$! Bármely *A* esemény *B* feltétel melletti feltételes valószínűsége:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

3. példa Ádám, Beáta és Zille egy repülőgéppel érkeznek. Ádám 3, Beáta 4, Zille 5 csomagot adott fel. Most sorban állnak a csomagokért. Tekintsük a következő eseményeket!

A_1: Elsőnek Ádám csomagja érkezik meg a futószalagon.
A_2: Másodiknak Beáta csomagja érkezik meg a futószalagon.
A_3: Harmadiknak Zille csomagja érkezik meg a futószalagon.

Adjuk meg a következő valószínűségeket!

a) $P(A_1)$; b) $P(A_2|A_1)$; c) $P(A_3|A_1A_2)$; d) $P(A_1A_2A_3)$!

Adjuk meg szavakkal a b), c) és d) valószínűségekben szereplő eseményeket!

Megoldás:

a) $P(A_1)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$. (Bármelyik csomag jöhet elsőre, de ezek közül csak 3 Ádámé.)

b) Másodiknak Beáta csomagja érkezik, feltéve, hogy elsőnek Ádámé jött.

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{\frac{3\cdot 4}{12\cdot 11}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{11}.$$

4.3. ábra Jönnek a csomagok

c) Harmadiknak Zille csomagja érkezik, feltéve, hogy először Ádámé és másodszor Beáta csomagja jött meg.

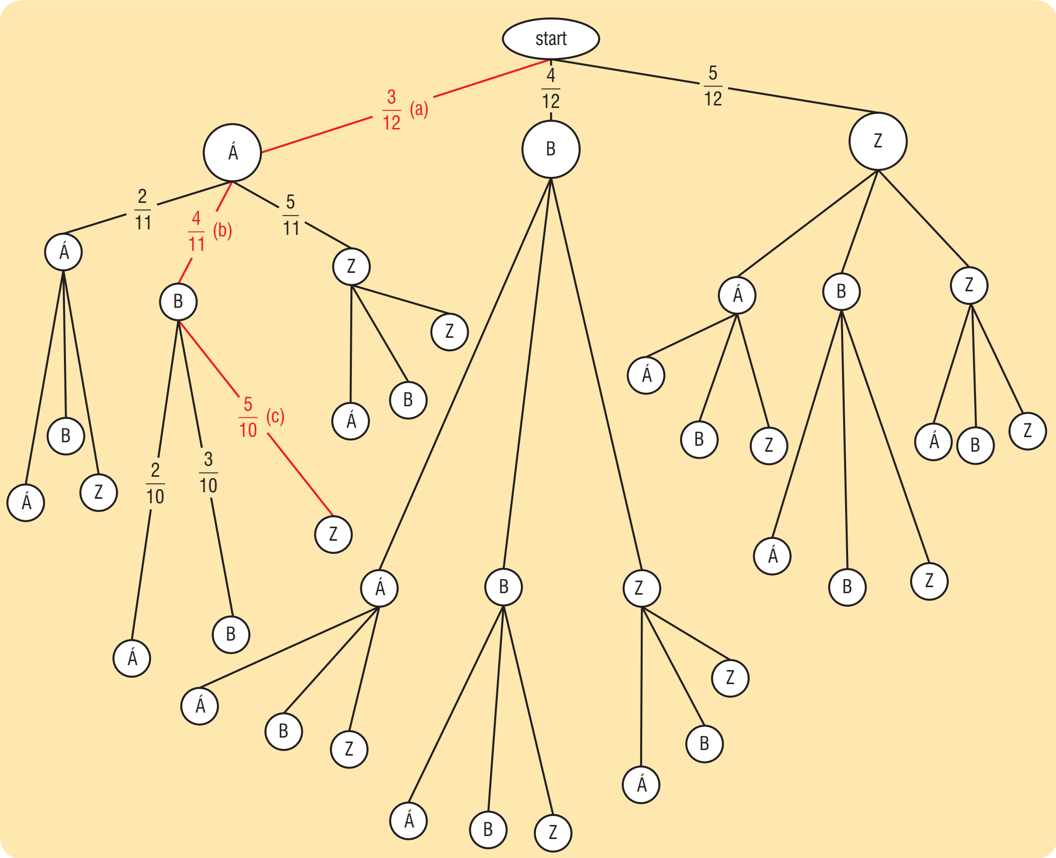
$$P(A_3|A_1A_2)=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}=\frac{\frac{3\cdot 4\cdot 5}{12\cdot 11\cdot 10}}{\frac{1}{11}}=\frac{1}{2}.$$

MatEm_Book.indb 177 2012.07.05. 12:03:40

d) Elsőnek Ádámé, másodiknak Beátáé és harmadiknak Zille csomagja érkezett meg.

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{12\cdot 11\cdot 10}=\frac{1}{22}.$$

A problémát szemléltethetjük a következő gráffal:



4.4. ábra A probléma gráfja

Az ábrán néhány valószínűséget feltüntettünk. Betűjellel jelöltük az a), b) és c) feladatok megoldásait, míg a d) feladat megoldását a piros színnel jelölt élek mutatják.
Tanulmányozzuk a kapott eredményeket!

$$P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{22}=P(A_1A_2A_3).$$

Ez alapján megsejthető a következő tétel:

Tétel Legyen H egy eseménytér, $A_1, A_2, ..., A_n$ olyan eseményei, melyekre $P(A_1)\neq 0, P(A_2)\neq 0, ..., P(A_n)\neq 0,\ (n\geq 2,$ egész szám).

Ekkor $P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cdot A_2)\cdot ...\cdot P(A_n|A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_{n-1})$

(**valószínűségek szorzási szabálya**).

Bizonyítás:
Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n=2$, akkor a feltételes valószínűség definíciója szerint $P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$. Innen

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1),$$

azaz az állítás igaz.
Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén is igaz az állítás, azaz

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_k|A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{k-1}).\quad(1)$$

Nézzük meg $n=k+1$-re!
A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P(A_{k+1}|A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{k-1}\cdot A_k)=\frac{P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{k-1}\cdot A_k\cdot A_{k+1})}{P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{k-1}\cdot A_k)}.$$

Ekvivalens átalakítást végezve azt kapjuk, hogy

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k\cdot A_{k+1})=P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k)\cdot P(A_{k+1}|A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k).$$

Felhasználva az (1) indukciós feltételt:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k\cdot A_{k+1})=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_k|A_1\cdot\ldots\cdot A_{k-1})\cdot P(A_{k+1}|A_1\cdot\ldots\cdot A_k).$$

Az állítást bebizonyítottuk.

4. példda Hajni, Györgyi és Zsuzsi egy születésnapi partira készülnek, és kókuszgolyókat készítenek. Mindegyik desszertbe vagy egy mogyorót vagy egy szem pisztáciát tesznek. A lányok által készített kókuszgolyók számát és fajtáját a következő táblázat tartalmazza:

Név	Mogyorós	Pisztáciás	Összesen
Hajni	12	21	33
Györgyi	18	10	28
Zsuzsi	22	15	37
összesen	52	46	98

Az összes elkészült édességből véletlenszerűen választunk egyet. Vizsgáljuk a következő eseményeket!

B_1: Hajni készítette a választott kókuszgolyót.
B_2: Györgyi készítette a választott kókuszgolyót.
B_3: Zsuzsi készítette a választott kókuszgolyót.
A: A választott kókuszgolyó mogyorós.

4.5. ábra Készülnek a kókuszgolyók

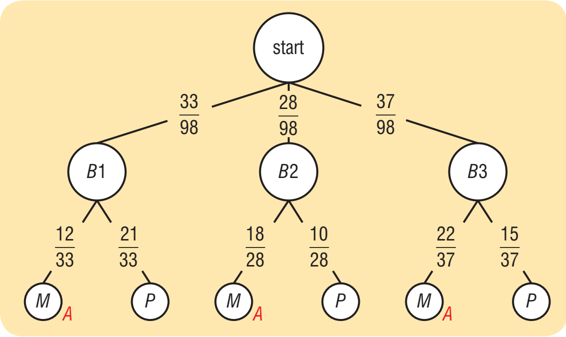
a) Töltsük ki az alábbi táblázatot!

i	$P(B_i)$	$P(A\|B_i)$	$P(A\|B_i)\cdot P(B_i)$
1			
2			
3			

b) Adjuk meg az A esemény valószínűségét!

Megoldás:

a) A probléma jól szemléltethető olyan gráffal is, amely a lehetőségeket és a valószínűségüket ábrázolja:



4.6. ábra A probléma gráfja

i	$P(B_i)$	$P(A\|B_i)$	$P(A\|B_i)\cdot P(B_i)$
1	$\frac{33}{98}$	$\frac{12}{33}$	$\frac{6}{49}$
2	$\frac{28}{98}$	$\frac{18}{28}$	$\frac{9}{49}$
3	$\frac{37}{98}$	$\frac{22}{37}$	$\frac{11}{49}$

b) $$P(A)=\frac{52}{98}=\frac{26}{49}.$$

A fenti gráf alapján is látható, hogy: $P(A)=\frac{33}{98}\cdot\frac{12}{33}+\frac{28}{98}\cdot\frac{18}{28}+\frac{37}{98}\cdot\frac{22}{37}=\frac{26}{49}$.

Vegyük észre, hogy az előző példában

$$P(A)=\frac{26}{49}=\frac{6}{49}+\frac{9}{49}+\frac{11}{49}=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)\cdot P(B_3).$$

Ennek alapján megfogalmazhatjuk a következő két tételt:

Tétel **Teljes valószínűség tétele**: Legyen H egy eseménytér, $B_1, B_2, ..., B_n$ olyan teljes eseményrendszere, amelynek egyetlen eseményének valószínűsége sem 0! A a H tetszőleges eseménye. Ekkor

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+...+P(A|B_n)\cdot P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i).$$

Bizonyítás:

$A\cdot B_1, A\cdot B_2, ..., A\cdot B_n$ páronként kizáró események, és $A\cdot B_1+A\cdot B_2+...+A\cdot B_n=A$. A III. axióma szerint $P(A)=P(A\cdot B_1)+P(A\cdot B_2)+...+P(A\cdot B_n)$. Alkalmazzuk a feltételes valószínűség definícióját!

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+...+P(A|B_n)\cdot P(B_n).$$

Az állítást igazoltuk.

Tétel **Bayes-tétel**: Legyen H egy eseménytér, $B_1, B_2, ..., B_n$ olyan teljes eseményrendszere, amelynek egyetlen eseményének valószínűsége sem 0! A a H tetszőleges eseménye. Ekkor

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)\cdot P(B_i)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+...+P(A|B_n)\cdot P(B_n)},\text{ ahol}$$

$$i\in\{1,2,...,n\}.$$

Bizonyítás:
A feltételes valószínűség definíciója szerint:

$$P\left(B_i|A\right)=\frac{P\left(A\cdot B_i\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(A|B_i\right)\cdot P\left(B_i\right)}{P\left(A\right)}.$$

A teljes valószínűség tételét alkalmazva kapjuk a bizonyítandó állítást.

5. példda A 4. példa feltételeinek megfelelő módon elvégeztük a kókuszgolyó kiválasztását, és azt tapasztaltuk, hogy abban mogyoró volt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezt Hajni készítette?

4.7. ábra Thomas Bayes (1702–1761)

Megoldás:
Alkalmazzuk a Bayes-tételt!

$$P\left(B_1|A\right)=\frac{P\left(A|B_1\right)\cdot P\left(B_1\right)}{P\left(A\right)}=\frac{\frac{6}{49}}{\frac{26}{49}}=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}.$$

Oldjuk meg!

1. Egy dobozban 5 piros, 6 fehér és 7 zöld golyó van. A golyók legfeljebb csak színükben különböznek. Egymás után véletlenszerűen kihúzunk három golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy piros, egy fehér és egy zöld golyó követi egymást, ha
a) a kihúzott golyókat nem tesszük vissza;
b) a kihúzott golyókat visszatesszük?

2. Juli vaktában hármat lő a 3.1. ábrán szereplő céltáblára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elért pontjainak a száma – ebben a sorrendben – 1, 2 és 3?

3. Egy dobozban hat golyó van 1-től 6-ig sorszámozva. Egymás után véletlenszerűen kihúzunk három golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyókon levő számok összege osztható hárommal, ha
a) a kihúzott golyókat nem tesszük vissza;
b) a kihúzott golyókat visszatesszük?

4.8. ábra Juli lő

4. Egy évfolyam 4 osztályának év végi matematikajegyeinek statisztikája:

Jegy / Osztály	5	4	3	2	1
A	14	12	5	1	0
B	6	8	12	3	1
C	7	7	11	5	0
D	12	13	6	2	1

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák év végi osztályzata ötös matematikából?
b) Pista év végi jegye hármas matematikából. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ő a C osztályba jár?

4.9. ábra Jobb nem lehetett volna?

5. Az LNR Bt. három tagja 24 órás váltásban látja el a MATEM raktárbázis folyamatos őrzését. Lehel 3 napot, Norbert és Róbert 2-2 napot dolgozik hetente. Lehel az esetek 90 százalékában elfogja a betörőket, Norbert ezt 95 százalékban tudja produkálni, míg Róbert „elfogási százaléka” 92.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott időpontban érkező betörőt nem sikerül elkapni?

b) Tegnap történt egy elfogás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Lehel, Norbert, illetve Róbert volt eredményes?

4.10. ábra Most (nem) sikerült

6. Az LNR Bt. tagjai részt vesznek a biztonsági szolgálatok számára kiírt csapatversenyen. Az egyik feladat az, hogy a csapatból háromszor véletlenszerűen választanak egy tagot, aki egyet lő a – 3.1. ábrán szereplő – céltáblára. Lehel 78 százalékos eséllyel ér el 5 pontot, Norbert ezt 82 százalékos biztonsággal tudja, míg Róbert 93 százalékos valószínűséggel tud 5 pontot szerezni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) születik 5 pontot érő találat;

b) mindhárom találat 5 pontot ér?

7. Az előző versenyen az LNR Bt. lövőjének első találata 5 pontot ért. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezt a lövést Lehel adta le?

8. Egy szabályos dobókocka mellett van egy olyan is, amelynek egy 2 pontos, két 4 pontos és három 6 pontos lapja van. Véletlenszerűen választunk a két kocka közül, és a választott kockával egyszer dobunk.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy hatost dobunk?

b) A véletlenszerűen választott kockával négyest dobtunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezt a szabályos kockával dobtuk?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 487., 488., 489., 491. és 492. feladatok

5. Az események függetlensége

Továbblépve vizsgáljuk a H eseménytéren értelmezett olyan A és B eseményeket, melyekre igaz, hogy $P(A|B) = P(A)$. Ez azt jelenti, hogy a B feltétel nem változtatja meg az A esemény valószínűségét, azaz az A és B események függetlenek egymástól. A feltételes valószínűség definícióját alkalmazva:

$$P(A|B) = P(A),$$

$$\frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = P(A),$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ez indokolja a következő definíciót:

Definíció Legyenek A és B a H eseménytéren értelmezett olyan események, melyekre $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$. Az ilyen eseményeket **független események**nek nevezzük.

1. példa Két kockával dobunk. Legyen az A esemény az, hogy a dobott számok összege páros, a B pedig az, hogy a dobott számok összege hárommal osztható. Döntsük el, hogy az A és B események függetlenek-e!

Megoldás:

A 166. oldal táblázata szerint:

$$P(A)=\frac{1+3+5+5+3+1}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2},$$

$$P(B)=\frac{2+5+4+1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}.$$

Az $A\cdot B$ esemény az, hogy a dobott számok összege osztható hattal, így

$$P(A\cdot B)=\frac{5+1}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Látható, hogy $P(A\cdot B)=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=P(A)\cdot P(B)$, így A és B független események.

2. példa Egy dobozban 5 piros és 7 zöld golyó van. A golyók legfeljebb színükben különböznek egymástól. Egymás után véletlenszerűen kihúzunk két golyót. Legyen az A esemény az, hogy elsőre piros golyót húzunk, a B pedig az, hogy másodikra zöld golyót húzunk! Döntsük el, hogy az A és B események függetlenek-e, ha

a) az elsőnek kihúzott golyót visszatesszük;

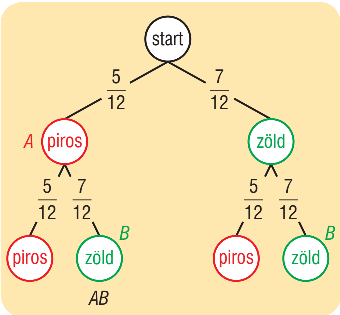
b) az elsőnek kihúzott golyót nem tesszük vissza.

Megoldás:

a) $P(A)=\frac{5}{12}$, $P(B)=\frac{7}{12}$, $P(A\cdot B)=\frac{5\cdot 7}{12^2}=\frac{35}{144}$.

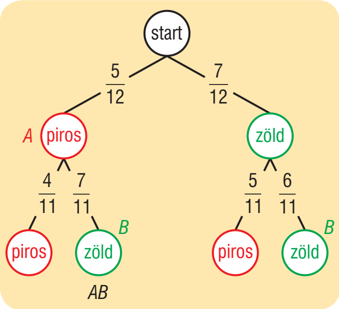
Ekkor $P(A\cdot B)=\frac{35}{144}=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=P(A)\cdot P(B)$,

így A és B független események. A problémát az 5.1. ábra gráfja szemléltetheti.



5.1. ábra A 2. a) példa gráfja

b) $P(A)=\frac{5}{12}$. A B esemény valószínűségének meghatározását a teljes valószínűség tételének alkalmazásával végezhetjük. Legyen C_1 esemény az, hogy elsőre zöld golyót húzunk! Ekkor $P(C_1)=\frac{7}{12}$ és $P(B|C_1)=\frac{6}{11}$. Legyen C_2 esemény az, hogy elsőre nem zöld golyót húzunk! Ekkor $P(C_2)=\frac{5}{12}$ és $P(B|C_2)=\frac{7}{11}$. Így a teljes valószínűség tétele szerint: $P(B)=\frac{42+35}{12\cdot 11}=\frac{77}{132}=\frac{7}{12}$.



5.2. ábra A 2. b) példa gráfja

Ugyanakkor $P(A \cdot B) = \frac{5 \cdot 7}{12 \cdot 11} = \frac{35}{132}$. Látható, hogy $P(A \cdot B) = \frac{35}{132} \neq \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = P(A) \cdot P(B)$, így A és B **nem** független események. A probléma az 5.2. ábra gráfjával ábrázolható.

Az előző példák alapján megállapíthatjuk, hogy a valószínűség-számítás függetlenség fogalmának megfelel a véletlen jelenségek körében az, hogy az egyes események nem befolyásolják egymást.

Általánosítsuk az előző definíciót!

Definíció Legyenek $A_1, A_2, ..., A_n$ a H eseménytéren értelmezett olyan események, melyekre $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$. Az ilyen eseményeket **független események**nek nevezzük.

3. példa Egy kockával hatszor dobunk egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott hatosok száma 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

5.3. ábra 6. kocka

Megoldás:

- Ha a hatos dobások száma 0 $(h = 0)$, akkor egyik dobás sem hatos. Egy ilyen dobás valószínűsége $\frac{5}{6}$. Mivel a dobások függetlenek egymástól, $P(h = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^6$.
- Ha a hatos dobások száma 1 $(h = 1)$, akkor egy dobás hatos, aminek valószínűsége $\frac{1}{6}$. A többi dobás egyike sem hatos, és egy ilyen dobás valószínűsége $\frac{5}{6}$. A hatos dobás helyét 6-féleképpen választhatjuk, és ezek a dobássorozatok kizáró események. Mivel a dobások függetlenek egymástól, $P(h = 1) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$.
- Ha a hatos dobások száma 2 $(h = 2)$, akkor két dobás hatos, ezeknek a valószínűsége egyenként $\frac{1}{6}$. A többi dobás egyike sem hatos, és egy ilyen dobás valószínűsége $\frac{5}{6}$. A hatos dobások helyét $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk, és ezek a dobássorozatok kizáró események. Mivel a dobások függetlenek egymástól, $P(h = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$.
- Hasonlóan, ha a hatos dobások száma i $(h = i)$, ahol $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ akkor i dobás hatos, és ezeknek a valószínűsége $\frac{1}{6}$. A többi dobás egyike sem hatos, és egy ilyen dobás valószínűsége $\frac{5}{6}$.

A hatos dobások helyét $\binom{6}{i}$-féleképpen választhatjuk, és ezek a dobássorozatok kizáró események. Mivel a dobások függetlenek egymástól, $P(h=i)=\binom{6}{i}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6-i}$.

Oldjuk meg!

1. A tapasztalatok szerint 0,5023 a fiúk születésének valószínűsége. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kétgyerekes családban
a) egynemű gyerekek vannak;
b) különböző nemű gyerekek vannak?

2. Hány szabályos dobókocka esetén a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy a kockákat egyszerre feldobva pontosan két hatost dobunk?

3. A 3.1. ábra céltáblájára tízszer vaktában lövünk. Hány ötpontos találatnak legnagyobb a valószínűsége?

4. A 3.2. feladatban leírt módon Jancsi és Juliska öt napon keresztül kimegy a térre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy találkozásaik száma 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5?

5. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötöslottó-sorsoláson két egymás utáni héten kihúzzák a 13-ast?

6. Igaz-e, hogy a kizáró események függetlenek? Indokoljuk állításunkat!

7. A 10^{99} pozitív osztói közül ötször (egymástól függetlenül) választunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a választott osztók közül 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 db osztható 10^{88}-nal?

8. 4 pálca mindegyikét három részre törjük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pálcák részeiből 0, 1, 2, 3 vagy 4 db háromszöget rakhatunk össze? (Egy háromszög megalkotásához csak egy pálca részeit használhatjuk fel.)

9. Egy pénzdarabot egymás után sokszor feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy elsőre, másodikra, harmadikra, …, n-edikre dobunk először fejet?

5.4. ábra Pálcát tör

5.5. ábra Repül a pénz

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 507., 509., 510., 512. és 514. feladatok

6. Valószínűségi változók, várható érték

A korábbiakban többször megtettük, hogy az eseménytér elemi eseményeihez egyértelmű módon számokat rendeltünk. Például:
a) két kockával dobott számpárokhoz az összegüket;
b) a céltáblára érkező találatokhoz a pontértéküket (3.1. ábra);

c) egy kockával hatszor dobva a dobott hatosok számát (5.3. példa);
d) 4 pálca mindegyikét három részre törve a kapott részekből összerakott háromszögek számát (5.8. feladat);
e) a 3.1. ábra céltáblájára 10-szer lőve az ötpontos találatok számát (5.3. feladat);
f) egy pénzdarabot sokszor feldobva az első fej dobás sorszámát (5.9. feladat).

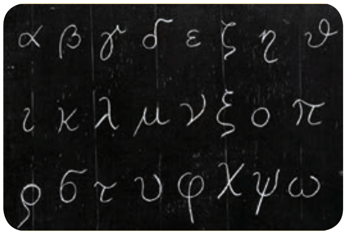
Ezzel olyan függvényeket adtunk meg, melyeknek értelmezési tartománya egy eseménytér elemi eseményeinek halmaza, képhalmaza pedig a valós számok halmaza.

Definíció Az olyan **függvényt**, melynek értelmezési tartománya egy eseménytér elemi eseményeinek halmaza, képhalmaza pedig a valós számok halmaza, **valószínűségi változó**nak nevezzük.

Vegyük észre, hogy a valószínűségi változó a nevével ellentétben nem változó, hanem függvény!

Definíció A valószínűségi változó értékkészlete a lehetséges értékeinek halmaza.

1. példa Adjuk meg a bevezető példákban szereplő valószínűségi változók lehetséges értékeinek halmazát!



6.1. ábra A görög ábécé

Megoldás:
a) $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,10,12\}$
b) $\{0,1,2,3,4,5\}$
c) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$
d) $\{0,1,2,3,4\}$
e) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
f) $\{1,2,3,...,n,...\}$

Az f) valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza nem véges halmaz, ezért ez **végtelen valószínűségi változó**.

Definíció A ξ („kszi”) valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza $\{x_1, x_2,...x_n\}$ vagy $\{x_1, x_2,...x_n...\}$ Ekkor a $P(\xi = x_i)$ valószínűségek halmazát a ξ **eloszlásának** nevezzük.

Vegyük észre, hogy a $P(\xi = x_i)$ jelölés a hagyományból származik, de nem pontos. Annak az eseménynek a valószínűségét jelöli, amely azoknak az elemi eseményeknek az összege, melyekhez a ξ az x_i-t rendeli.

2. példa Adjuk meg az 1. példa valószínűségi változóinak eloszlását!

Megoldás:

a) Például $P(\xi_a = 5) = P(\{(1;4),(2;3),(3;2),(4;1)\}) = \frac{4}{36}$

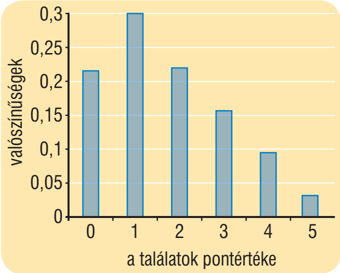
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\xi_a = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(A 2.3. lecke táblázata alapján)

b)

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(\xi_b = x_i)$	$1-\frac{\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{100}$	$\frac{7\pi}{100}$	$\frac{5\pi}{100}$	$\frac{3\pi}{100}$	$\frac{\pi}{100}$

(A 3.1. példa alapján.)



6.2. ábra A b) jelű eloszlás

c) Az 5.3. példa megoldásában ezt az eloszlást adtuk meg:

$P(\xi_c = i) = \binom{6}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-i}$, ahol $i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

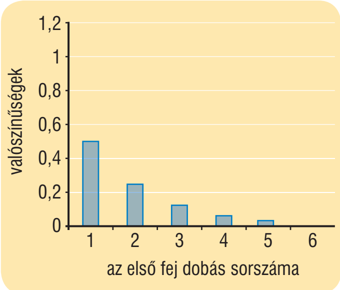
d) Annak a valószínűsége, hogy egy pálcikát három részre törve a részekből háromszög rakható össze, a 2.2. példa eredménreal szerint: $\frac{1}{4}$. Annak valószínűsége, hogy nem rakható össze háromszög a részekből: $\frac{3}{4}$. A 4.3. példában alkalmazott meggondolás szerint: $P(\xi_d = i) = \binom{4}{i} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-i}$, ahol $i \in \{0,1,2,3,4\}$.

e) Annak a valószínűsége, hogy öt pontot érő találat lesz: $\frac{\pi}{100}$. Annak a valószínűsége, hogy nem öt pontot érő találat lesz: $1-\frac{\pi}{100}$. Ebből következően:

$P(\xi_e = i) = \binom{10}{i} \cdot \left(\frac{\pi}{100}\right)^i \cdot \left(1-\frac{\pi}{100}\right)^{10-i}$, ahol

$i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

f) Minden dobás valószínűsége $\frac{1}{2}$, a dobások eredménye független egymástól, így $P(\xi_f = i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$, ahol i tetszőleges pozitív egész szám.



6.3. ábra Az f) eloszlás első néhány tagja

3. példa Szorozzuk össze az 1. példában szereplő lehetséges értékeket a hozzájuk tartozó valószínűségekkel, és az így kapott szorzatokat adjuk össze!

Megoldás:

a) $\frac{2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5+7\cdot6+8\cdot5+9\cdot4+10\cdot3+11\cdot2+12\cdot1}{36} = 7$

b) $0\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+1\cdot\frac{9\pi}{100}+2\cdot\frac{7\pi}{100}+3\cdot\frac{5\pi}{100}+4\cdot\frac{3\pi}{100}+5\cdot\frac{\pi}{100}=\frac{55\pi}{100}\approx 1{,}728$

c) $\sum_{i=0}^{6} i\cdot\binom{6}{i}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6-i}=0\cdot\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6}+1\cdot\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5}+2\cdot\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{4}+$

$3\cdot\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3}+4\cdot\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2}+5\cdot\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{1}+6\cdot\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{0}=1$

d) $\sum_{i=0}^{4} i\binom{4}{i}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{i}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{4-i}=1$

e) $\sum_{i=0}^{10} i\cdot\binom{10}{i}\cdot\left(\frac{\pi}{100}\right)^{i}\cdot\left(1-\frac{\pi}{100}\right)^{10-i}=\frac{\pi}{10}\approx 0{,}314$

(A soktagú összegek számolásakor hasznos segítőtárs lehet például a **Derive** program.)

f) A következő végtelen összeget (**valós számsor**) kapjuk: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^{i}}$. A valós számsorok elmélete szerint $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^{i}}=2$.

Kérdés:
A 6.3. példában kiszámolt számoknak lehet-e valamilyen jelentése?

A 6.3. példában a valószínűségekkel „súlyoztuk” a lehetséges értékeket. Ha igaz, hogy az események relatív gyakorisága sok kísérlet esetében a valószínűséghez nagy eséllyel közel van, akkor sok kísérlet esetében a kimenetelek **átlaga** nagy eséllyel a **súlyozott közép**hez lesz közel.

Ez a meggondolás indokolja a következő definíciót:

Definíció A ξ valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ vagy $\{x_1, x_2, \ldots x_n \ldots\}$. Ekkor az $M(\xi)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot P(\xi=x_i)$ vagy $M(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\cdot P(\xi=x_i)$ összeget a valószínűségi változó **várható érték**ének nevezzük.

(A végtelen valószínűségi változó várható értékének létezése megköveteli azt is, hogy a sor konvergens legyen, azaz létezzen összege.)

A definíció következtében:

$M(\xi_a)=7,\quad M(\xi_b)=\frac{55\pi}{100}\approx 1{,}728,\quad M(\xi_c)=1,\quad M(\xi_d)=1,\quad M(\xi_e)=\frac{\pi}{10}\approx 0{,}314,\quad M(\xi_f)=2.$

Oldjuk meg!

1. A κ („kappa”) valószínűségi változó jelölje a két kockával dobott számok különbségének abszolút értékét! Adjuk meg az eloszlását és várható értékét!

2. A λ („lambda”) valószínűségi változó jelölje az egyetlen (genovai) lottószelvénnyel elérhető találatok számát! Adjuk meg az eloszlását és várható értékét!

3. A 32 lapos magyar kártya csomagból egyszerre kihúzunk 6 lapot. A β valószínűségi változó jelöli a kihúzott 6 lapban levő piros lapok számát. Adjuk meg az eloszlását és várható értékét!

4. A 32 lapos magyar kártya csomagból hatszor húzunk egy-egy lapot úgy, hogy a kihúzott lapot mindig visszakeverjük a csomagba. A γ valószínűségi változó jelöli a kihúzott piros lapok számát. Adjuk meg az eloszlását és várható értékét!

5. Négy pénzdarabot egyszerre feldobunk. A δ valószínűségi változó jelöli a dobott fejek számát. Adjuk meg az eloszlását és várható értékét!

6.4. ábra Négy pénzdarabot feldobunk

6. Egy városban a teljes felnőtt lakosság lélekszáma 132 546. Ebből 19 540 fő nyugdíjas. A városi tanácsba véletlenszerűen választanak 11 főt. Várhatóan hány nyugdíjas lesz közöttük?

7. 3 piros, 4 fehér és 5 zöld gyöngyöt véletlenszerűen sorba rakva 1954 darab gyöngysort készítünk. Várhatóan hány olyan lesz közöttük, melyben nem áll egymás mellett két zöld gyöngy?

8. Egy pénzdarabot egymás után sokszor feldobunk. Várhatóan hányadik dobásra dobunk először írás után fejet?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 494., 496., 500., 504. és 505. feladatok

7. A valószínűségi változók szórása

1. példa A 6.1. példa ξ valószínűségi változói esetében adjuk meg az $\eta = \left(\xi - M\left(\xi\right)\right)^2$ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

Megoldás:
a) $M\left(\xi_a\right) = 7$. Legyen $\eta_a = \left(\xi_a - M\left(\xi_a\right)\right)^2$, a lehetséges értékeit y-nal jelöljük! A 6.1. példa a) része alapján ezek:

$$(2-7)^2 = (12-7)^2 = 25,$$
$$(3-7)^2 = (11-7)^2 = 16,$$
$$(4-7)^2 = (10-7)^2 = 9,$$
$$(5-7)^2 = (9-7)^2 = 4,$$
$$(6-7)^2 = (8-7)^2 = 1,$$
$$(7-7)^2 = 0.$$

Az η eloszlása:

y_i	25	16	9	4	1	0
$P\left(\eta_a = y_i\right)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$

$$M(\eta_a) = M\left(\left(\xi_a - M(\xi_a)\right)^2\right) = \frac{25\cdot 2+16\cdot 4+9\cdot 6+4\cdot 8+1\cdot 10+0\cdot 6}{36} = \frac{35}{6}.$$

b) $M(\xi_b) = \frac{55\pi}{100} = \frac{11\pi}{20} \approx 1{,}728.$ Legyen $\eta_b = \left(\xi_b - M(\xi_b)\right)^2$, a lehetséges értékeit y-nal jelöljük!

Az eloszlása:

y_i	$\frac{121\pi^2}{400}$	$\frac{(11\pi-20)^2}{400}$	$\frac{(11\pi-40)^2}{400}$	$\frac{(11\pi-60)^2}{400}$	$\frac{(11\pi-80)^2}{400}$	$\frac{(11\pi-100)^2}{400}$
$P(\eta_b = y_i)$	$1-\frac{\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{100}$	$\frac{7\pi}{100}$	$\frac{5\pi}{100}$	$\frac{3\pi}{100}$	$\frac{\pi}{100}$

$$M(\eta_b) = \frac{\pi(620-121\pi)}{400} \approx 1{,}884.$$

c) $M(\xi_c) = 1.$ Legyen $\eta_c = \left(\xi_c - M(\xi_c)\right)^2$! Ekkor $M(\eta_c) = \sum_{i=0}^{6}(i-1)^2\binom{6}{i}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^i\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6-i} = \frac{5}{6}.$

d) $M(\xi_d) = 1.$ Legyen $\eta_d = \left(\xi_d - M(\xi_d)\right)^2$! Ekkor $M(\eta_d) = \sum_{i=0}^{4}(i-1)^2\binom{4}{i}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{4-i} = \frac{3}{4}.$

e) $M(\xi_e) = \frac{\pi}{10}.$ Legyen $\eta_e = \left(\xi_e - M(\xi_e)\right)^2$! Ekkor

$$M(\eta_e) = \sum_{i=0}^{10}\left(i-\frac{\pi}{10}\right)^2\binom{10}{i}\cdot\left(\frac{\pi}{100}\right)^i\cdot\left(1-\frac{\pi}{100}\right)^{10-i} = \frac{\pi(100-\pi)}{1000} \approx 0{,}3043.$$

f) $M(\xi_f) = 2.$ Legyen $\eta_f = \left(\xi_f - M(\xi_f)\right)^2$! Ekkor $M(\eta_f) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i-2)^2}{2^i} = 2.$

Most is érdemes elgondolkodni az $M(\eta)$ jelentésén. Ez a várható értéke a valószínűségi változó várható értéktől való eltérései négyzetének. Ez a megállapítás indokolja a következő definíciót:

7.1. ábra Szórás

Definíció Ha a ξ valószínűségi változó várható értéke $M(\xi)$, akkor az $\eta = \left(\xi - M(\xi)\right)^2$ valószínűségi változó várható értékét (amennyiben ez létezik) a ξ **szórásnégyzetének** nevezzük. A ξ **szórása**:

$$D(\xi) = \sqrt{M\left(\left(\xi - M(\xi)\right)^2\right)}.$$

(Az „amennyiben ez létezik” feltétel a végtelen valószínűségi változó esetére vonatkozik.)

A definíció következtében:

$D(\xi_a) = \sqrt{\frac{35}{6}} = \frac{\sqrt{210}}{6} \approx 2{,}42;$ $D(\xi_b) = \sqrt{\frac{\pi(620-121\pi)}{400}} \approx 1{,}37;$

$D(\xi_c) = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0{,}91;$ $D(\xi_d) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87;$

$D(\xi_e) = \sqrt{\frac{\pi(100-\pi)}{1000}} \approx 0{,}55;$ $D(\xi_f) = \sqrt{2} \approx 1{,}41.$

2. példa A 6.1. példa ξ valószínűségi változói esetében adjuk meg az $M\left(\xi^2\right)-M^2\left(\xi\right)$ értékét!

Megoldás:

a) $M\left(\xi_a\right)=7$. A $\xi_a^{\ 2}$ eloszlása:

x_i^2	4	9	26	35	36	49	64	81	100	121	144
$P\left(\xi_a^{\ 2}=x_i^{\ 2}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$M\left(\xi_a^{\ 2}\right)=\frac{329}{6}.\quad M\left(\xi_a^{\ 2}\right)-M^2\left(\xi_a\right)=\frac{329}{6}-49=\frac{35}{6}=D^2\left(\xi_a\right).$$

b) $M\left(\xi_b\right)=\dfrac{55\pi}{100}\approx 1{,}728$. A $\xi_b^{\ 2}$ eloszlása:

x_i^2	0	1	4	9	16	25
$P\left(\xi_b^{\ 2}=x_i^{\ 2}\right)$	$1-\frac{\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{100}$	$\frac{7\pi}{100}$	$\frac{5\pi}{100}$	$\frac{3\pi}{100}$	$\frac{\pi}{100}$

$$M\left(\xi_b^{\ 2}\right)=\frac{31\pi}{20}.\quad M\left(\xi_b^{\ 2}\right)-M^2\left(\xi_b\right)=\frac{31\pi}{20}-\left(\frac{55\pi}{100}\right)^2=\frac{\pi\left(620-121\pi\right)}{400}=D^2\left(\xi_b\right).$$

c) $M\left(\xi_c\right)=1,\ M\left(\xi_c^{\ 2}\right)=\sum\limits_{i=0}^{6} i^2\binom{6}{i}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^i\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6-i}=\frac{11}{6},\ M\left(\xi_c^{\ 2}\right)-M^2\left(\xi_c\right)=\frac{11}{6}-1=\frac{5}{6}=D^2\left(\xi_c\right).$

d) $M\left(\xi_1\right)=1,\ M\left(\xi_d^{\ 2}\right)=\sum\limits_{i=0}^{4} i^2\binom{4}{i}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{4-i}=\frac{7}{4},\ M\left(\xi_d^{\ 2}\right)-M^2\left(\xi_d\right)=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}=D^2\left(\xi_d\right).$

e) $M\left(\xi_e\right)=\frac{\pi}{10},\ M\left(\xi_e^{\ 2}\right)=\sum\limits_{i=0}^{4} i^2\binom{10}{i}\cdot\left(\frac{\pi}{100}\right)^i\cdot\left(1-\frac{\pi}{100}\right)^{10-i}=\frac{\pi\left(9\pi+100\right)}{1000},$

$$M\left(\xi_e^{\ 2}\right)-M^2\left(\xi_d\right)=\frac{\pi\left(9\pi+100\right)}{1000}-\left(\frac{\pi}{10}\right)^2=\frac{\pi\left(100-\pi\right)}{1000}=D^2\left(\xi_e\right).$$

f) $M\left(\xi_f\right)=2,\ M\left(\xi_f^{\ 2}\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{i^2}{2^i}=6,\ M\left(\xi_f^{\ 2}\right)-M^2\left(\xi_f\right)=6-4=2=D^2\left(\xi_f\right).$

A példa alapján megsejthető a következő tétel, amelyet nem bizonyítunk:

Tétel Ha a ξ valószínűségi változó várható értéke $M\left(\xi\right)$, szórása $D\left(\xi\right)$, akkor $D^2\left(\xi\right)=M\left(\xi^2\right)-M^2\left(\xi\right)$.

Oldjuk meg!

1. A κ valószínűségi változó jelölje a két kockával dobott számok különbségének abszolút értékét! Adjuk meg a szórását!

2. A λ valószínűségi változó jelölje az egyetlen (genovai) lottószelvénnyel elérhető találatok számát! Adjuk meg a szórását!

7.2. ábra Elkoptatott magyar kártya

3. A 32 lapos magyar kártya csomagból egyszerre kihúzunk 6 lapot. A β valószínűségi változó jelöli a kihúzott 6 lapban levő piros lapok számát. Adjuk meg a szórását!

4. A 32 lapos magyar kártya csomagból hatszor húzunk egy-egy lapot úgy, hogy a kihúzott lapot mindig visszakeverjük a csomagba. A γ valószínűségi változó jelöli a kihúzott piros lapok számát. Adjuk meg a szórását!

5. Négy pénzdarabot egyszerre feldobunk. A δ valószínűségi változó jelöli a dobott fejek számát. Adjuk meg a szórását!

6. Egy városban a teljes felnőtt lakosság lélekszáma 132 546. Ebből 19 540 fő nyugdíjas. A városi tanácsba véletlenszerűen választanak 11 főt. Mekkora a szórás?

7. 3 piros, 4 fehér és 5 zöld gyöngyöt véletlenszerűen sorba rakva 1954 darab gyöngysort készítünk. Várhatóan hány olyan lesz közöttük, melyben nem áll egymás mellett két zöld gyöngy? Mekkora a szórás?

8. Egy pénzdarabot egymás után sokszor feldobunk. Várhatóan hányadik dobásra dobunk először írás után fejet? Mekkora a szórás?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 499., 501. és 503. feladatok

8. Speciális valószínűségi változók

8.1. A binomiális eloszlású valószínűségi változó

A következőkben speciális valószínűségi változókkal ismerkedünk meg.

A korábban tárgyalt ξ_c, ξ_d, ξ_e, valamint a feladatok között szereplő γ és δ valószínűségi változók hasonlóságot mutatnak.

Definíció Ha ξ valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza $\{0,1,...,n\}$, ahol n pozitív egész szám, és eloszlása: $P(\xi = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, ahol p 1-nél nem nagyobb nemnegatív szám és $i \in \{0,1,...,n\}$, akkor a ξ **binomiális eloszlású** valószínűségi változó. (Az n és p a valószínűségi változó paraméterei.)

Korábban meghatároztuk több binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét. Tegyük meg ezt most általános esetben!

$$M(\xi)=\sum_{i=0}^{n} i\cdot P(\xi=i)=\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}=\sum_{i=1}^{n} i\frac{n!}{i!(n-i)!}p^{i}(1-p)^{n-i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n-1)!}{i(i-1)!(n-i)!}p^{i}(1-p)^{n-i}=np\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!((n-1)-(i-1))!}\cdot p^{i-1}\cdot(1-p)^{(n-1)-(i-1)}=$$
$$=np\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}\cdot(1-p)^{(n-1)-(i-1)}=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k}(1-p)^{(n-1)-k}=$$
$$=np(p+1-p)^{n-1}=np\cdot 1^{n-1}=np.$$

A gondolatmenetben a binomiális együtthatók definícióját és a binomiális tételt használtuk fel.

Bebizonyítottuk a következő tételt:

8.1. ábra Válasszunk, de tegyük vissza!

Tétel Ha a ξ n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor várható értéke: $M(\xi)=np$.

Nézzük most meg, hogy milyen módon adhatjuk meg általánosan a binomiális eloszlású valószínűségi változó szórását!

$$M(\xi^2)=\sum_{i=0}^{n} i^2\cdot P(\xi=i)=\sum_{i=1}^{n} i^2\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}=\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-i+i\right)\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-i\right)\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}+\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}.$$

Az előző tétel szerint a második szumma éppen a ξ várható értéke, azaz np.

$$M(\xi^2)=\sum_{i=2}^{n} i\cdot(i-1)\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{i\cdot(i-1)\cdot(i-2)!\cdot(n-i)!}p^{i}(1-p)^{n-i}+np=$$
$$=n\cdot(n-1)p^2\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(i-2)!\cdot(n-i)!}p^{i-2}(1-p)^{n-i}+np=$$
$$=n\cdot(n-1)p^2\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(i-2)!\cdot\left[(n-2)-(i-2)\right]!}p^{i-2}(1-p)^{(n-2)-i(-2)}+np=$$
$$=n\cdot(n-1)p^2\sum_{i=2}^{n}\binom{n-2}{i-2}p^{i-2}(1-p)^{(n-2)-(i-2)}+np=n\cdot(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k}(1-p)^{(n-2)-k}+np=$$
$$=\left(n^2p^2-np^2\right)\cdot(p+1-p)^{n-2}+np=\left(n^2p^2-np^2\right)1^{n-2}+np=n^2p^2-np^2+np.$$

Ebből következően a szórásnégyzet:

$$D^2(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p).$$

Bebizonyítottuk a következő tételt:

Tétel Ha a ξ n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor szórása: $D(\xi)=\sqrt{np(1-p)}$.

8.2. A hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó

8.2. ábra Amit választasz, az a tied

Egy korábbi feladatban szereplő λ valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza: $\{0,1,2,3,4,5\}$.
Eloszlása:

$$P(\lambda=i)=\frac{\binom{5}{i}\binom{85}{5-i}}{\binom{90}{5}},\ \text{ahol } i\in\{0,1,2,3,4,5\}.$$

Egy ugyancsak korábban vizsgált β valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza: $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Eloszlása:

$$P(\lambda=i)=\frac{\binom{8}{i}\binom{24}{6-i}}{\binom{32}{6}},\ \text{ahol } i\in\{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

Ezek alapján adjuk meg a következő definíciót!

Definíció Ha ξ valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza $\{0,1,\ldots,n\}$, ahol n pozitív egész szám, és eloszlása: $P(\xi=i)=\frac{\binom{s}{i}\binom{N-s}{n-i}}{\binom{N}{n}}$, ahol $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, s és N olyan pozitív egészek, melyekre $n\le s\le N$, akkor a ξ **hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó**. (Az s, N és n a valószínűségi változó **paraméterei**.)

Adjuk meg általánosan a hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó várható értékét!

$$M(\xi)=\sum_{i=0}^{n} i\cdot P(\xi=i)=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{\binom{s}{i}\binom{N-s}{n-i}}{\binom{N}{n}}=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{i=1}^{n} i\frac{s(s-1)!}{i(i-1)!(s-i)!}\binom{N-s}{n-i}=$$

$$=\frac{n!(N-n)!s}{N!}\sum_{i=1}^{n}\frac{(s-1)!}{(i-1)![(s-1)-(i-1)]!}\binom{(N-1)-(s-1)}{(n-1)-(i-1)}=$$

$$=\frac{n!(N-n)!s}{N!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{s-1}{k}\binom{(N-1)-(s-1)}{(n-1)-k}.$$

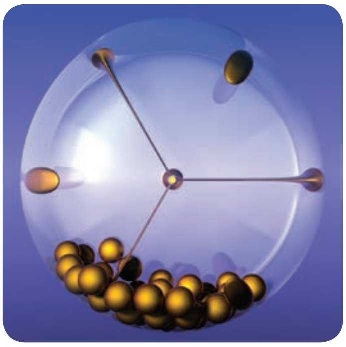
Felhasználva a Kombinatorika című fejezetben bizonyított

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{s-1}{k}\binom{(N-1)-(s-1)}{(n-1)-k}=\binom{N-1}{n-1}$$ azonosságot:

$$M(\xi)=\frac{n!(N-n)!s}{N!}\binom{N-1}{n-1}=$$
$$=\frac{n(n-1)!(N-n)!s}{N(N-1)!}\,\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}=\frac{ns}{N}.$$

Igazoltuk a következő tételt:

Tétel Az n, s és N paraméterű, hipergeometriai eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke: $M(\xi)=\dfrac{ns}{N}$.



8.3. ábra A lottóhúzás is hipergeometriai valószínűségi változóval modellezhető

Adjuk meg általánosan a hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó szórását!

$$M\left(\xi^2\right)=\sum_{i=0}^{n} i^2\cdot P(\xi=i)=\sum_{i=1}^{n} i^2\cdot\frac{\binom{s}{i}\binom{N-s}{n-i}}{\binom{N}{n}}=\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-i+i\right)\cdot\frac{\binom{s}{i}\binom{N-s}{n-i}}{\binom{N}{n}}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-i\right)\cdot\frac{\binom{s}{i}\binom{N-s}{n-i}}{\binom{N}{n}}+\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{\binom{s}{i}\binom{N-s}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

Az előző tétel szerint a második szumma éppen a ξ várhatóértéke, $\dfrac{ns}{N}$.

$$M\left(\xi^2\right)=\sum_{i=1}^{n} i(i-1)\cdot\frac{\binom{s}{i}\cdot\binom{N-s}{n-i}}{\binom{N}{n}}+\frac{ns}{N}=$$
$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{i=2}^{n} i(i-1)\frac{s(s-1)\cdot(s-2)!}{i(i-1)\cdot(i-2)!\cdot(s-i)!}\binom{(N-2)-(s-2)}{(n-2)-(i-2)}+\frac{ns}{N}=$$
$$=\frac{n(n-1)\cdot(n-2)!\cdot(N-n)!\cdot s(s-1)}{N(N-1)\cdot(N-2)!}\sum_{i=2}^{n}\frac{(s-2)!}{(i-2)!\cdot[(s-2)-(i-2)]!}\binom{(N-2)-(s-2)}{(n-2)-(i-2)}+\frac{ns}{N}=$$
$$=\frac{n(n-1)\cdot(n-2)!\cdot(N-n)!\cdot s(s-1)}{N(N-1)\cdot(N-2)!}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{s-2}{k}\binom{(N-2)-(s-2)}{(n-2)-k}+\frac{ns}{N}.$$

Felhasználva a Kombinatorika című fejezetben bizonyított azonosságot:

$$M\left(\xi^2\right)=\frac{n(n-1)\cdot(n-2)!\cdot(N-n)!s(s-1)}{N(N-1)\cdot(N-2)!}\binom{N-2}{n-2}+\frac{ns}{N}=$$
$$=\frac{n(n-1)\cdot(n-2)!\cdot(N-n)!s(s-1)}{N(N-1)\cdot(N-2)!}\cdot\frac{(N-2)!}{(n-2)!\cdot(N-n)!}+\frac{ns}{N}=\frac{n(n-1)\cdot s(s-1)}{N(N-1)}+\frac{ns}{N}.$$

MatEm_Book.indb 195 2012.07.05. 12:05:28

Ebből következően:

$$D^2(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=\frac{n(n-1)s(s-1)}{N(N-1)}+\frac{ns}{N}-\left(\frac{ns}{N}\right)^2=\frac{ns}{N}\left[\frac{(n-1)(s-1)}{N-1}+1-\frac{ns}{N}\right]=$$

$$=\frac{ns}{N}\left(\frac{ns-n-s+1}{N-1}+1-\frac{ns}{N}\right)=\frac{ns}{N}\cdot\frac{nNs-nN-sN+N+N^2-N-nNs+ns}{N(N-1)}=$$

$$=\frac{ns}{N}\cdot\frac{N^2-nN-sN+ns}{N(N-1)}=\frac{ns}{N}\frac{N(N-n)-s(N-n)}{N(N-1)}=\frac{ns}{N}\frac{(N-s)\cdot(N-n)}{N(N-1)}=$$

$$=\frac{ns}{N}\left(1-\frac{s}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Bebizonyítottuk a következő tételt:

Tétel Az n, s és N paraméterű hipergeometriai eloszlású ξ valószínűségi változó szórása: $D(\xi)=\sqrt{\frac{ns}{N}\left(1-\frac{s}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}$.

Ha visszatekintünk a korábbi példákra és feladatokra, észrevehetjük, hogy a **hipergeometriai eloszlás visszatevés nélküli mintavétel, míg a binomiális eloszlás visszatevéses mintavétel** esetén alkalmazható.

Látható az is, hogy a binomiális eloszlásnál egyszerűbben számolhatók a jellemzők.

Nézzük most meg az $n=20$ és $p=0,6$ paraméterű binomiális eloszlású (1. oszlop) és az $n=20$, $N=50$ és $s=30$ paraméterű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó (2. oszlop) eloszlásait (lásd a definíciókat)!

0	$1,099511627 \cdot 10^{-8}$	$2,121826256 \cdot 10^{-14}$
1	$3,298534883 \cdot 10^{-7}$	$1,273095754 \cdot 10^{-11}$
2	$4,700412208 \cdot 10^{-6}$	$1,753689401 \cdot 10^{-9}$
3	$4,230370987 \cdot 10^{-5}$	$9,820660646 \cdot 10^{-8}$
4	0,0002696861504	$2,817302023 \cdot 10^{-6}$
5	0,001294493522	$4,687990566 \cdot 10^{-5}$
6	0,004854350708	0,0004883323506
7	0,01456305212	0,003348564690
8	0,03549743955	0,01564407566
9	0,07099487911	0,05098809845
10	0,1171415505	0,1177825074
11	0,1597384780	0,1946818304
12	0,1797057877	0,2311846736
13	0,1658822656	0,1969857574
14	0,1244116992	0,1195984955
15	0,07464701952	0,05102869145
16	0,03499079040	0,01494981194
17	0,01234969073	0,002896849374
18	0,003087422682	0,0003486948320
19	0,0004874877920	$2,318192789 \cdot 10^{-5}$
20	$3,656158440 \cdot 10^{-5}$	$6,375030171 \cdot 10^{-7}$

Figyeljük meg, hogy a két eloszlás értékei között jelentős eltérések mutatkoznak!

Nézzük most meg az $n = 20$ és $p = 0,6$ paraméterű binomiális eloszlású (1. oszlop), és az $n = 20$, $N = 10000$ és $s = 6000$ paraméterű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó (2. oszlop) eloszlásait!

0	$1,099511627 \cdot 10^{-8}$	$1,0685484 \cdot 10^{-8}$
1	$3,298534883 \cdot 10^{-7}$	$3,220944689 \cdot 10^{-7}$
2	$4,700412208 \cdot 10^{-6}$	$4,609825421 \cdot 10^{-6}$
3	$4,230370987 \cdot 10^{-5}$	$4,16516187 \cdot 10^{-5}$
4	0,0002696861504	0,0002664621532
5	0,001294493522	0,001282976819
6	0,004854350708	0,004824037905
7	0,01456305212	0,01450478214
8	0,03549743955	0,03542041975
9	0,07099487911	0,07094147412
10	0,1171415505	0,117170779
11	0,159738478	0,1598717493
12	0,1797057877	0,179885754
13	0,1658822656	0,1660068034
14	0,1244116992	0,1244219745
15	0,07464701952	0,0745722092
16	0,0349907904	0,03490323699
17	0,01234969073	0,01229516079
18	0,003087422682	0,003066614433
19	0,000487487792	0,0004828703896
20	$3,656158440 \cdot 10^{-5}$	$3,61005975 \cdot 10^{-5}$

Szembetűnő a különbség. Itt már sokkal közelebb esnek egymáshoz a két valószínűségi változó eloszlásértékei. Ennek oka az, hogy ha ***N* és *s* sokkal nagyobb, mint *n***, akkor elhanyagolható a különbség a visszatevéses és a visszatevés nélküli eset között.

Vegyük észre, hogy az ilyen esetekben számolhatunk a **hipergeometriai eloszlás helyett** a $p = \frac{s}{N}$ paraméterű **binomiális eloszlásra** vonatkozó összefüggésekkel.

8.3. Egy, a statisztikában (is) használható egyenlőtlenség

A várható érték szemléletes jelentéséről már szóltunk. A szórás jelentéséről szól a következő tétel:

Tétel **Csebisev-egyenlőtlenség**: Ha a ξ valószínűségi változó, várható értéke $M(\xi)$, szórása $D(\xi)$ és k pozitív szám, akkor $P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| \geq k \cdot D(\xi)\right) \leq \frac{1}{k^2}$.

Az egyenlőtlenséget nem bizonyítjuk. Szemléletes jelentése: nagyon kicsi annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó nagyon eltér a várható értéktől.

Az egyenlőtlenség ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó esetén:

$$P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| \geq k\cdot D(\xi)\right) \leq \frac{1}{k^2},$$

$$P\left(\left|\xi - np\right| \geq k\cdot \sqrt{np(1-p)}\right) \leq \frac{1}{k^2},$$

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \geq k\cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

8.4. ábra Pafnutyij Lvovics Csebisev (1821–1894)

Néha a Csebisev-egyenlőtlenségben szereplő esemény komplementerének valószínűségére van szükség, ezért ezt is megadjuk:

Tétel

$$P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| < k\cdot D(\xi)\right) > 1-\frac{1}{k^2}.$$

Szemléletes jelentése: nagyon nagy annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó kicsit tér el a várható értéktől.

Binomiális eloszlású valószínűségi változó esetére:

$$P\left(\left|\xi - np\right| < k\cdot \sqrt{np(1-p)}\right) > 1-\frac{1}{k^2},$$

vagy

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| < k\cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) > 1-\frac{1}{k^2}.$$

1. példa Matországban 8 000 000 felnőtt ember él. A máktermelők szövetségének (MTSz) feltételezése szerint az országban élő felnőttek közül kétmillióan szeretik a mákos tésztát. Becsüljük meg, ha egy közvélemény-kutató cég megkérdezne 1000 matországi felnőtt embert, akkor milyen valószínűséggel esne közülük a mákos tésztát szeretők száma a $[200;300]$ intervallumba?

Megoldás:

8.5. ábra A mák neki is ízlik

A problémát olyan χ („khi") hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó írja le, melynek paraméterei: $N = 8\,000\,000$, $s = 2\,000\,000$ és $n = 1000$.

A keresett valószínűséget a következő összeg adja meg:

$$P\left(\chi \in [200;300]\right) = P(200 \leq \chi \leq 300) =$$

$$= \sum_{i=200}^{300} \frac{\binom{2000000}{i}\binom{6000000}{1000-i}}{\binom{8000000}{1000}} \approx 0{,}9998.$$

(Ennek az összegnek a kiszámolásához a Derive programnak is 12 másodpercre volt szüksége, „kézzel” ez reménytelen feladatnak tűnhet.)

Mivel N és s sokkal nagyobb, mint n, vizsgálhatunk olyan binomiális eloszlású ξ valószínűségi változót, melynek paraméterei: $n = 1000$ és $p = \frac{2000000}{8000000} = \frac{1}{4}$. Ekkor a keresett valószínűség:

$$P(200 \le \xi \le 300) = \sum_{i=200}^{300} \binom{1000}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{1000-i} \approx 0{,}9998.$$

(Ez a számolás a Derive programnak már csak 0,125 másodpercig tartott, de nélküle ez komoly erőpróbát jelentene mindenkinek.)

Ha engedünk a pontosságból, akkor a keresett valószínűség becslésére alkalmazhatjuk a Csebisev-egyenlőtlenség második alakját!

$$P\left(|\xi - np| < k \cdot \sqrt{np(1-p)}\right) > 1 - \frac{1}{k^2},$$

$$P\left(|\xi - 250| < k \cdot \frac{5\sqrt{30}}{2}\right) > 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Mivel $\xi \in [200;300]$, $k \cdot \frac{5\sqrt{30}}{2} = 50{,}1$. Így $k = \frac{167\sqrt{30}}{250}$. Ebből következően:

$$P\left(|\xi - 250| < 51\right) > \frac{77417}{83667} \approx 0{,}9253.$$

8.6. ábra Mák

2. példa Matországban a Mambi nevű üdítőitalt gyártó cég adatai szerint 4 000 000 felnőtt ember szereti a termékük. Erről meg akarnak győződni. A Matjós közvélemény-kutató irodát megbízzák azzal, hogy 2000 felnőttet kérdezzen meg arról, hogy szereti-e a Mambit. Legalább 0,9 valószínűséggel milyen intervallumba fog esni a Mambit szeretők száma a megkérdezettek között?

Megoldás:

A feltételek szerint teljesül, hogy $p = \frac{4000000}{8000000} = \frac{1}{2}$ és $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{9}{10}$.

Innen $k = \sqrt{10}$.

A Csebisev-egyenlőtlenségben szereplő $k \cdot \sqrt{np(1-p)}$ kifejezés értéke:

$$k \cdot \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot 2000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2} \approx 70{,}71.$$

Így legalább 0,9 valószínűséggel az alábbi intervallumba fog esni a Mambit szeretők száma:

$$[930;1070] \text{ (mivel } np = 2000 \cdot \frac{1}{2} = 1000\text{)}.$$

A matematikai statisztika alapproblémája, hogy egy sokaságban adott tulajdonsággal rendelkező elemek aránya milyen kapcsolatban van egy a sokaságból véletlenszerűen választott mintában szereplő, adott tulajdonsággal rendelkező elemek arányával. Az előző két példa ebbe a problémakörbe adott betekintést.

Oldjuk meg!

8.7. ábra Hát igen...

1. A Sziget fesztiválon 12 345 résztvevő közül 6543 a vidéki vendég. Egy mobiltelefonos cég reklámhadjárata keretében 500 db mobiltelefont kisorsol a vendégek között. Várhatóan hány vidéki fiatal fog telefont kapni, és mennyi a szórás?

2. A statisztikák szerint a szegediek 12 százaléka túlsúlyos. Egy diák nyári munkaként azt a feladatot kapja, hogy a Kárász utca sarkán találomra szólítson meg 1234 szegedit, és jegyezze fel, hogy túlsúlyosak-e vagy sem. Várhatóan hány túlsúlyost fog találni, és mekkora a szórás?

3. A Magyarországra 2008-ban menekültként érkezettek közül véletlenszerűen kiválasztunk 100 embert. Várhatóan hány lesz közöttük olyan, aki menekültstátuszt kapott, és mennyi a szórás? (*http://www.ksh.hu/docs/hun/xstadat/xstadat_eves/i_wnvn003.html*)

4. A Magyarországon 2008-ban élt 15 és 74 év közötti életkorú emberek közül véletlenszerűen kiválasztunk 1234-et. Várhatóan hány lesz közöttük, aki foglalkoztatott volt 2008-ban? Mekkora a szórás? (*http://www.ksh.hu/docs/hun/xstadat/xstadat_eves/i_int012.html*)

8.8. ábra Szalagavató bál

5. A tapasztalatok szerint a szalagavató bálon feltűzött szalagok 8 százaléka elvész az érettségi vizsgák kezdetére. Az ez évi szalagtűző ünnepségen 234 diák kapott szalagot.
   a) Várhatóan hány olyan lesz közöttük, akinek még lesz szalagja az érettségi kezdetekor?
   b) Mekkora a szórás?
   c) Legalább 0,9 valószínűséggel milyen intervallumba esik az érettségi kezdetekor szalaggal rendelkezők száma?
   d) A diákmozgalmat patronáló tanár annyi szalagot szeretne rendelni, hogy legalább 0,9 valószínűséggel minden elveszett szalagot pótolni tudjon. Hány szalagot rendeljen?

8.9. ábra Készül a dolgozat

6. Egy vizsgán 20 kérdésből álló feladatsort kell megoldani. Minden kérdésre három válaszlehetőség közül egyet kell választani. Várhatóan hány helyes választ fog adni az a vizsgázó, aki vaktában tippel?

7. Egy művelődési ház nagytermében 600 ülőhely van. Az igazgató tapasztalata szerint a koncertekre a jegyet vásárlók 95 százaléka jön el. Hány jegyet adjanak el a következő koncertre, ha azt akarják, hogy legalább 0,92 legyen annak a valószínűsége, hogy minden jegytulajdonos le tud ülni?

8. Az utazási irodák tapasztalatai szerint az utazások 40 százalékát fizetik üdülési csekkel. A Mattravel irodában erre a nyárra 789 utazást kötöttek le. Milyen intervallumba esik legalább 93 százalékos valószínűséggel az üdülési csekkel fizetők száma?

9. A nagy számok törvénye

Térjünk vissza a kezdetekhez! Végezzünk el egy kísérletet n-szer! Legyen g_n egy p valószínűségű esemény gyakorisága! A g_n egy n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint bármely pozitív k-ra:

$$P\left(\left|\frac{g_n}{n}-p\right|<k\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)>1-\frac{1}{k^2}. \quad (1)$$

Vegyük észre, hogy $r_n=\frac{g_n}{n}$ a vizsgált esemény relatív gyakorisága n kísérlet esetében!

Legyen most ε („epszilon") és δ két tetszőleges pozitív szám! Ha $k=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\nu=\frac{p(1-p)}{\delta^2\varepsilon}$, és $n>\nu$, akkor

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{\nu}, \qquad /\cdot p(1-p)$$

$$\frac{p(1-p)}{n}<\frac{p(1-p)}{\frac{p(1-p)}{\delta^2\varepsilon}},$$

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}<\sqrt{\varepsilon}\cdot\delta,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}<\delta.$$

Ebből következően:

$$P\left(\left|\frac{g_n}{n}-p\right|<\delta\right)\geq P\left(\left|\frac{g_n}{n}-p\right|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right).$$

Az (1) egyenlőtlenség szerint:

$$P\left(\left|\frac{g_n}{n}-p\right|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)>1-\varepsilon.$$

Tehát $P\left(\left|\frac{g_n}{n}-p\right|<\delta\right)>1-\varepsilon.$

Bebizonyítottuk a következő tételt:

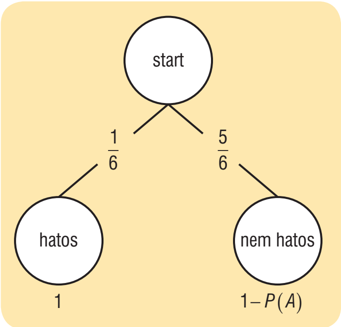
Tétel **Nagy számok törvénye**: bármely ε és δ pozitív számok esetén igaz, hogy van olyan ν pozitív szám, amely ha $n>\nu$, akkor n-szer elvégezve egy kísérletet, egy p valószínűségű esemény r_n relatív gyakoriságára teljesül, hogy $P\left(\left|r_n-p\right|<\delta\right)>1-\varepsilon.$

Vegyük észre, hogy a tétel jelentése: nagy kísérletszámmal elérhető, hogy az esemény relatív gyakorisága tetszőlegesen nagy valószínűséggel tetszőlegesen közel legyen az esemény valószínűségéhez. Igazoltuk tehát a kezdeti sejtést.

Szerencsejátékokkal kezdtük, néhány példa erejéig térjünk még vissza ezekhez.

1. példa Andrea és Beáta felváltva dobnak egy kockával. (Andrea dob elsőnek.) Az nyer, aki először dob hatost. Mennyi a játékosok nyerésének valószínűsége?

9.1. ábra Pörög a kocka



9.2. ábra Másképpen

Megoldás:

Annak valószínűsége, hogy az n-edik dobás eredménye lesz először hatos:

$$P(\varepsilon = n) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{5^{n-1}}{6^n},$$ ahol n pozitív egész szám.

Andrea akkor nyer, ha páratlanadik dobásra lesz először hatos az eredmény, azaz a geometriai sor összege alapján (Analízis című fejezet):

$$p(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{2k-2}}{6^{2k-1}} = \frac{6}{25} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^k = \frac{6}{25} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^k - 1 \right) =$$

$$= \frac{6}{25} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{25}{36}} - 1 \right) = \frac{6}{25} \cdot \left(\frac{36}{11} - 1 \right) = \frac{6}{25} \cdot \frac{25}{11} = \frac{6}{11}$$

és $P(B) = 1 - P(A) = \dfrac{5}{11}$.

A korábban mutatott gráfos módszerrel is vizsgálható a probléma, így elkerülhetjük a valós számsorok alkalmazását. Tekintsük a következő gráfot!

Az első dobásnál Andrea $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dob hatost, és ezzel biztosan nyer. $\frac{5}{6}$ annak a valószínűsége, hogy Andrea nem hatost dob. Ebben az esetben Beáta kerül abba a helyzetbe, amelyben Andrea volt az első dobás előtt. Ekkor Andrea nyerési valószínűsége $1 - P(A)$. Ebből következően:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6}\left[1 - P(A)\right],$$

$$P(A) = 1 - \frac{5}{6} P(A),$$

$$\frac{11}{6} P(A) = 1,$$

$$P(A) = \frac{6}{11}.$$

MatEm_Book.indb 202 2012.07.05. 12:05:58

2. példa Andrea és Beáta – megunva az előbbi játékot – most felváltva dobnak egy pénzérmével. (Andrea dob elsőnek.) Az nyer, aki először dob fejet. Mennyi a játékosok nyerésének valószínűsége?

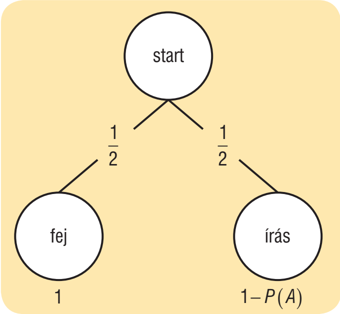
Megoldás:

Annak valószínűsége, hogy az n-edik dobás eredménye lesz először fej: $P(\delta = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$, ahol n pozitív egész szám.

Andrea akkor nyer, ha páratlanadik dobás lesz először fej, azaz:

$$p(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} = \frac{2}{3} \text{ és } P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}.$$

A gráfos módszerrel vizsgálható ez a probléma is, hogy elkerüljük a valós számsorok alkalmazását. Tekintsük a következő gráfot!



9.3. ábra Sor nélkül

Az első dobásnál Andrea $\frac{1}{2}$ valószínűséggel dob fejet, és ezzel biztosan nyer. $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy Andrea nem fejet dob. Ebben az esetben Beáta kerül abba a helyzetbe, amiben Andrea volt az első dobás előtt, ekkor Andrea nyerési valószínűsége $1 - P(A)$. Ebből következően:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\left[1 - P(A)\right],$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2} P(A),$$

$$\frac{3}{2} P(A) = 1,$$

$$P(A) = \frac{2}{3}.$$

3. példa Beáta – megunva, hogy Andrea nyerésének mindig nagyobb a valószínűsége – új játékot javasol: felváltva dobnak egy pénzérmével. (Andrea dob elsőnek.) Az nyer, aki először dob írás után fejet. Mennyi a játékosok nyerésének valószínűsége?

9.4. ábra Repül a pénz

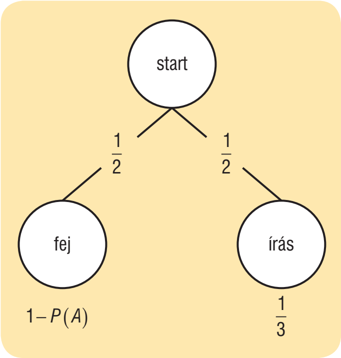
Megoldás:

Annak a valószínűsége, hogy az n-edik dobás eredménye lesz először írás után fej: $P(\varphi = n) = \frac{n-1}{2^n}$, ahol n 1-től különböző pozitív egész szám, ugyanis a kedvező sorrendek:

Sorszám	1.	2.	3.	...	*n* – 2.	*n* – 1.	*n*.
1.	*f*	*f*	*f*		*f*	*i*	*f*
2.	*f*	*f*	*f*		*i*	*i*	*f*
...							
n – 2.	*f*	*i*	*i*		*i*	*i*	*f*
n – 1.	*i*	*i*	*i*		*i*	*i*	*f*

Andrea akkor nyer, ha páratlanadik dobásra lesz először hatos az eredmény, azaz:

$$p(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2^{2k+1}}=\frac{4}{9} \text{ és } P(B)=1-P(A)=\frac{5}{9}.$$



9.5. ábra Ugyanaz másképpen

A gráfos módszer is alkalmazható, így elkerülhetjük a valós számsorok alkalmazását. Tekintsük a 9.5. ábrán látható gráfot!

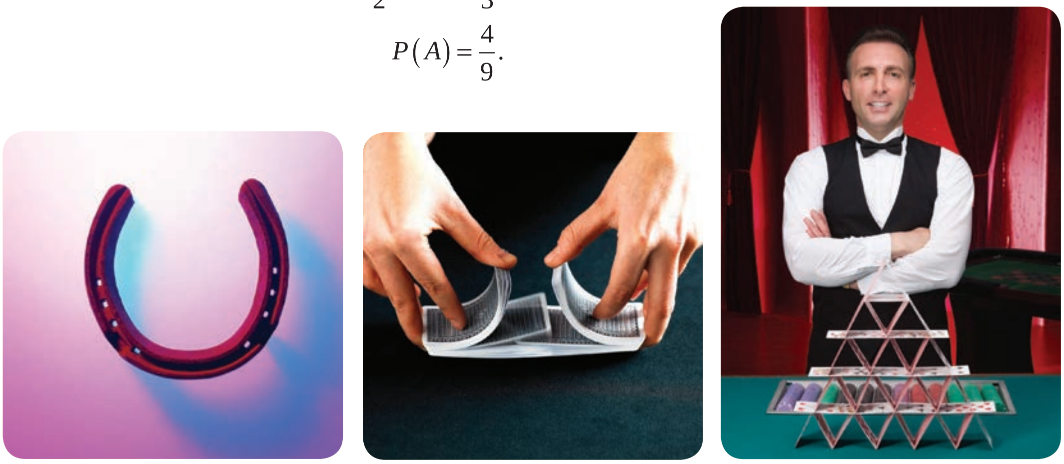
Az első dobásnál Andrea $\frac{1}{2}$ valószínűséggel dob fejet, ebben az esetben Beáta kerül abba a helyzetbe, amelyben Andrea volt az első dobás előtt, ekkor Andrea nyerési valószínűsége $1-P(A)$. Ám $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy Andrea nem fejet dob, ekkor az nyer, aki ezután először fejet dob. Beáta következik, így az ő nyerési valószínűsége – a 2. példa szerint – $\frac{2}{3}$. Ebből következően Andreáé $\frac{1}{3}$.

$$P(A)=\frac{1}{2}\left(1-P(A)\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},$$

$$P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}P(A)+\frac{1}{6},$$

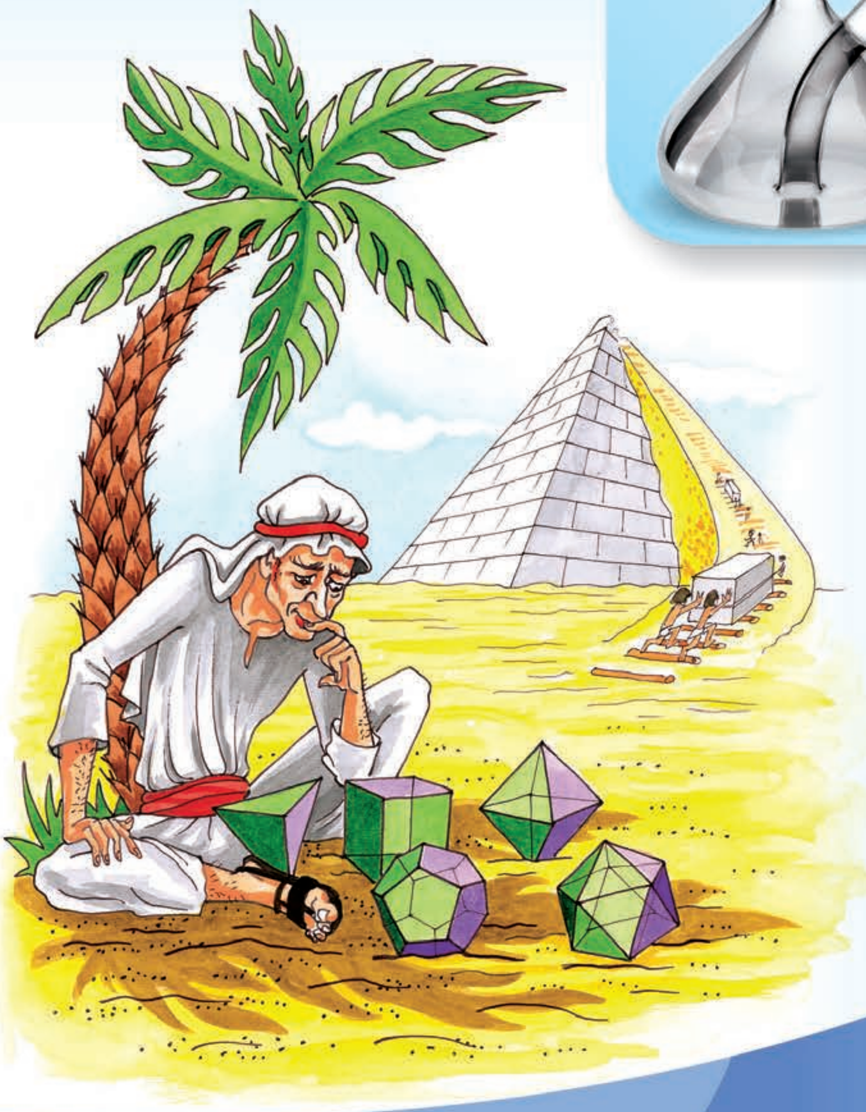
$$\frac{3}{2}P(A)=\frac{2}{3},$$

$$P(A)=\frac{4}{9}.$$



9.6. ábra Véletlen vagy szerencse?

VII. fejezet
Térgeometria



Lehet egy dimenzióval több?

1. Bevezetés

1.1. ábra David Hilbert (1862–1943)

A térgeometria tanulmányozása során az euklideszi geometriának a **Hilbert** (1862–1943) által a XIX. század végén modernizált rendszerét használjuk, éppen úgy, ahogyan az a síkgeometriai tanulmányokban történt. (Természetesen középiskolai szinten jó néhány kijelentést, illetve tételt természetesnek fogadunk el, így igazolásuk fel sem merül.) Röviden összefoglaljuk, hogy mi ennek a lényege. **Alapfogalom**ként tekintünk a ***pont, egyenes, sík*** szavakra, mivel ezeket más szavakkal csak körülírni tudjuk, meghatározni nem. Ugyancsak alapfogalomként használjuk pl. az ***illeszkedik*** („rajta van”) kifejezést. Elfogadunk olyan állításokat, idegen szóval mondva axiómákat, amelyeket egyszerűbb állításokra már nem vezetünk vissza. (Valójában a hilberti rendszerben öt axiómacsoportba vannak besorolva az axiómák.)

Néhány **axióma**:

- Két ponthoz mindig tartozik egy egyenes, amely mindkettőre illeszkedik.
- Van három olyan pont, amelyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- Van négy olyan pont, amelyek nem illeszkednek egy síkra.
- Ha két szakasz egybevágó egy harmadikkal, akkor egymással is egybevágók.
- Ha AB és CD két adott szakasz, akkor van olyan n pozitív egész szám, hogy a CD szakaszt A-tól a B irányában n-szer felmérve túljutunk B-n. (Arkhimédész-féle axióma.)
- Ha adott egy e egyenes és egy rajta kívüli P pont, akkor az adott pont és egyenes síkjában csak egyetlen olyan e' egyenes létezik, amelyen rajta van P és nem metszi az e-t. (Párhuzamossági axióma.)

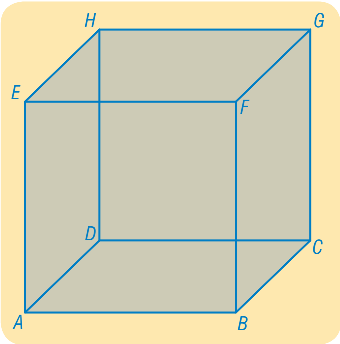
Az alapfogalmak, valamint az axiómák segítségével további fogalmak definiálhatók, és le lehet vezetni a geometria tételeit. Hangsúlyozni szeretnénk azonban, hogy általános és középiskolai szinten sem szokás a bizonyításokat ilyen precizitással elvégezni. A lényeg az, hogy ezt elvileg minden tétel kapcsán meg lehetne tenni.

1.1. A térelemek kölcsönös helyzete

A pont, egyenes és sík összefoglaló neve: térelemek. Egymással való kapcsolatukat egyrészt az axiómák írják le, másrészt bevezetünk rájuk néhány szemléletes fogalmat. Egy egyenest egy pont két **félegyenes**re, egy síkot egy egyenes két **félsík**ra, a teret egy sík két **féltér**re bontja.

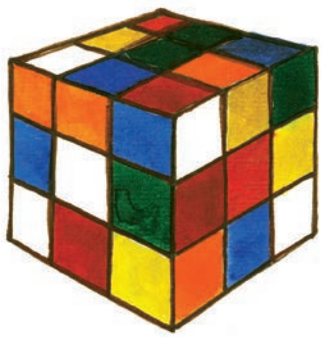
Definíció Két különböző egyenes metsző, ha egy közös pontjuk van.
Két egyenes kitérő, ha nincsenek azonos síkon.
Két sík metsző, ha pontosan egy közös egyenesük van.
Két sík párhuzamos, ha nem metsző.
Egy egyenes párhuzamos egy síkkal, ha nincs közös pontjuk.
Egy egyenes metszi (döfi) a síkot, ha pontosan egy közös pontjuk van.

1. példa Tekintsük az 1.2. ábrán látható *ABCDEFGH* kockát! (Ez a kocka szokásos betűzése.) A csúcsai segítségével adjunk meg
a) metsző, párhuzamos, kitérő egyeneseseket;
b) metsző, párhuzamos síkokat!



1.2. ábra Kocka a szokásos jelölésekkel

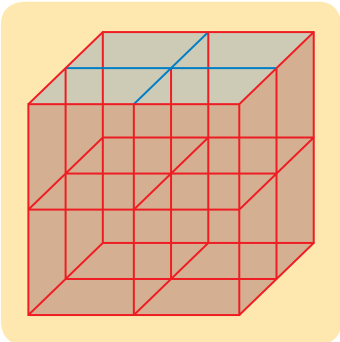
Megoldás:
a) A definíciók alapján pl. metsző egyenesek: *AB* és *AE*, *EB* és *EG*, *EC* és *HB*. Párhuzamos egyenesek pl.: *AB* és *HG*, *AC* és *EG*, *HD* és *FB*. Kitérő egyenesek pl.: *AB* és *EH*, *FB* és *CD*, *EF* és *HD*.
b) Metsző síkok pl.: *ACE* és *ABE*, *ACH* és *HDB*.
Párhuzamos síkok pl.: *ABC* és *EFG*, *AEB* és *DCG*.



1.3. ábra Rubik-kocka

2. példa Fel lehet-e darabolni egy kockát
a) 15; b) 50 kisebb kockára?

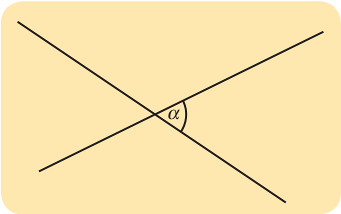
Megoldás:
a) Könnyű látni, hogy az élek felezési pontjaira illeszkedő, a kocka lapjaival párhuzamos síkokkal 8 egybevágó kisebb kockára darabolható a kocka. A keletkező kockák közül egyre megismételve az eljárást $8-1=7$-tel nő a darabok száma, így éppen 15 kocka adódik.
b) Az élek negyedelő pontjaira illeszkedő, a kocka lapjaival párhuzamos síkokkal 64 egybevágó kisebb kockára darabolható a kocka. A keletkező kockák közül kétszer 8-at nagyobb kockává „olvasztva össze”, a megmaradó kockák száma éppen $64-16+2=50$.
Nehéz kérdés, hogy mely *n*-ek esetén darabolható fel a kocka *n* darab kisebb kockára? Bizonyított, hogy ez pontosan akkor lehetséges, ha $n = 1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46$ vagy $n \geq 48$.



1.4. ábra 8 kockára osztott kocka

1.2. A térelemek hajlásszöge

Először két egyenes hajlásszögével foglalkozunk. A síkgeometriából ismert, hogy ha az egyenesek metszik egymást, akkor hajlásszögük a keletkező két-két egyenlő csúcsszög közül a nem nagyobbik, tehát legfeljebb 90°. Ha az egyenesek párhuzamosak, akkor hajlásszögüket 0°-nak vesszük.



1.5. ábra Metsző egyenesek

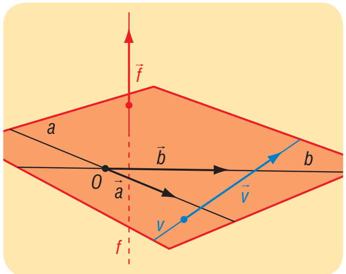
Definíció Két kitérő egyenes hajlásszögén azt a szöget értjük, amelyet egy adott ponton át velük párhuzamosan húzott metsző egyenesek zárnak be.

A definícióból látszik, hogy két kitérő egyenes hajlásszöge legfeljebb 90°. Egyenesek hajlásszögének meghatározására vektorokat is használhatunk pl. oly módon, hogy tekintünk az egyeneseken két, egységnyi hosszú irányvektort és képezzük ezek skaláris szorzatát. A részletek végiggondolását az olvasóra bízzuk. Most rátérünk egy egyenes és egy sík hajlásszögére, feltéve, hogy az egyenes nem illeszkedik a síkra. Ha az egyenes párhuzamos a síkkal, akkor hajlásszögüket 0°-nak vesszük. Abban az esetben, ha az egyenes döfi a síkot, először a merőlegességet vizsgáljuk.

Definíció Egy egyenes merőleges egy síkra, ha minden olyan egyenesre merőleges, amely illeszkedik a síkra.

Ezzel a meghatározással az a gond, hogy nehezen alkalmazható. A következő eredmény viszont nagyon jól használható feltételt tartalmaz.

Tétel Egy egyenes pontosan akkor merőleges egy sík két metsző egyenesére, amikor a sík minden egyenesére merőleges.



1.6. ábra Vektoros bizonyítás

Bizonyítás:
Az nyilvánvaló, hogy ha az egyenes merőleges a síkra, akkor a sík bármely két metsző egyenesére is merőleges. A másik irány bizonyítását vektorok segítségével végezzük. Legyenek a sík metsző egyenesei *a* és *b*, a rájuk merőleges egyenes pedig *f*. Az *a* és *b* egyenesek metszéspontját jelölje *O*. Indítsunk (nem nulla) vektorokat *O* kezdőponttal rajtuk, legyenek ezek $\vec a$ és $\vec b$. Vegyük fel az *f* egyenesen az $\vec f$-t. Tekintsük a síknak egy *v* egyenesét, amelyen vegyük fel a $\vec v$-t.

A vektorgeometriából ismert, hogy létezik olyan α és β valós szám, hogy $\vec v=\alpha\vec a+\beta\vec b$. A vektorok skaláris szorzatáról tudottak miatt:

$$\vec f\cdot\vec v=\vec f\cdot\left(\alpha\vec a+\beta\vec b\right)=\alpha\cdot\vec f\vec a+\beta\cdot\vec f\vec b=\alpha\cdot0+\beta\cdot0=0.$$

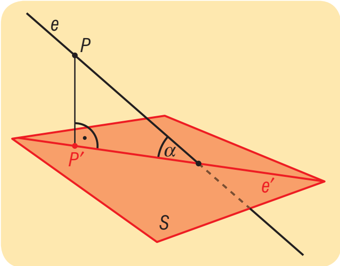
Itt felhasználjuk azt az ismert tételt, hogy két vektor pontosan akkor merőleges, amikor skaláris szorzatuk 0. Ennek értelmében $\vec{f}$ és $\vec{v}$ merőlegesek, így állításunkat igazoltuk.

Könnyű igazolni, hogy egy síkra nem illeszkedő ponton át csak egy olyan egyenes húzható, amely merőleges a síkra, ez alapján természetes a következő fogalom.

Definíció Ha egy P pont nem illeszkedik egy adott S síkra, akkor a P-nek a síkra eső merőleges vetülete az a P' pont, amelyben a P-re illeszkedő, S-re merőleges egyenes döfi a síkot.

Egy egyenes merőleges vetületén a pontjainak merőleges vetületét értjük. Ha az egyenes merőleges a síkra, akkor ez egyetlen pont. Ha egy egyenes nem merőleges az adott síkra, akkor egyszerűen igazolható, hogy a síkra eső merőleges vetülete egyenes. Ha az egyenes döfi a síkot, akkor merőleges vetületét a döféspont és egy további pontjának merőleges vetülete egyértelműen meghatározza.

Definíció Ha az e egyenes döfi az S síkot, de nem merőleges rá, akkor e és S hajlásszöge az a szög, amelyet e az S-re eső e' merőleges vetületével zár be.



1.7. ábra Sík és egyenes hajlásszöge

3. példa Tekintsük az $ABCD$ derékszögű tetraédert, ahol a D csúcshoz tartozó élek páronként merőlegesek. Igazoljuk, hogy D merőleges vetülete az ABC síkon az $ABC_\triangle$ magasságpontja!

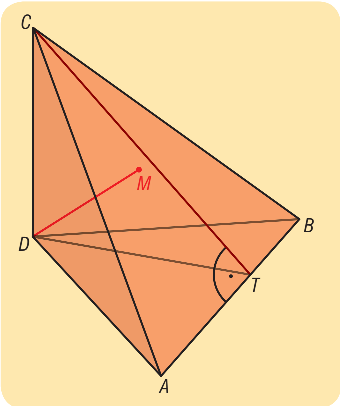
Megoldás:
Jelölje T a C merőleges vetületét az AB élen, és M a D merőleges vetületét az ABC síkon. A továbbiakban többször is kihasználjuk, hogy ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor annak bármely egyenesére merőleges, továbbá, hogy ha egy egyenes merőleges egy sík két metsző egyenesére, akkor a sík bármely egyenesére merőleges.

$$CD \perp S_{ABD} \Rightarrow CD \perp AB,\ \ CT \perp AB \Rightarrow S_{CDT} \perp AB.$$

Másrészt

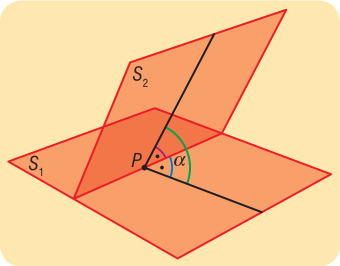
$$DM \perp S_{ABC} \Rightarrow DM \perp AB,\ \ DT \perp AB \Rightarrow S_{DTM} \perp AB,$$

következésképpen M rajta van CT-n, azaz az $ABC_\triangle$ AB-hez tartozó magasságán. A fentihez hasonló módon igazolható, hogy a másik két magasságon is rajta van, tehát M az $ABC_\triangle$ magasságpontja.



1.8. ábra A 3. példában szereplő tetraéder

Végül két sík hajlásszögével foglalkozunk. Ha a két sík párhuzamos, akkor hajlásszögüket 0°-nak vesszük. Két olyan sík esetén, amelyek nem párhuzamosak, létezik pontosan egy közös egyenesük, amelyet gyakran metszésvonalnak is mondunk.

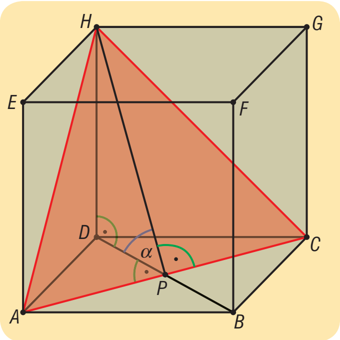


1.9. ábra Két sík hajlásszöge

Definíció Két metsző sík hajlásszöge az a szög, melyet úgy kapunk, hogy a metszésvonal valamely P pontján át merőlegest állítunk a közös egyenesre mindkét síkban és tekintjük e két egyenes hajlásszögét.

A definícióból kiderül, hogy két metsző sík hajlásszöge legfeljebb 90°. Világos az is, hogy a két egyenes közös síkja merőleges a metszésvonalra. Két sík hajlásszögét vektorok segítségével is meg lehet határozni, ha a síkokra merőleges egységvektorokat (ún. normálisokat) tekintünk és képezzük ezek skaláris szorzatát. A részletek végiggondolását az olvasóra bízzuk.

4. példa Határozzuk meg az $ABCDEFGH$ kocka csúcsai által meghatározott ABC és ACH síkok hajlásszögét!



1.10. ábra Mekkora az α?

Megoldás:
Feltehetjük, hogy a kocka éleinek hossza 1. Mivel az ACH háromszög szabályos, ezért az AC négyzetátló P felezési pontjára: $HP \perp AC$. Nyilvánvaló, hogy $DP \perp AC$, ezért a két sík hajlásszögére vonatkozó definíció miatt $DPH\measuredangle = \alpha$ a két sík hajlásszöge. Mivel $DP = \frac{\sqrt{2}}{2}$, így a HDP derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha \approx 54,7°$$

lesz a két sík hajlásszögének értéke.

1.3. A térelemek távolsága

A térelemek távolságaira vonatkozó definíciók megfelelnek annak a szemléletes elvárásnak, amely két alakzat közötti legrövidebb szakasz hosszaként tekint a távolságra. (A pontos távolságfogalom ennél bonyolultabb, de nekünk itt nem lesz rá szükségünk.)

Definíció Két pont távolsága az őket összekötő szakasz hossza.

Definíció Egyenes és rá nem illeszkedő pont távolsága a pontnak és az egyenesre eső merőleges vetületének a távolsága.

Definíció Sík és rá nem illeszkedő pont távolsága a pontnak és a síkra eső merőleges vetületének a távolsága.

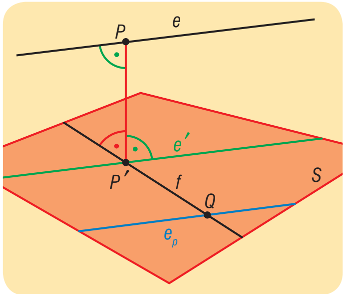
Definíció Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes valamely pontjának a másik egyenestől vett távolsága.

Definíció Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík valamely pontjának a másik síktól vett távolsága.

Nehezebb kérdés, hogy mit értsünk két kitérő egyenes távolságán? Igazoljuk az alábbi, szemléletesen nyilvánvaló állítást.

Tétel Két kitérő egyeneshez pontosan egy olyan szakasz létezik, amelynek végpontjai a két egyenesen vannak és amely mindkét egyenesre merőleges.
(A szakasz neve: normáltranszverzális szakasz.)

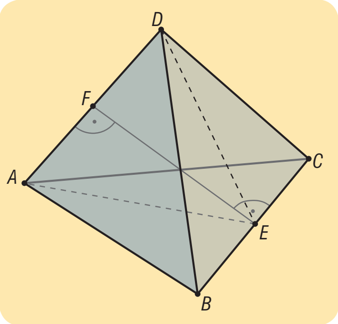
Bizonyítás:
Legyenek az egyenesek e és f. Tekintsük az f valamely Q pontján átmenő, e-vel párhuzamos e_p egyenest. Az f és e_p által kijelölt S sík párhuzamos e-vel. (Miért?) Vetítsük most az e egyenest merőlegesen az S síkra, a vetülete legyen e'. Vegyük észre, hogy e' és f metsző egyenesek lesznek, hiszen e_p és e' is párhuzamos e-vel. Ha P' jelöli a metszéspontot, P pedig az e egyenes azon pontját, amelynek merőleges vetülete P', akkor a PP' szakasz f-re és e-re is merőleges. A gondolatmenetből az is könnyen kiolvasható, hogy csak egy ilyen szakasz van, továbbá ez a legrövidebb szakasz a két egyenes között.



1.11. ábra Kitérő egyenesek távolsága

Definíció Két kitérő egyenes távolságán a normáltranszverzális szakasz hosszát értjük.

5. példa Számítsuk ki az egységnyi élhosszúságú szabályos tetraéder két szemközti élegyenesének távolságát! (A szabályos tetraéder olyan test, amelyet négy szabályos háromszög határol.)



1.12. ábra Szabályos tetraéder szemközti élei

Megoldás:
A tetraéderek szemközti éleinek egyenesei nyilvánvaló módon kitérő helyzetűek. Tekintsük az *ABCD* szabályos tetraéder *BC* és *AD* éleit! Legyenek az élek felezési pontjai *E*, illetve *F*. Belátjuk, hogy az *EF* szakasz mindkét élre merőleges, ezért a hossza lesz a két él egyenesének távolsága. Mivel *BCD* és *BCA* szabályos háromszögek, ezért $BC \perp DE$ és $BC \perp AE$, következésképpen $BC \perp S_{ADE}$, de így $BC \perp EF$. Teljesen hasonlóan mutatható ki az, hogy $AD \perp EF$. Ismert, hogy a szabályos háromszög magasságának hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese az oldalénak, így $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Az *AEF* háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

$$EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Oldjuk meg!

1. Hány különböző síkot határoznak meg egy kocka csúcsai?

2. Adott az *ABCDEFGH* kocka. Mekkora szöget zárnak be a következő egyenesek:
a) *AH* és *BC*, b) *AF* és *ED*, c) *AC* és *DG*?

3. Tekintsük egy adott szakasz felezési pontjára illeszkedő valamely síkot. Igazoljuk, hogy a szakasz végpontjai egyenlő távolságra vannak a síktól!

4. Az *ABCD* téglalap oldalai $AB = 8$ cm és $BC = 6$ cm. A *D* csúcsában merőlegest emelünk a téglalap síkjára, amelyen felvesszük az *E* pontot úgy, hogy $DE = 3{,}6$ cm. Határozzuk meg az *E* pont távolságát a téglalap *AC* átlójától! Mekkora szöget zár be az *EAC* sík a téglalap síkjával?

5. Az *ABCD* téglalap síkján kívüli *P* pontnak a téglalap *A*, *B*, *C* és *D* csúcsától vett távolságai rendre *a*, *b*, *c* és *d*. Igazoljuk, hogy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$!

6. Igazoljuk, hogy a kocka elmetszhető úgy egy síkkal, hogy a metszetsokszög:
a) szabályos háromszög; b) szabályos hatszög!

7. Vágható-e egy fakockán olyan lyuk, amelyen az eredetivel egybevágó kocka átfér?

8. Az S_1 és S_2 síkok hajlásszöge α. Vegyünk fel az S_1 síkon egy háromszöget, amelynek területe *T*. Igazoljuk, hogy ha a háromszöget merőlegesen vetítjük az S_2 síkra, akkor a vetületének területe $T \cdot \cos\alpha$ lesz!

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 629-639. feladatok

2. Alkalmazások: mértani helyek, a tetraéder néhány nevezetes pontja

A sík alakzatainak tanulmányozása során találkoztunk már a következő kérdéssel: adott tulajdonságú pontok hol helyezkednek el a síkon? Most megvizsgálunk néhány nevezetes ponthalmazt a térben. A térben is figyelnünk kell a mértani hellyel kapcsolatos állítások bizonyításánál arra, hogy nem elég csak azt megsejteni, hogy mi lehet az adott ponthalmaz. Igazolnunk kell, hogy az alakzat minden pontja jó, és azt, hogy más pontok nem felelnek meg.

Definíció Azon pontok halmazát a térben, amelyek egy adott ponttól adott távolságra helyezkednek el, gömbfelületnek nevezzük.

Az adott pont a gömb középpontja, az adott távolság a **gömbfelület** sugara. Azok a pontok, amelyek legfeljebb akkora távolságra vannak a középponttól, mint a sugár, alkotják a **gömbtest**et. Ha nem okoz félreértést, akkor röviden a **gömb** szót használjuk mind a gömbfelület, mind a gömbtest helyett. (Ahhoz hasonlóan, ahogy a körvonal és a körlap helyett egyaránt szoktunk kört mondani.)

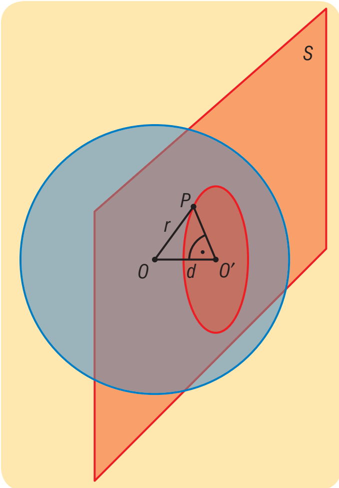
2.1. ábra A Föld a világűrből

1. példa Igazoljuk, hogy ha egy gömbfelületet elmetszünk egy síkkal, akkor a metszet kör!

Megoldás:
Tegyük fel, hogy a gömb O középpontja az S síktól $d\,(<r)$ távolságra van. Vetítsük merőlegesen az O pontot S-re, így adódik az O' pont. Ha P a gömbfelület és a sík közös pontja, akkor $OO' \perp PO'$, így a Pitagorasz-tétel szerint:

$$O'P = \sqrt{r^2 - d^2} = \text{állandó}.$$

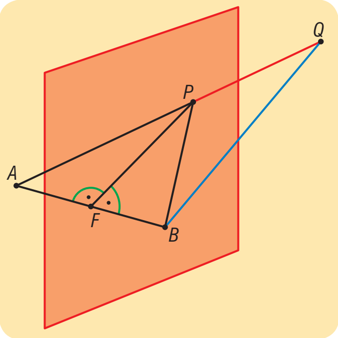
A kör definícója miatt ez azt jelenti, hogy a P pontok az S síkban lévő O' középpontú kört alkotják.



2.2. ábra Gömb és sík metszete

A síkon jól ismert a szakaszfelező merőleges mértani hely tulajdonsága. Vajon van-e térbeli megfelelője ennek? Világos, hogy a szakaszra merőleges, a felezési pontjára illeszkedő sík pontosan egy van, így nem meglepő az alábbi eredmény.

Tétel Azoknak a pontoknak a mértani helye a térben, amelyek egy adott szakasz végponjaitól egyenlő távol vannak, a szakasz felezőmerőleges síkja.



2.3. ábra Szakasz felezőmerőleges síkja

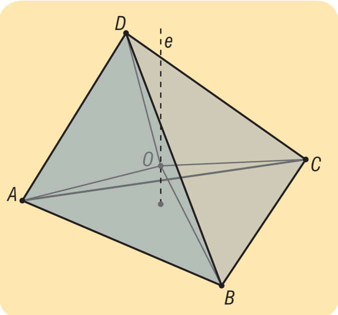
Bizonyítás:
Könnyű látni, hogy a felezőmerőleges sík minden P pontja egyenlő távol van A-tól és B-től, hiszen $AFP_\triangle \cong BFP_\triangle$. Lehet-e a síkon kívül is ilyen tulajdonságú pont? Tegyük fel, hogy a Q pont nincs rajta a síkon. Ha az AB szakaszon van, akkor nyilván nem tartozhat a keresett mértani helyhez. Ha nincs rajta az AB szakaszon, akkor összekötve A-val és B-vel létrejön az ábrán látható P metszéspont és a QPB háromszög. (Az ábrán Q a síknak B felőli oldalán van.) A háromszög-egyenlőtlenség miatt:

$$AQ = AP + PQ = BP + PQ > BQ.$$

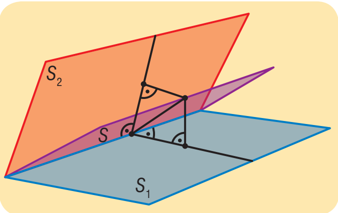
Ez azt jelenti, hogy Q nem tartozhat a mértani hely pontjai közé. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A sík, illetve a tér alakzataira vonatkozó tételek között számos analógia figyelhető meg. A következő tétel ennek jellegzetes példája. Síkbeli párja: a háromszögnek van köré írt köre.

2. példa Igazoljuk, hogy minden tetraédernek van köré írt gömbje! (A köré írt gömb olyan gömbfelület, amelyre illeszkedik a tetraéder mind a négy csúcsa.)



2.4. ábra A tetraéder köré írt gömb középpontja



2.5. ábra Lapszögfelező félsík

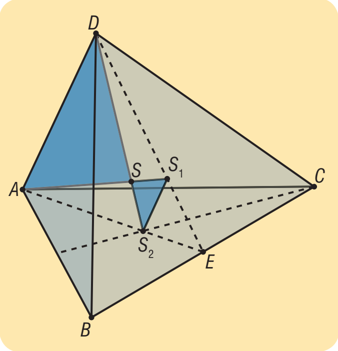
Megoldás:
Akkor létezik ilyen gömb, ha van olyan pont a térben, amely a tetraéder négy csúcsától egyenlő távolságra fekszik. Az előző tétel miatt a keresett pont rajta van az AB, illetve BC él felezőmerőleges síkján. A két sík e metszésvonala az ABC háromszög köré írt kör középpontjában az ABC lap síkjára állított merőleges egyenes. (A metszésvonal merőleges AB-re és BC-re, így az ABC síkjára is.) Tekintsük most pl. az AD él felezőmerőleges síkját! Jelölje O ennek a síknak az e-vel vett metszéspontját. (Ez mindig létrejön.) Világos, hogy O egyenlő távol van a tetraéder négy csúcsától, továbbá a gondolatmenetből az is kitűnik, hogy csak egy ilyen pont van.

Két, közös határoló egyenessel bíró félsík ún. lapszöget határoz meg, melynek nagysága a két félsík hajlásszöge. A félsíkoktól egyenlő távol lévő pontok halmaza a lapszögtartomány belsejében az ún. lapszögfelező félsík. Ennek segítségével igazolható a háromszög beírt körének létezésére vonatkozó tétel párja a térben: **minden tetraédernek van beírt gömbje**. A részletek végiggondolása a 2.4. ábra alapján nem nehéz.

Befejezésül a tetraéder súlypontjával foglalkozunk.

Definíció Súlyvonalnak hívjuk a tetraéderben az olyan szakaszt, amely valamely csúcsát a szemközti lap súlypontjával köti össze. (Ez azt jelenti, hogy a tetraédernek összesen négy súlyvonala van.)

Tétel A tetraéder súlyvonalai egy pontra illeszkednek, ez a pont (a súlypont) a tetraéder mindegyik súlyvonalát a csúcstól számítva $3:1$ arányban osztja.



2.6. ábra Tetraéder súlypontja

Bizonyítás:
Tekintsük az $ABCD$ tetraéder AS_1 és DS_2 súlyvonalait! Mivel S_1 és S_2 is rajta van az AED síkon, így ezek a súlyvonalak metszik egymást. A metszéspont legyen S. Tekintettel arra, hogy az S_1 és S_2 pont is egy-egy háromszög súlypontja, érvényesek a következők:

$$ES_1 : S_1D = ES_2 : S_2A = 1:2.$$

A párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $S_1S_2 \parallel AD$, így akkor a szelőszakaszok tétele miatt $S_1S_2 : AD = 1:3$. Az elmondottakból azonnal következik, hogy $S_1S_2S\triangle \sim ADS\triangle$, továbbá a hasonlóság aránya $1:3$. Azt kaptuk, hogy a tetraéder bármely két súlyvonala a csúcspontoknál lévő végeiktől számítva $3:1$ arányban metszi egymást. Ebből a tétel állítása nyilvánvalóan adódik. (Megjegyezzük, hogy a tetraéder súlypontjára vonatkozó tételt vektorok felhasználásával is elegánsan be lehet bizonyítani.)

A tetraéder geometriájának tanulmányozása során még további analógiákat is feltártak a háromszöggel kapcsolatosan. Néhány ilyennel még találkozni fogunk a későbbiekben.

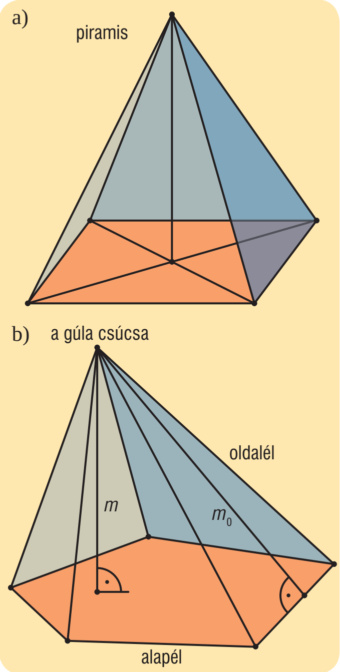
Oldjuk meg!

1. Igazoljuk, hogy ha egy sík érint egy gömböt, akkor az érintési pontba húzott sugár merőleges a síkra!
2. Igazoljuk, hogy ha két gömbfelület metszi egymást, akkor a metszetük kör!
3. Mi azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyekből egy adott szakasz derékszögben látszik?
4. Igazoljuk, hogy minden tetraédernek van paralelogramma síkmetszete!
5. Igazoljuk, hogy a tetraéder beírt gömbjének sugara a körülírt gömb sugarának legfeljebb a harmadrészével egyenlő! Melyik nevezetes, háromszögre vonatkozó állításnak lesz ez a térbeli megfelelője?

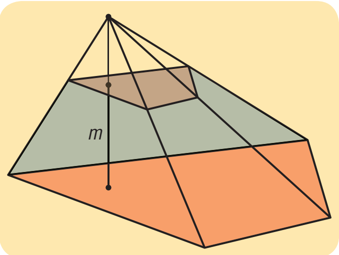
3. A mértani testek

3.1. Elnevezések és tulajdonságok

Először a sokszöglapokkal határolt testekkel, a **poliéder**ekkel foglalkozunk. Már általános iskolából ismert a legegyszerűbb poliéder, amelyet négy háromszöglap határol: a tetraéder. Ha egy tetraéder minden éle egyenlő, akkor szabályos tetraéderről beszélünk. Az előzőekben beláttuk, hogy minden tetraédernek van köré írt gömbje, beírt gömbje és súlypontja. A tetraéder az ún. gúlák közé tartozik.



3.1. a) b) ábra Gúlák



3.2. ábra Csonka gúla

3.3. ábra Piramis mint gúla

Definíció Egy sokszöglap kerületének minden pontját összekötjük egy olyan ponttal, amely nincs a sokszög síkjában. Az így kapott test neve gúla.
Az adott sokszög oldalszáma alapján szokás n-szög alapú gúláról beszélni.

Definíció Tetraédernek nevezzük a háromszög alapú gúlát.

Az adott sokszöget a gúla **alaplap**jának (alapjának), a sokszög oldalait **alapél**eknek, az adott pontot a gúla **csúcs**ának hívjuk. A gúla csúcsát az alapsokszög csúcsaival összekötő szakaszokat **oldalél**eknek nevezzük. Egy alapél és két szomszédos oldalél határol egy ún. **oldallap**ot, a gúla oldallapjai tehát háromszögek. A gúla csúcsából az alapjának síkjára bocsátott merőleges szakasz a gúla **magasság**a. A gúla csúcsából valamely alapél egyenesére bocsátott merőleges szakasz neve: **oldallapmagasság**. Ha egy gúla alapja szabályos sokszög és csúcsa az alapsokszög középpontjában az alapra emelt merőlegesen van, akkor **szabályos** (n-szög alapú) **gúla** a neve. A szabályos gúlák oldalélei egyenlők, szokás őket **egyenes gúlá**nak is mondani. A szabályos négyoldalú gúlát **piramis**nak hívják.

(A legtöbb, gúlákkal foglalkozó feladat szabályos sokszög alapú egyenes gúlákkal kapcsolatos.)

Definíció Ha egy gúlát az alapjával párhuzamos síkkal elmetszünk, akkor a síkok közötti testet csonka gúlának hívjuk.

A csonka gúla magassága a párhuzamos síkok távolsága. Az eredeti gúla csúcsára nézve a sík által levágott gúla és a származtató gúla középpontosan hasonló.

1. példa Egy piramis alapélének hossza 81 méter, az oldalélek hossza pedig 114,5 méter.
a) Milyen magas a piramis?
b) Mekkora szöget zárnak be az oldalélek az alaplappal?
c) Mekkora szöget zárnak be az oldallapok az alaplappal?

Megoldás:
Használjuk a 3.4. ábra jelöléseit. Mivel $ABCD$ négyzet, ezért

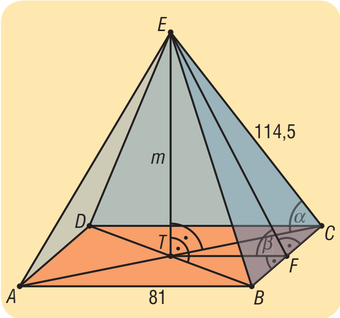
$$AC = 81\sqrt{2} \approx 114,55 \Rightarrow TC = \frac{AC}{2} \approx 57,28.$$

A Pitagorasz-tétel miatt a magasság:

$$m = \sqrt{114,5^2 - 57,28^2} \approx 99,1 \text{ méter}.$$

Az E csúcs merőleges vetülete T, így az EC oldalél és az alaplap hajlásszögére az ETC derékszögű háromszögből:

$$\cos\alpha = \frac{TC}{EC} \approx 0,5 \Rightarrow \alpha = 60°.$$



3.4. ábra A piramis

Mivel az EBC és TBC háromszögek egyenlő szárúak, ezért a BC él F felezési pontjára:

$$EF \perp BC,\ TF \perp BC.$$

A síkok hajlásszögére vonatkozó definíciót alkalmazva, az ETF derékszögű háromszögből az oldallap és az alaplap szögére:

$$\text{tg}\beta = \frac{ET}{TF} \Rightarrow \beta \approx 67,77°.$$

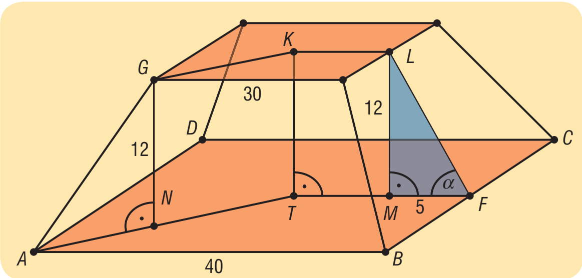
2. példa Egy négyzet alapú egyenes gúlát az alapjával párhuzamos síkkal elmetszünk. A keletkező csonka gúla alaplapjának éle 40 cm, fedőlapjának éle 30 cm, magassága pedig 12 cm.
a) Mekkora szöget zárnak be az oldallapok az alaplappal?
b) Milyen hosszúak az oldalélek?
c) Mekkora az oldallapok magassága?

Megoldás:
Használjuk a 3.5. ábra jelöléseit! Könnyű látni, hogy az oldallap és alaplap α hajlásszöge az LMF derékszögű háromszögből:

$$\text{tg}\alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \alpha = 67,38°.$$

Az oldallap magassága az LF átfogó hossza:

$$LF = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}.$$



3.5. ábra Négyzet alapú egyenes csonka gúla

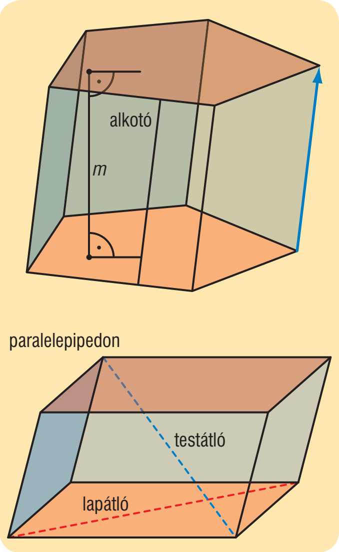
Mivel AT az alaplap, GK pedig a fedőlap átlójának fele, ezért

$$AN = AT - GK = \frac{40\sqrt{2}}{2} - \frac{30\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}.$$

A Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$AG = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + 12^2} \approx 13,93 \text{ cm}.$$

Definíció Ha egy sokszöglapot a sokszög síkjával nem párhuzamos vektorral eltolunk, akkor a sokszög az eltolás során egy testet ír le, amelyet hasábnak nevezünk.



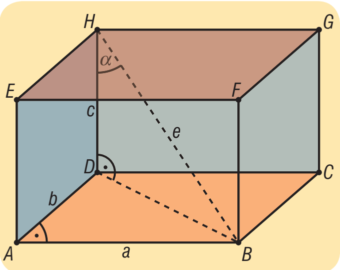
3.6. a) b) ábra Hasábok

Az eredeti sokszög a hasáb **alaplap**ja, a képsokszög a hasáb **fedőlap**ja. A hasábot az alaplap és a fedőlap, valamint a paralelogramma **oldallap**ok határolják. Az alapsokszög oldalszáma alapján beszélünk n-oldalú hasábról. Az alaplap és a fedőlap síkjának távolsága a hasáb **magasság**a. A hasáb származtatása során az alapsokszög kerületének valamely pontja és annak képe a hasáb egy **alkotó**jának végpontjai. A hasáb alkotói párhuzamosak egymással. Ha az alkotók (másképpen: a definícióban szereplő vektor) merőlegesek az alaplapra, akkor **egyenes hasáb**ot kapunk, ellenkező esetben **ferde hasáb** a test neve. A paralelogramma alapú hasábot **paralelepipedon**nak nevezzük. A **téglatest** egy téglalap alapú egyenes hasáb, a négyzet alapú egyenes hasáb a **négyzetes oszlop**, az egybevágó négyzetekkel határolt téglatest a **kocka**.

Definíció Egy poliéder valamely határoló lapjának átlóját lapátlónak nevezzük.

Definíció Egy poliéder két, nem ugyanazon a határoló lapon lévő csúcsát összekötő szakaszt testátlónak hívjuk.

3. példa Egy téglatest lapátlóinak hossza $\sqrt{13}$ cm, $2\sqrt{10}$ cm és $3\sqrt{5}$ cm.
a) Mekkora a testátlók hossza?
b) Mekkora szöget zár be egy testátló a téglatest legrövidebb élével?



3.7. ábra Téglatest

Megoldás:
Legyenek a, b és c a téglatest élei a 3.7. ábra szerint. A Pitagorasz-tétel miatt a lapátlók négyzeteire:

$$a^2 + b^2 = 45,$$
$$b^2 + c^2 = 13,$$
$$c^2 + a^2 = 40.$$

Összeadva:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 49.$$

Ezért $c = 2,\ \ b = 3,\ \ a = 6.$

Ismételten a Pitagorasz-tételt alkalmazva:
$e^2 = BD^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow e = 7$ cm. (Ebből persze az is kiderül, hogy a téglatest testátlóinak hossza egyenlő.) Érdemes megjegyezni, hogy a téglatest testátlójának hossza az élek hosszával kifejezve:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

A BHD derékszögű háromszögből:

$$\cos\alpha = \frac{c}{e} = \frac{2}{7} \Rightarrow \alpha \approx 73{,}4°.$$

3.2. A szabályos poliéderek

A konvex poliéderek lapjainak, éleinek és csúcsainak száma nem független egymástól. Ha ezeknek a számát rendre l, e és c jelöli, akkor Euler nevezetes tétele szerint:

Tétel $c + l = e + 2.$

(Valójában az összefüggés nemcsak konvex poliéderekre érvényes, hanem minden olyan, ún. egyszeresen összefüggő poliéderre, amely „gömbbé fújható fel”. Eulerről érdemes tudni, hogy a valaha élt egyik legnagyszerűbb matematikus volt. Tőle származik a középiskolában használt matematikai jelölések nagy része. Hatással volt a matematika egészére, jelentőségét nehéz túlbecsülni.) A tétel bizonyítását nem részletezzük, legegyszerűbb igazolása a lapok száma szerinti teljes indukcióval történik.

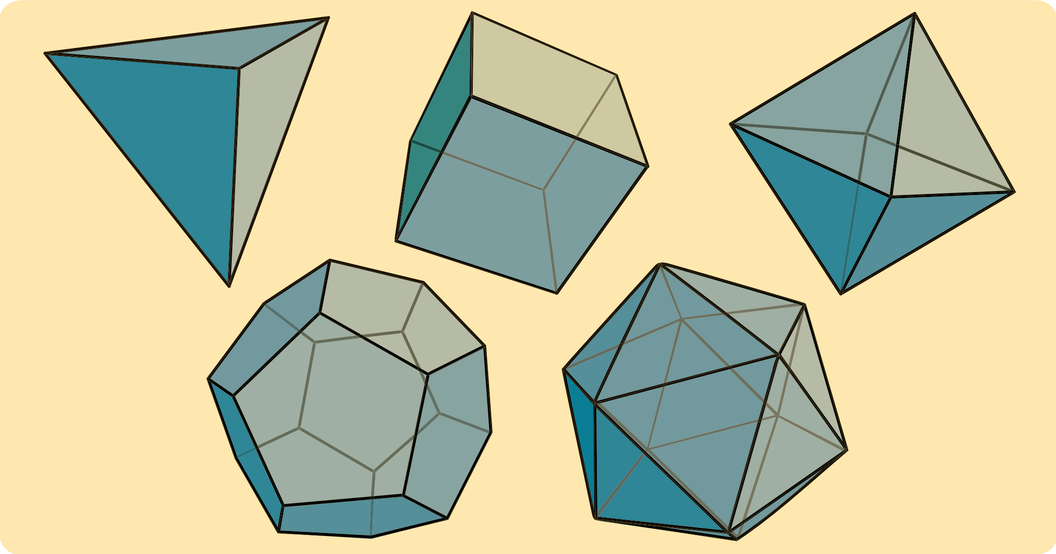
Az ókorból származik a szabályos test fogalma. Szokás ezeket Platón-féle szabályos testeknek hívni.

3.8. ábra Euler (1707–1783)

Definíció A konvex poliéderek közül azokat nevezzük szabályosnak, amelyeket egybevágó szabályos sokszögek határolnak, továbbá élszögeik és lapszögeik egyenlők.

Az Euler-tétel segítségével igazolható, hogy legfeljebb öt szabályos test létezhet. Ezek mind léteznek is, és már az ókori görög gondolkodók is megtalálták őket:

A test neve	A határoló szabályos sokszögek	l	c	e
szabályos tetraéder	háromszög	4	4	6
kocka	négyzet	6	8	12
oktaéder	háromszög	8	6	12
dodekaéder	ötszög	12	20	30
ikozaéder	háromszög	20	12	30



3.9. ábra A szabályos testek

3.10. ábra Dobókocka

A szabályos testek sok helyen megjelennek: pl. dobókockák, kristályszerkezetek, molekulaszerkezetek, képzőművészeti alkotások, irodalmi és filozófiai művek.

Oldjuk meg!

1. Igazoljuk, hogy a hasábok éleinek száma osztható 3-mal!

2. Igazoljuk, hogy a kocka alkalmasan megválasztott négy csúcsa egy szabályos tetraéder csúcsait adja!

3. Igazoljuk, hogy a kocka lapközéppontjai egy szabályos oktaéder csúcsait határozzák meg!

4. Egy gúla magassága 48 cm. A gúla csúcsától számítva mekkora távolságra kell metszeni a gúlát egy alapjával párhuzamos síkkal ahhoz, hogy a metszet területe az alap területének 25%-a legyen?

5. Mekkora szöget zárnak be a szabályos tetraéder lapjai?

6. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapterülete $25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, egy oldallapjának területe pedig 80 cm^2. Mekkora a hasáb magassága?

7. Egy szabályos háromoldalú gúla magassága az alapél felével egyenlő. Határozzuk meg az oldallapok és az alaplap hajlásszögét! Határozzuk meg az oldalélek és az alaplap hajlásszögét!

8. Az *ABCDE* szabályos négyoldalú gúla *E* csúcsára illeszkedő, az *AB* alapéllel párhuzamos sík a gúlát egy 10 cm oldalú szabályos háromszögben metszi. Határozzuk meg:
a) a gúla magasságát; b) a gúla éleinek hosszát;
c) a gúla élben szomszédos határoló lapjainak hajlásszögét!

9. Péter összeállított papírból egy poliédert, majd ollóval lapjaira vágta szét és a lapokat egy borítékba téve elküldte Pálnak. Igaz-e, hogy Pál csak ugyanazt a poliédert rakhatja össze belőlük, mint ami Péteré volt?

10. Egy konvex poliédernek csak háromszög-, négyszög- és ötszöglapjai vannak. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszöglapja és három négyszöglapja van, akkor ötszöglapjainak száma legalább három! Ha van ilyen minimális számú ötszöglappal rendelkező poliéder, akkor adjunk meg egy ilyet!

11. Igazoljuk, hogy a tér „kiparkettázható” egybevágó tetraéderekkel!

12. Milyen n-re létezik n élű konvex poliéder?

13. Tekintsük az $ABCD$ derékszögű tetraédert, ahol a D csúcshoz tartozó élek páronként merőlegesek! Igazoljuk, hogy ha m a D csúcsból induló magasság hossza, akkor

$$\frac{1}{m^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{CD^2}!$$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 619-628. feladatok

4. Néhány további test

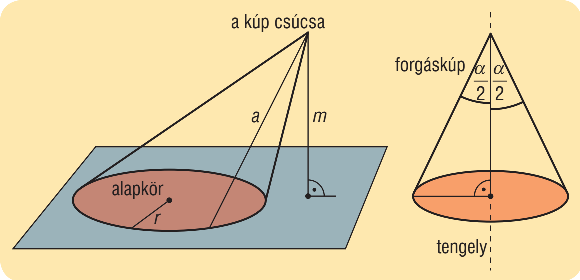
A továbbiakban leírunk néhány, a gyakorlati alkalmazásokban és a természetben is sokszor felbukkanó testet, és ismertetjük a velük kapcsolatos elnevezéseket.

4.1. A kúpok

Definíció Ha egy körlap kerületének minden pontját összekötjük egy, a kör síkjára nem illeszkedő ponttal, akkor az így kapott testet kúpnak nevezzük.

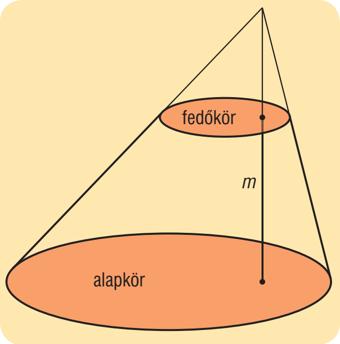
4.1. ábra Vulkáni kúp

Az adott kört a kúp **alapkör**ének, az adott pontot a kúp **csúcs**ának, míg az összekötő szakaszokat a kúp **alkotó**inak hívjuk. A kúp **magasság**a csúcsának az alapkör síkjától vett távolsága. Az alkotók összessége alkotja a **palást**ot. Ha minden alkotó egyenlő hosszú, akkor a kúpot **forgáskúp**nak vagy **egyenes kúp**nak mondjuk. Ekkor a kúp csúcsa az alapkör síkjára a középpontban állított merőleges egyik pontja, a csúcson és a kör középpontján átmenő egyenes a kúp **tengely**e. (A tengely körüli forgatás



4.2. ábra Kúpok

a forgáskúpot önmagába viszi át.) A tengely és valamely alkotó által bezárt szöget a forgáskúp **fél nyílásszögé**nek nevezzük.



4.3. ábra Csonka kúp

Definíció Ha egy kúpot az alapjával párhuzamos síkkal elmetszünk, akkor a síkok közötti testet csonka kúpnak hívjuk.

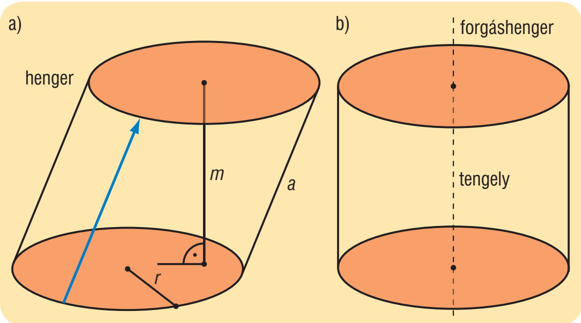
A csonka kúp magassága a párhuzamos síkok távolsága. Az eredeti kúp csúcsára nézve a sík által levágott kúp és a származtató kúp középpontosan hasonló.

A forgáskúp ilyen módon történő csonkolásával kapott testet forgási csonka kúpnak hívjuk.

(Használjuk rá még az egyenes csonka kúp elnevezést is.)

4.2. A hengerek

Definíció Ha egy körlapot a síkjával nem párhuzamos vektorral eltolunk, akkor a körlap az eltolás során egy testet ír le, amelyet hengernek nevezünk.



4.4. a) b) ábra Hengerek

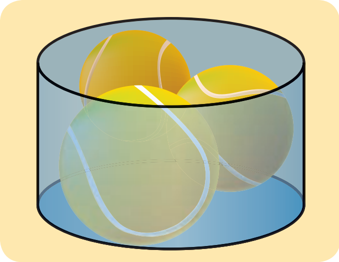
Az eredeti körlap a henger **alapköre**, a képe a henger **fedőköre**. (Valójában a körhenger kifejezést kellene használnunk, mivel azonban csak ilyenekkel foglalkozunk, mellőzzük ennek hangsúlyozását.)

A hengert az alapkör és a fedőkör, valamint a palást határolják. A henger származtatása során az alapkör kerületének valamely pontja és képe a henger egy **alkotó**jának végpontjai. (Az alkotók összessége adja a palástot.) A henger alkotói párhuzamosak egymással. Az alapkör és a fedőkör síkjának távolsága a henger **magasság**a. Ha az alkotók (másképpen: a definícióban szereplő vektor) merőlegesek az alapra, akkor **egyenes henger**t kapunk, ellenkező esetben **ferde henger** a test neve. Az egyenes hengert másképpen **forgáshenger**nek nevezzük, mivel az alapkör és a fedőkör középpontján átmenő, a síkjukra merőleges egyenes (tengely) körüli forgatás önmagába viszi át.

4.5. ábra A kémény is forgáshenger

Oldjuk meg!

1. Mekkora annak a forgáskúpnak a nyílásszöge, amelynek alkotója az alapkör sugarának
   a) kétszerese; b) háromszorosa?
2. Három labdát egy henger alakú dobozba szeretnénk csomagolni úgy, hogy mindegyik labda érintse a másik kettőt és a doboz alapkörét, fedőkörét, valamint palástját. Mekkora a doboz sugara és magassága, ha a labdák sugara 6 cm?
3. Egy csavarvonal egy 5 cm sugarú körhenger palástján egyenletesen emelkedik felfelé. Milyen magas a henger, ha a menetemelkedés szöge 5°-os és a menet 4-szer kerüli meg a tengelyt?



4.6. ábra Teniszlabdák

5. A terület és felszín kiszámítása

A terület és a felszín fogalmának kialakulása a matematikában hosszú folyamat volt, és számos mély kérdést vetett fel, melyekkel az ún. mértékelmélet foglalkozik. Könyvünkben mi messze nem a legáltalánosabb területfogalmat szerepeltetjük, továbbá bizonyítás nélkül fogadunk el néhány olyan dolgot, amelyeket a precíz felépítés során igazolni szoktak. A felszín fogalmának megalapozására még ilyen szinten sem vállalkozhatunk, mivel az messze meghaladja a középiskolai tananyagot.

A síkidomok területének meghatározását a sokszögek területének meghatározásával kezdjük. Elfogadjuk, hogy a sokszögeknek van területe, amely egy pozitív szám, továbbá megállapodunk a következőkben:

1) az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe lesz a területegység;
2) egybevágó sokszögek területe egyenlő;
3) ha egy sokszöget egyenessel két sokszögre darabolunk fel, akkor a keletkező sokszögek területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő.

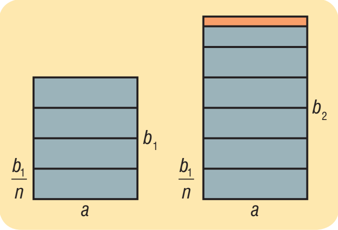
Ez utóbbi teljes indukcióval könnyen kiterjeszthető véges sok darabra. Az is következik belőle, hogy bármelyik rész területe kisebb az eredeti sokszög területénél. (Bizonyítsuk be ezeket az állításokat!)

5.1. ábra Különböző síkidomok

5.1. A téglalap területe

Általános iskolában azt tanultuk, hogy a téglalap területe $T = ab$, ahol a és b az egy csúcsból induló két oldal hossza. Erre a képletre úgy jöttünk rá, hogy megszámoltuk adott egész szám oldalhosszúságú téglalapok esetén az általuk tartalmazott egységnégyzetek számát. Ha a vagy b nem egész, sőt nem is racionális szám, akkor az ismert képletet indoklás nélkül nem lehet elfogadni.

Tétel Az a és b oldalhosszúságokkal rendelkező téglalap területe: $T = ab$.



5.2. ábra A téglalap felosztása

Bizonyítás:
Megmutatjuk, hogy ha két téglalap egy-egy oldala egyenlő, akkor területük aránya a másik két oldal arányával egyenlő. Legyen az egyenlő oldalak hossza a, a másik két oldalé pedig b_1 és b_2, a területeik pedig T_1 és T_2. Osszuk fel n egyenlő részre a b_1 hosszúságú oldalt, majd mérjük fel a másik téglalap b_2 hosszú oldalára többször egymás után a $\frac{b_1}{n}$ hosszú szakaszt, és az 5.2. ábra szerint bontsuk fel egybevágó kis téglalapokra mindkét téglalapot. Tegyük fel, hogy a b_2-re a $\frac{b_1}{n}$ hosszú szakasz k-szor fért rá teljesen, tehát a $(k+1)$-edik már felül „kilóg”. Ekkor egyrészt

$$k \cdot \frac{b_1}{n} \le b_2 < (k+1) \cdot \frac{b_1}{n} \Leftrightarrow \frac{k}{n} \le \frac{b_2}{b_1} < \frac{k}{n} + \frac{1}{n},$$

másrészt a megállapodásban szereplő 2) és 3) szerint

$$k \cdot \frac{T_1}{n} \le T_2 < (k+1) \cdot \frac{T_1}{n} \Leftrightarrow \frac{k}{n} \le \frac{T_2}{T_1} < \frac{k}{n} + \frac{1}{n}.$$

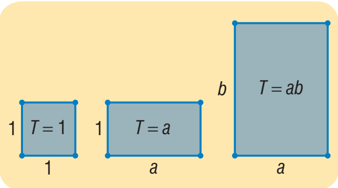
Ezekből leolvasható, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén

$$(1) \qquad 0 \le \left| \frac{b_2}{b_1} - \frac{T_2}{T_1} \right| < \frac{1}{n}.$$

(Gondoljuk meg, hogy a különbségben szereplő mindkét tört adott n-re ugyanarra az $\frac{1}{n}$ hosszú intervallumra esik a számegyenesen.) Mivel $\frac{1}{n}$ tetszőleges pozitív számnál kisebb lehet, ha n elég nagy, ezért az (1) egyenlőtlenség csakis úgy teljesülhet, ha az abszolútérték-jelen belül 0 áll, azaz

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Ezek után a téglalap területére vonatkozó képlet úgy adódik, hogy a fent igazolt állítást alkalmazzuk kétszer az egységnégyzettől elindulva. Ezt az 5.3. ábrán követhetjük nyomon.

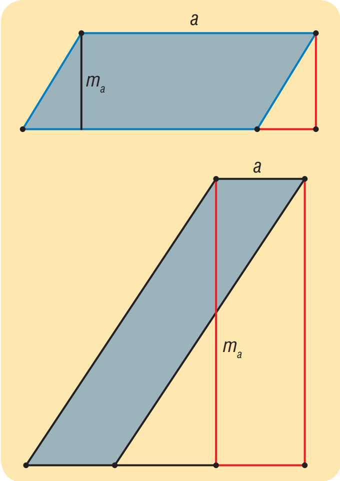


5.3. ábra Téglalap területe

5.2. A paralelogramma területe

A paralelogramma területképletét a legtöbbször „darabolással” vezetik le: átdarabolják háromszög levágásával és áthelyezésével vele egyenlő területű téglalapba. Szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy ez az eljárás ebben a formában nem mindig működik. Erre az 5.4. ábra mutat rá, amelyen látszik, hogy ami az egyik esetben megy, az a másikban nem.

Ezért egy olyan gondolatmenetet mutatunk be, amelyik független a paralelogramma alakjától.

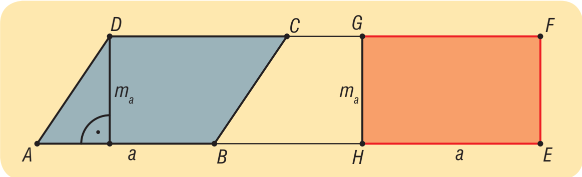


5.4. ábra Megy – nem megy

Tétel A paralelogramma területe $T = am_a$, ahol a az egyik oldal, m_a pedig a hozzá tartozó magasságszakasz hossza.

Bizonyítás:
Hosszabbítsuk meg a paralelogramma szemközti (párhuzamos) oldalait és vegyünk fel az 5.5. ábra szerint egy olyan téglalapot, melynek oldalai a, illetve m_a hosszúságúak.

Az *AHGD* trapézt az $\overrightarrow{AB}$-ral való eltolás átviszi a *BEFC* trapézba, így területük egyenlő. Mivel a *BHGC* trapéz mindkettőnek része, ezért levonva területükből e trapéz területét, a megmaradt területeknek egyenlőknek kell lenniük. Így az *ABCD* paralelogramma területe egyenlő a *HEFG* téglalap területével, ami éppen $T = am_a$.

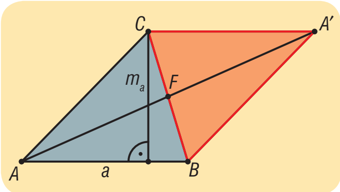


5.5. ábra Paralelogramma területe

5.3. A háromszög területe

A háromszög ismert területképletét esetszétválasztás nélkül egyszerűen megkaphatjuk a paralelogramma területképletéből. Ha az *ABC* háromszög *BC* oldalának *F* felezési pontjára tükrözzük a háromszög *A* csúcsát, akkor egy olyan paralelogrammát kapunk, amelyet a *BC* oldal két, az eredetivel egybevágó, és így egyenlő területű háromszögre bont.

Tétel
A háromszög területe $T = \dfrac{am_a}{2}$, ahol m_a az a hosszúságú oldalhoz tartozó magasságszakasz hossza.



5.6. ábra Háromszög területe

Bizonyítás:
Az állítás a fent leírtak, valamint az 5.6. ábra alapján nyilvánvaló.

Oldjuk meg!

1. Igazoljuk, hogy ha egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és c, továbbá egyeneseik távolsága m, akkor a trapéz területe:

$$T = \frac{a+c}{2}m!$$

2. Igazoljuk, hogy ha egy négyszög átlóinak hossza e és f, továbbá az átlók merőlegesek egymásra, akkor a négyszög területe:

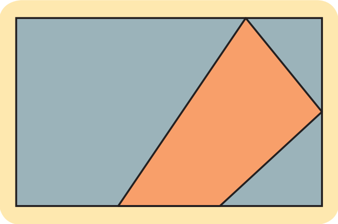
$$T = \frac{ef}{2}!$$

3. Igazoljuk, hogy ha egy konvex négyszög átlóinak hossza e és f, az átlók hajlásszöge pedig φ, akkor a négyszög területe:

$$T = \frac{ef\sin\varphi}{2}!$$

4. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 40 cm és 8 cm, a szárak hossza 20 cm és 32 cm. Mekkora a trapéz területe?

5. Egy derékszögű háromszög kerülete 20 cm, átfogója 8 cm.
a) Mekkora a beírt kör sugara?
b) Mekkora a területe?



5.7. ábra A 6. feladat ábrája

6. Az 5.7. ábrán látható téglalap oldalain két harmadoló-, egy felező- és egy negyedelőpontot jelöltünk ki, melyek segítségével létrehoztuk a benne lévő négyszöget.
Hány százaléka a négyszög területe a téglalap területének?

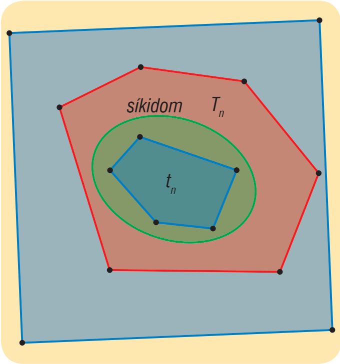
6. Egyéb síkidomok területe

6.1. A sokszögek területe

A sokszögek területének kiszámítására általában nincs olyan egyszerű területképlet, mint amilyet pl. a paralelogramma esetén láttunk. A sokszögek háromszögekre bontásával területük kiszámítása visszavezethető a felbontásban szereplő háromszögek területének kiszámítására. Elég nyilvánvalónak látszik, hogy a háromszögekre való felbontás mindig lehetséges, ezt azonban be lehet bizonyítani. Könyvünk teljes indukcióval foglalkozó fejezetében látható erre egy olyan bizonyítás, ahol a felbontás egymást nem metsző belső átlókkal történik. Most egy másik lehetséges utat vázolunk. Ha a sokszög konkáv, akkor az oldalegyenesek a sokszöglapot konvex sokszögekre bontják, amelyekre már a háromszögekre való felbonthatóság nyilvánvaló. Bebizonyítható, hogy a sokszög területe független a háromszögekre való felbontásának módjától.

6.2. A síkidomok területéről általában (Kiegészítő lecke)

Egy tetszőleges síkidom területének értelmezéséhez és meghatározásához elvezető gondolatmenetet csak vázlatosan ismertetjük, mivel ez általában véve igen nehéz kérdés. Tételezzük fel, hogy a síkidom korlátos, tehát lefedhető pl. egy négyzettel. Tekintsük a síkidomon belülre írt összes sokszöget! Ezeknek létezik területe, a mérőszámok $\{t_1, t_2, t_3, ...\}$ halmaza pedig felülről korlátos, hiszen a síkidomot fedő négyzet területe nyilvánvalóan felső korlát. Tekintsük a síkidomon kívülre írt sokszögeket, ezeknek szintén létezik területe, és a mérőszámok $\{T_1, T_2, T_3, ...\}$ halmaza alulról korlátos, hiszen bármely belülre írt sokszög területe alsó korlát. Axióma rögzíti (teljességi axióma, a számok valósak), hogy felülről korlátos nemüres számhalmaznak van legkisebb felső korlátja. Ugyancsak érvényes, hogy alulról korlátos nemüres számhalmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja. Akkor mondjuk, hogy a síkidomnak van területe, ha a $\{t_1, t_2, t_3, ...\}$ halmaz t legkisebb felső korlátja egyenlő a $\{T_1, T_2, T_3, ...\}$ halmaz T legnagyobb alsó korlátjával. A síkidom területének mérőszáma ekkor a $t = T$ szám. A fő probléma ezzel a definícióval az, hogy nem látszik belőle, hogyan lehet alkalmazni egy konkrét síkidom esetén. Könyvünk Analízis című fejezetében választ kapunk az ilyen kérdések egy részére. A határozott integrál fogalmának ismeretében, a Newton–Leibniz-formulát alkalmazva kiszámíthatjuk például a kör vagy a parabolaszelet területét.



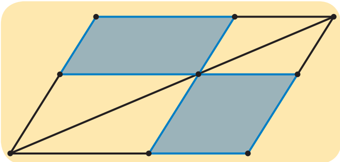
6.1. ábra Síkidom területe

Megemlítünk két nevezetes példát, hogy valamennyire érzékeltessük a problémakör mélységét.

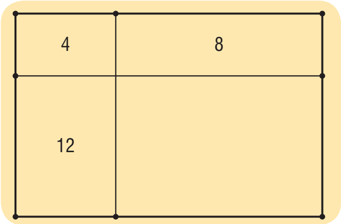
- Peano olasz matematikus a XIX. század végén konstruált olyan görbét, amely egy egységnégyzet belsejének minden pontján végtelen sokszor áthalad, tehát „kitölti” a négyzetet. Akkor a görbének 1 lenne a területe…?
- Tekintsük az *ABCD* egységnyi oldalú négyzetlapot. Értelmezzünk két ponthalmazt a következő módon: legyen H_1 azon pontok halmaza, amelyek az *AB* oldaltól racionális távolságra vannak, H_2 pedig azon pontok halmaza, amelyek az *AB* oldaltól irracionális távolságra vannak. Világos, hogy a halmazok közös pont nélküliek. A fenti definíció alapján külön-külön egyik ponthalmaznak sincs területe, az egyesítésük azonban az *ABCD* négyzet, melynek területe 1.

Oldjuk meg!

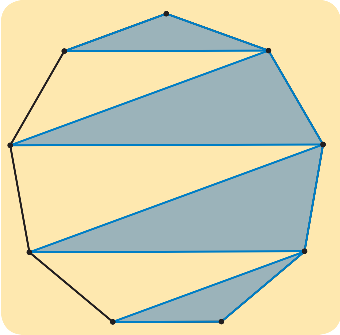
1. Egy paralelogramma egyik átlóján kijelölünk egy pontot, és rajta keresztül párhuzamosokat húzunk a paralelogramma oldalaival. Igazoljuk, hogy az ábrán színezéssel jelölt területek egyenlők!



6.2. ábra A színezéssel jelölt területek



6.3. ábra Mekkora a 4. terület?



6.4. ábra Melyik terület a nagyobb?

2. Egy téglalapot két szakasszal négy téglalapra bontottunk, és a négy közül három kis téglalap területét ismerjük. Mekkora a negyediknek a területe? (6.3. ábra)

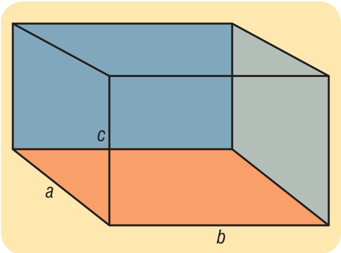
3. Egy szabályos kilencszöget 6 átlónak a 6.4. ábrán látható módon történő behúzásával felosztottunk háromszögekre. Melyik terület a nagyobb: a színezett vagy az üres?

4. Igazoljuk, hogy egy korlátos síkidomba beleírt sokszögek területének legkisebb felső korlátja legfeljebb akkora, mint a síkidom köré írt sokszögek területének legnagyobb alsó korlátja!

7. A poliéderek felszíne

Egy poliéder felszínén a határoló sokszöglapok területeinek összegét értjük. A továbbiakban sorra veszünk néhány, az alkalmazásokban gyakran előforduló poliédert, és felírjuk a rájuk vonatkozó felszínképleteket. A felszín mértékét mindig A fogja jelölni (*area* = terület).

7.1. A téglatest és a kocka felszíne



7.1. ábra Téglatest

Mivel a téglatest szemközti lapjai egybevágó téglalapok, ezért felszíne:

$$A = 2(ab + bc + ca),$$

ahol a, b és c jelöli a közös csúcsból induló három él hosszát. Ha a téglatest kocka, azaz határoló lapjai négyzetek, akkor a felszín:

$$A = 6a^2.$$

7.2. A négyzet alapú egyenes gúla (piramis) felszíne

Ha a jelöli az alapél, m a testmagasság és m_o az oldallapmagasság hosszát, akkor a felszín:

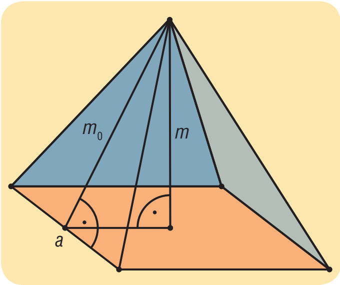
$$A = a^2 + 4\frac{a \cdot m_o}{2}.$$

Mivel gyakori, hogy a és m az ismert adat, így érdemes ezek segítségével is felírni a felszínt. A Pitagorasz-tétel szerint

$$m_o = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4m^2}}{2},$$

ezért

$$A = a^2 + a\sqrt{a^2 + 4m^2}.$$



7.2. ábra Négyzet alapú egyenes gúla

1. példda Egy szabályos négyoldalú gúla felszíne 864 cm^2, oldallapjainak magassága pedig 15 cm. Mekkorák a gúla élei?

Megoldás:
Behelyettesítve a felszínre vonatkozó képletbe:

$$864 = a^2 + \frac{4 \cdot 15a}{2} \Leftrightarrow a^2 + 30a - 864 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a pozitív megoldása $a = 18$, az alapél hossza tehát 18 cm. Az oldalélek hossza a Pitagorasz-tétel segítségével határozható meg (lásd a 7.2. ábrát).

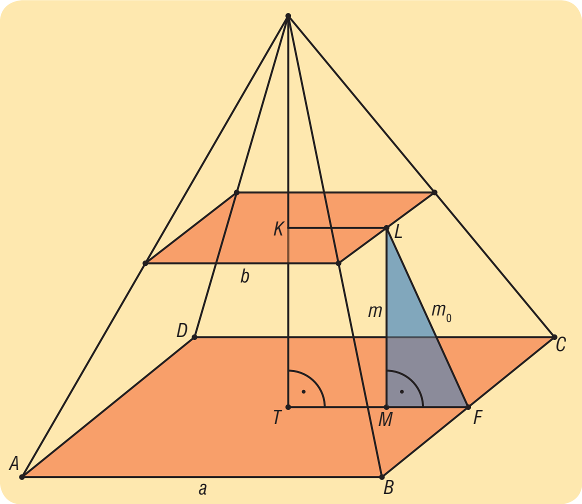
$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_0^2} = \sqrt{9^2 + 15^2} = \sqrt{306} \approx 17{,}5.$$

Az oldalélek hossza tehát kb. 17,5 cm.

7.3. A négyzet alapú csonka gúla felszíne

Ha egy négyzet alapú egyenes gúlát az alapjával párhuzamos síkkal elmetszünk, akkor a metsző sík és az eredeti gúla alapja közötti testet csonka gúlának hívjuk. Jelölje a az alaplap, b pedig a fedőlap élének hosszát, továbbá m a csonka gúla magasságát!

2. példa Fejezzük ki az a, b és m segítségével a csonka gúla felszínét!



7.3. ábra A csonka gúla felszíne

Megoldás:
Használjuk a 7.3. ábra jelöléseit, ahol m_0 jelöli egy oldallap magasságát. A felszín 4 egybevágó szimmetrikus trapéz területének (palást), valamint két négyzet területének az összege. Mivel $KL=\frac{b}{2}$ és $TF=\frac{a}{2}$, ezért $MF=\frac{a-b}{2}$, így az LMF derékszögű háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

$$m_0=\sqrt{m^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

A felszín ezért:

$$A=a^2+b^2+4\frac{(a+b)\cdot m_o}{2}=a^2+b^2+2(a+b)\sqrt{m^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4m^2+(a-b)^2}.$$

3. példa Víztárolót szeretnénk építeni. Ehhez egy lefelé keskenyedő négyzet alapú csonka gúla formájú gödröt ástunk. A talaj szintjén lévő négyzet oldala 10 m, a 2 m mélységben lévő alsó négyzet oldala pedig 6 m. Szigetelési célból fóliát vásároltunk a kibéleléséhez. Legalább hány négyzetméter fóliát kell vennünk, ha a béleléskor fellépő anyagveszteség 6%-os, és csak egész m²-nyi mennyiség vásárolható?

Megoldás:
A felszínre vonatkozó képletből ki kell hagynunk a 10 m oldalú négyzet területét, így megkapjuk a kibélelendő felületet. Behelyettesítve:

$$A=6^2+16\sqrt{4\cdot 2^2+4^2}\approx 126{,}51\ \text{m}^2.$$

Ha x m² a megvásárolt mennyiség, akkor a veszteség miatt

$$x\cdot 0{,}94=126{,}51,$$

$$x\approx 134{,}59.$$

Tehát legalább 135 m² fóliát kell vásárolnunk.

Oldjuk meg!

1. Egy téglatest testátlója 27 cm, élei hosszúságának összege 168 cm. Mekkora a téglatest felszíne?
2. Az azonos nagyságú felszínnel rendelkező téglatestek közül melyiknek a legrövidebb a testátlója?
3. Határozzuk meg a szabályos tetraéder felszínét, ha magassága 10 cm!
4. Határozzuk meg annak a szabályos hatszög alapú egyenes gúlának a felszínét, melynek alapéle 16 cm, oldalélei pedig 17 cm hosszúak!

5. Határozzuk meg annak a poliédernek a felszínét, amelynek csúcsai egy 10 cm élhosszúságú kocka éleinek felezési pontjai!

6. Tekintsük az $ABCD$ ún. derékszögű tetraédert, ahol a D csúcsnál vannak a derékszögek: az AD, CD és BD élek páronként merőlegesek. Igazoljuk, hogy az $ABC_\triangle$ területének négyzete egyenlő a másik három lap területének négyzetösszegével!

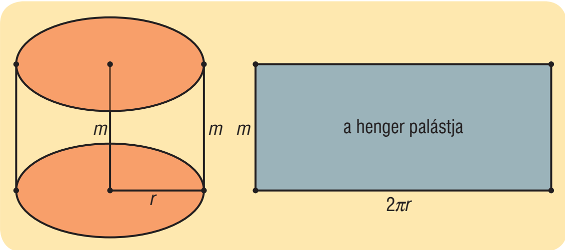
8. Néhány egyéb test felszíne

Amint azt már korábban jeleztük, a felszín fogalma a matematika igen nehéz problémájának bizonyult, ezért csupán arra szorítkozunk, hogy néhány, az alkalmazásokban gyakran szereplő test felszínének kiszámítási módját tárgyaljuk. Még így is bizonyítás nélkül kell elfogadnunk pl. azt a szemléletesen elég nyilvánvalónak tűnő tényt, hogy a forgáshenger vagy a forgáskúp palástja síkba teríthető. A gömb felszínével kapcsolatosan precíz bizonyítás csak az analízis eszközeivel adható.

8.1. A forgáshenger felszíne

Jelölje r a henger alapkörének sugarát, m pedig a magasságát. A henger palástja síkba terítve egy olyan téglalap, melynek oldalai m, illetve $2\pi r$ hosszúságúak, ezért a felszín:

Tétel $A = 2\pi r(r+m)$.



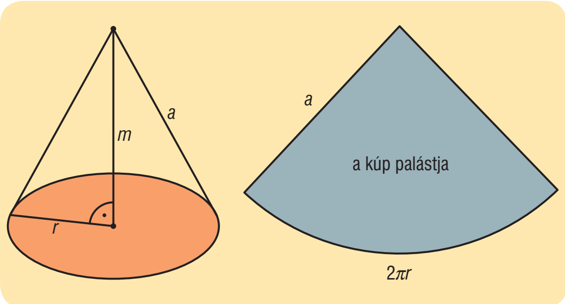
8.1. ábra Forgáshenger felszíne

8.2. A forgáskúp felszíne

A forgáskúp palástja síkba terítve egy körcikk, amelynek sugara a kúp a-val jelölt egyik alkotója, a körcikkhez tartozó körív hossza pedig $2\pi r$, ahol r a kúp alapkörének sugara.

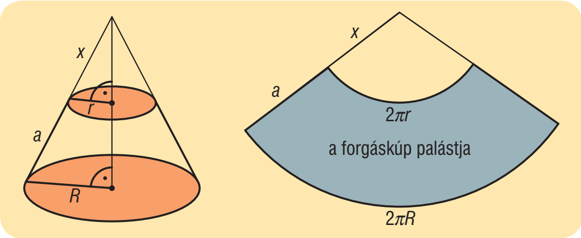
A körcikk területére vonatkozó ismert képletet alkalmazva adódik a forgáskúp felszíne:

Tétel $A = \pi r(r+a)$.



8.2. ábra Forgáskúp felszíne

8.3. A forgási csonka kúp felszíne



8.3. ábra Forgási csonka kúp felszíne

Ha egy forgáskúpot (egyenes körkúpot) az alapjával párhuzamos síkkal elmetszünk, akkor a metsző sík és az eredeti kúp alapja közötti testet forgási csonka kúpnak hívjuk. Jelölje R az alapkör, r pedig a fedőkör sugarát, valamint a az alkotók hosszát.

A 8.3. ábrán lévő hasonló háromszögek miatt:

$$\frac{R}{r}=\frac{a+x}{x} \Leftrightarrow Rx-rx=ar.$$

A kiterített palást területe két körcikk területének különbségeként számolható ki:

$$\frac{(a+x)\cdot 2\pi R}{2}-\frac{x\cdot 2\pi r}{2}=a\pi R+\pi(Rx-rx)=\pi a(R+r).$$

A felszín:

Tétel $A=\pi\left(R^2+r^2+a(R+r)\right).$

8.4. A gömb felszíne

8.4. ábra Narancs és héja

8.5. ábra Víztartály

A gömb sugarát r-rel jelölve a felszín:

Tétel $A=4\pi r^2.$

A precíz bizonyítás pl. integrálszámítás felhasználásával végezhető el.

1. példa Egy henger alakú, felül nyitott víztartály átmérője 2 m, magassága 1 m. Legalább hány m^2 anyag kell a tartály elkészítéséhez, ha a veszteség 6%-os? (Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:

Az alap és a palást területe összesen:

$$\pi\cdot 1^2+2\pi\cdot 1\cdot 1=3\pi\ \mathrm{m}^2,$$

így, ha A az elkészítéshez szükséges minimális anyag területe, akkor

$$A\cdot 0,94=3\pi \Rightarrow A\approx 10\ \mathrm{m}^2.$$

2. példa Egy egyenes körkúp kiterített palástja 18 cm sugarú félkörlap. Mekkora a kúp felszíne?

Megoldás:
A félkör sugara a kúp alkotója: $a=18$ cm. A félkörív hossza az alapkör kerületével egyenlő, így az alapkör r sugara:

$$2\pi r=18\pi \Rightarrow r=9 \text{ cm}.$$

A kúp magasságát Pitagorasz tételének segítségével határozhatjuk meg:

$$m=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{18^2-9^2}\approx 15{,}59 \text{ cm}.$$

A felszín:

$$A=\pi r(r+a)\approx 763{,}41 \text{ cm}^2.$$

3. példa Egy planetárium kupolája félgömb formájú, sugara 10 méter. Legalább hány m^2 lemez kell a befedéséhez, ha a fellépő veszteség 5%-os?

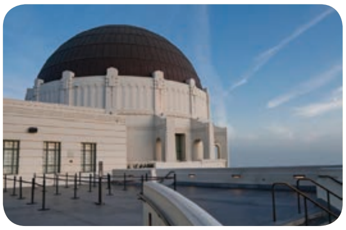
Megoldás:

Mivel az r sugarú gömb felszíne $A=4\pi r^2$, ezért a kupola felszíne $\frac{4\pi\cdot 10^2}{2}\approx 628{,}32 \text{ m}^2$.

Mivel 5%-os veszteséggel is számolnunk kell, ezért legalább

$$\frac{628{,}32}{0{,}95}\approx 661{,}39 \text{ m}^2$$

lemez szükséges a lefedéshez.



8.6. ábra Planetárium

Oldjuk meg!

1. Egy forgáshenger alakú, felül nyitott váza elkészítésekor a külső mázzal való bevonásnál 480 cm^2 felületet festettek be. Mekkora a váza magassága, ha alapkörének külső sugara 6 cm?
2. Egy forgáskúp formájú fagylaltostölcsér alkotója 13 cm, alapkörének átmérője 10 cm. Mekkora a tölcsér felszíne és középponti szöge?
3. Egy forgáskúp alkotója 12 cm. Számítsuk ki a felszínét és a kúp nyílásszögét, ha a síkba terített kúppalást:
   a) negyedkör, b) félkör, c) 120°-os középponti szöggel rendelkező körcikk.
4. Egy forgáskúp alapkörének sugara 9 cm, magassága pedig 12 cm. A kúpot az alapjával párhuzamos olyan sík metszi, amely az alaptól 4 cm távolságra halad. Számítsuk ki a keletkezett csonka kúp felszínét!
5. Egy téglatest lapátlóinak hossza $\sqrt{13}$, $2\sqrt{10}$ és $3\sqrt{5}$. Hányszorosa a köré írt gömb felszíne a téglatest felszínének?
6. Hányszorosa egy kocka köré írt gömb felszíne a beírt gömb felszínének?
7. Egy háromszög oldalainak hossza 6 cm, 25 cm és 29 cm. A háromszöget megforgatjuk
   a) a leghosszabb oldala körül; b) a nagyság szerint középső oldal körül.
   Határozzuk meg a keletkező forgástestek felszínét!
8. Tekintsük az egységnyi sugarú gömbbe írt téglatesteket! Melyiknek a felszíne lesz maximális?

9. A testek térfogatának kiszámítása

9.1. ábra Hordók

A testek térfogatának kiszámítása sok szempontból hasonlóan tárgyalható, mint a síkidomok területének kiszámítása. Mégis óvatosnak kell lennünk, ugyanis nem minden ötlet vihető át a síkból a térre. Bolyai Farkas bebizonyította, hogy az azonos területű sokszögek véges sok lépésben egymásba darabolhatók egyenes vágásokkal. A térben ugyanakkor más a helyzet: már az azonos térfogatú kockára és tetraéderre sem igaz, hogy véges sok egyenes vágással egymásba darabolhatók (Dehn tétele). A térfogatszámításra is érvényes az, amit a területszámítással kapcsolatban elmondtunk: bizonyítás nélkül fogadunk el néhány olyan dolgot, amelyeket a precíz felépítés során igazolni szoktak. Először a poliéderek térfogatával foglalkozunk. Elfogadjuk, hogy a poliédereknek van térfogata, ami egy pozitív szám, továbbá megállapodunk a következőkben:

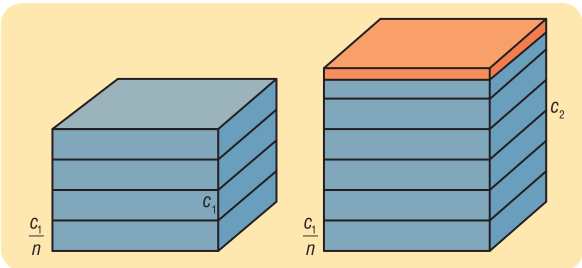
1) az egységnyi oldalhosszúságú kocka térfogata lesz a térfogategység,
2) egybevágó poliéderek térfogata egyenlő,
3) ha egy poliédert egy síkkal két poliéderre bontunk, akkor a két rész térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatával egyezik meg.

Ez utóbbi teljes indukcióval könnyen kiterjeszthető véges sok darabra. Az is következik belőle, hogy a darabok térfogata kisebb az eredeti sokszög térfogatánál. (Bizonyítsuk be ezeket az állításokat!)

9.1. A téglatest térfogata

A téglatest térfogatával kapcsolatban először bebizonyítjuk az általános iskolából jól ismert képletet:

Tétel Ha egy téglatest egy csúcsból induló három élének hossza a, b és c, akkor térfogata: $V = abc$.



9.2. ábra Feldarabolt téglatestek

Bizonyítás:
Megmutatjuk, hogy ha két téglatest egy-egy lapja egybevágó, akkor térfogatuk aránya megegyezik a lapokra merőleges élek hosszának arányával. Legyen a két egybevágó lap területe T, a rájuk merőleges élek hossza pedig c_1 és c_2. A két téglatest térfogatát jelölje V_1 és V_2.

Állítsuk a két téglatestet a T területű lapjukra egy sík azonos oldalán, osszuk fel n egyenlő részre a c_1 hosszúságú élt, majd mérjük fel a másik téglatest c_2 hosszú élére többször egymás után a $\frac{c_1}{n}$ hosszú szakaszt. Fektessünk az adott síkkal párhuzamos síkokat az osztópontokon át, ezek egybevágó téglatesteket hoznak létre, melyek térfogata $\frac{V_1}{n}$. Tegyük fel, hogy c_2-re a $\frac{c_1}{n}$ hosszú szakasz k-szor fért rá teljesen, tehát a $(k+1)$-edik már felül „kilóg". Ekkor egyrészt

$$k \cdot \frac{c_1}{n} \le c_2 < (k+1) \cdot \frac{c_1}{n} \Leftrightarrow \frac{k}{n} \le \frac{c_2}{c_1} < \frac{k}{n} + \frac{1}{n},$$

másrészt a 2) és 3) szerint

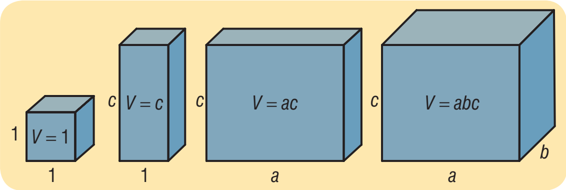
$$k \cdot \frac{V_1}{n} \le V_2 < (k+1) \cdot \frac{V_1}{n} \Leftrightarrow \frac{k}{n} \le \frac{V_2}{V_1} < \frac{k}{n} + \frac{1}{n}.$$

Ezekből leolvasható, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén

$$0 \le \left| \frac{c_2}{c_1} - \frac{V_2}{V_1} \right| < \frac{1}{n}.$$

Mivel $\frac{1}{n}$ tetszőleges pozitív számnál kisebb lehet, ha n elég nagy, ezért a fenti egyenlőtlenség csakis úgy teljesülhet, ha az abszolútérték-jelen belül 0 áll, azaz

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{V_2}{V_1}.$$



9.3. ábra Téglatest térfogata

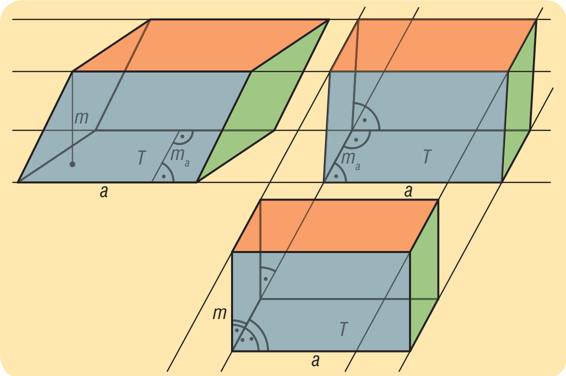
Ezek után a téglatest térfogatára vonatkozó képlet úgy adódik, hogy a fent igazolt állítást alkalmazzuk háromszor az egységkockától elindulva. Ezt a 9.3. ábrán követhetjük nyomon úgy, hogy a szomszédos téglatesteket gondolatban mindig a megegyező területű lapjukra állítjuk.

9.2. A paralelepipedon térfogata

Tétel A paralelepipedon térfogata $V = Tm$, ahol T az egyik lap területe, m pedig a hozzá tartozó magasság hossza.

Bizonyítás:

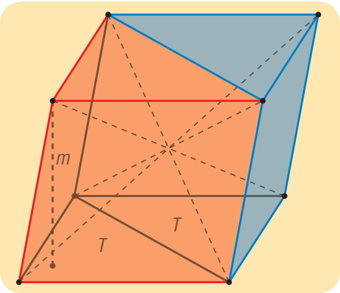
Az ötlet lényegében megegyezik azzal, amelynek segítségével a paralelogramma területét kaptuk a téglalap területéből. (Érdemes újra áttekinteni azt a levezetést, mielőtt továbbolvasunk.) Használjuk a 9.4. ábra jelöléseit. A paralelepipedon a hosszú élével párhuzamos élekre illeszkedő egyeneseket messük el egy rájuk merőleges síkpárral, melyek távolsága a. Gondoljuk meg, hogy 9.4. ábrán látható második paralelepipedon alapterülete és térfogata



9.4. ábra Paralelepipedon térfogata

megegyezik az eredetiével. Alkalmazzuk még egyszer ezt a gondolatmenetet: a második test m_a hosszú élével párhuzamos élekre illeszkedő egyeneseket messük el egy rájuk merőleges helyzetű síkpárral, melyek távolsága m_a. A harmadik paralelepipedon téglatest lesz, amelynek egyik lapja T területű, az erre a lapra merőleges él hossza pedig m. Az is érvényes, hogy térfogata megegyezik a második paralelepipedon térfogatával. Mindezekből a tétel állítása következik.

9.3. A háromszög alapú hasáb térfogata

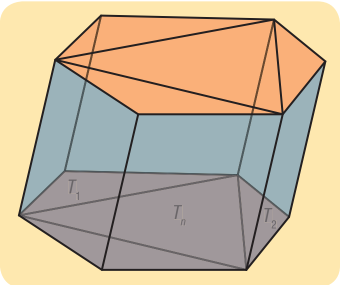


9.5. ábra Háromszög alapú hasáb térfogata

Tétel A háromszög alapú hasáb térfogata $V = Tm$, ahol T az alaplap területe, m pedig a hasáb magasságának hossza.

Bizonyítás:
Ha valamely oldallap középpontjára tükrözzük a háromszög alapú hasábot, akkor az eredetivel együtt egy olyan paralelepipedon adódik, amelynek térfogata kétszerese az eredeti test térfogatának. Figyelembe véve a paralelepipedon térfogatának kiszámítási módját, a tételt bebizonyítottuk.

9.4. A hasáb térfogata



9.6. ábra Hasáb térfogata


9.7. ábra Hasábburgonya

Tétel A hasáb térfogata $V = Tm$, ahol T az alaplap területe, m pedig a hasáb magasságának hossza.

Bizonyítás:
A hasábok alaplapja és fedőlapja egybevágó sokszög. Tekintsük az alaplap háromszögekre való felbontását, majd ezt eltolással vigyük át a fedőlapra. (Korábban igazoltuk, hogy a sokszögeket egymást nem metsző átlókkal mindig fel lehet bontani háromszögekre.) Ezzel a hasábot háromszög alapú hasábokra bontottuk, amelyeknek a magassága megegyezik az eredeti hasáb m magasságával. A hasáb térfogata ezek térfogatának összege lesz. Ha az alapsokszög felbontásában szereplő háromszögek területei $T_1, T_2, \ldots, T_n$, akkor

$$V = T_1 m + T_2 m + \ldots + T_n m = (T_1 + T_2 + \ldots + T_n) m = Tm,$$

hiszen $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

MatEm_Book.indb 236 2012.07.05. 12:08:52

1. példa A 600 cm^2 felszínű téglatestek közül melyiknek lesz
a) a legkisebb a testátlója;
b) a legnagyobb a térfogata?

Megoldás:
a) Ha az egy csúcsból induló élek hossza cm-ben mérve *a*, *b* és *c*, akkor a felszínre vonatkozó képletből $ab+bc+ca=300$, továbbá a testátló hossza $e=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Vegyük észre, hogy

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

ugyanis rendezés után:

$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2 \geq 0.$$

Ezért $e \geq \sqrt{300}$ cm. Mivel az igazolt egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $a=b=c=10$, így 10 cm élű kocka esetén lesz a testátló a legkisebb.

b) A téglatest térfogata $V = abc$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$100=\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\sqrt[3]{V^2},$$

$$1000 \geq V.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $ab=bc=ca \Leftrightarrow a=b=c$, tehát 10 cm élű kocka esetén lesz a térfogat maximális.

2. példa Egy vízelvezető árok keresztmetszete olyan szimmetrikus trapéz, amelynek rövidebb alapja és szárai 1 méteresek, a szárak ezzel az alappal 120°-os szöget zárnak be. Mennyi víz fér el az árok 100 méter hosszú szakaszában, ha tele van vízzel?

Megoldás:
A vízzel kitöltött rész egyenes hasáb alakú, melynek magassága $m=100$ m, alaplapja pedig a keresztmetszetnek megfelelő szimmetrikus trapéz. Tekintsük a 9.9. ábrát!
Az *ATD* derékszögű háromszögből:

$$\frac{AT}{AD}=\sin 30° \Rightarrow AT=0,5,$$

$$\frac{TD}{AD}=\cos 30° \Rightarrow TD=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A trapéz területképletének felhasználásával, mivel $AB=1+2\cdot 0,5=2$,

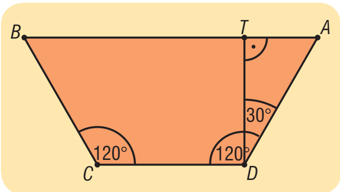
$$t=\frac{2+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

A hasáb térfogata:

$$V=tm \approx 130 \text{ m}^3,$$

vagyis ennyi víz fér el az árokban.

9.8. ábra Árok



9.9. ábra Az árok keresztmetszete

Oldjuk meg!

1. Egy téglatest éleinek aránya $3:4:12$, a testátló hossza 91 cm. Határozzuk meg a téglatest térfogatát!
2. Egy téglatest formájú doboz éleinek aránya $3:7:8$, felszíne pedig 1808 cm^2. Mekkora a doboz térfogata?
3. Egy üdítősdoboz alakja szabályos háromszög alapú egyenes hasáb, amelynek alapéle 6 cm hosszú. Hány cm a doboz magassága, ha a térfogata 1 liter?
4. Egy gát keresztmetszete olyan szimmetrikus trapéz, amelynek rövidebbik alapja és szárai 1 m hosszúak, a szárak ezzel az alappal 150°-os szöget zárnak be. Hány m^3 föld van a gát 10 m hosszú szakaszában?
5. Egy szabályos hatoldalú egyenes hasáb minden éle egyenlő hosszú, térfogata pedig 200 cm^3. Mekkora a hasáb felszíne?
6. A 30 cm hosszú testátlóval rendelkező téglatestek közül melyiknek lesz a térfogata maximális? Mekkora a maximális térfogat?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 643-662. feladatok

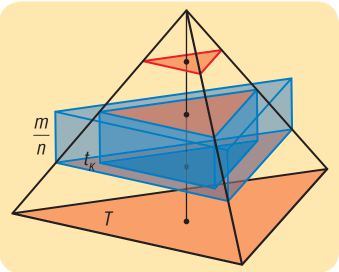
10. Néhány egyéb test térfogata

10.1. A gúla térfogata

A gúlák térfogatképletének igazolása eleminek mondható módszerrel lényegében lehetetlen. Precíz bizonyításhoz legegyszerűbben az analízis eszközeivel lehet eljutni. A most következő levezetés a hasábok térfogatképletén kívül a határérték fogalmát használja fel.

Tétel

A gúla térfogata $V = \dfrac{Tm}{3}$, ahol T az alap területe, m pedig a magasság hossza.



10.1. ábra Gúla térfogata

Bizonyítás:
Osszuk fel a gúla magasságát n egyenlő részre, ahol n pozitív egész! Az osztópontokon át fektessünk az alappal párhuzamos síkokat. A síkok a gúlát egy gúlára és csonka gúlákra darabolják fel. Készítsük el minden csonka gúlához a 10.1. ábrán látható módon belülre írt, illetve kívülre írt hasábokat! Az eredeti gúla tetején lévő kis gúlához csak kívülre írt hasáb tartozik. (Azért, hogy jobban lássuk, csak egy réteg esetén mutatjuk a hasábokat.)

A gúla csúcsától számított k-adik sík távolsága $y_k = k \cdot \frac{m}{n}$. $(k = 1, 2, \ldots, n.)$ Jelölje t_k a k-adik síkmetszet területét és legyen $t_n = T$! A gúla csúcsára vonatkozó középpontos hasonlóság miatt ekkor

$$\frac{t_k}{T} = \left(\frac{y_k}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \Leftrightarrow t_k = \frac{k^2}{n^2}T.$$

Ha V_k jelöli a k-adik kívülre írt hasáb térfogatát, akkor a hasábok térfogatképlete szerint

$$V_k = \frac{m}{n}t_k = \frac{m}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2}T = \frac{Tm \cdot k^2}{n^3}.$$

A kívülre írt hasábok térfogatának összege ezért:

$$V_{\text{kívül}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Tm \cdot k^2}{n^3} = \frac{Tm}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{Tm}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Felhasználtuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6},$$

ami könyvünk teljes indukcióval foglalkozó fejezetének 1. példája. A határértékről tanultakat alkalmazva:

$$V_{\text{kívül}} = \frac{Tm}{3} \cdot \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \to \frac{Tm}{3}, \text{ ha } n \to \infty.$$

Mivel a belülre írt hasábok térfogatának összege $V_{\text{belül}} = V_{\text{kívül}} - T \cdot \frac{m}{n}$, ezért

$$V_{\text{belül}} \to \frac{Tm}{3}, \text{ ha } n \to \infty.$$

Nyilvánvaló, hogy minden n-re $V_{\text{belül}} < V < V_{\text{kívül}}$, amiből adódik, hogy $V = \frac{Tm}{3}$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

10.2. A csonka gúla térfogata

A gúlák térfogatképletének birtokában meghatározhatjuk a csonka gúla térfogatát.

Tétel A csonka gúla térfogata

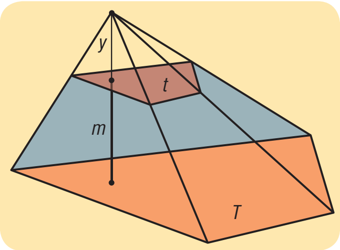
$$V = \frac{m}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right),$$

ahol T az alaplap, t pedig a fedőlap területe és m a csonka gúla magassága.

10.2. ábra Azték piramis

Bizonyítás:
Az eredeti gúla csúcsára nézve a sík által levágott gúla és a származtató gúla középpontosan hasonló, ezért

$$\frac{y+m}{y} = \sqrt{\frac{T}{t}} \Leftrightarrow 1 + \frac{m}{y} = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow y = \frac{m\sqrt{t}}{\sqrt{T} - \sqrt{t}}.$$



10.3. ábra Csonka gúla térfogata

A csonka gúla térfogata a két gúla térfogatának különbsége:

$$V=\frac{T(m+y)}{3}-\frac{ty}{3}=\frac{y}{3}\left[T\left(\frac{m}{y}+1\right)-t\right]=$$

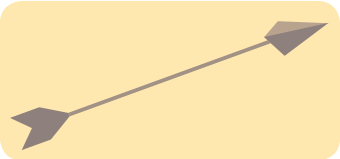
$$=\frac{y}{3}\left(\frac{T\sqrt{T}}{\sqrt{t}}-t\right)=\frac{m}{3}\left(\frac{T\sqrt{T}}{\sqrt{T}-\sqrt{t}}-\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{T}-\sqrt{t}}\right),$$

ahonnan a nevezők gyöktelenítése és egyszerű átalakítások után:

$$V=\frac{m}{3}\cdot\frac{T\sqrt{T}\left(\sqrt{T}+\sqrt{t}\right)-t\sqrt{t}\left(\sqrt{T}+\sqrt{t}\right)}{T-t}=$$

$$=\frac{m}{3}\cdot\frac{T^2+T\sqrt{Tt}-t\sqrt{Tt}-t^2}{T-t}=\frac{m}{3}\cdot\frac{(T-t)\cdot\left(T+\sqrt{Tt}+t\right)}{T-t},$$

ahonnan adódik a tétel állítása.



10.4. ábra Nyílvessző

1. példa Egy nyílvessző hegye szabályos háromoldalú gúla alakú. A gúla alapéle 1,5 cm, az oldalélek az alappal 60°-os szöget zárnak be. Mekkora a gúla térfogata?

Megoldás:

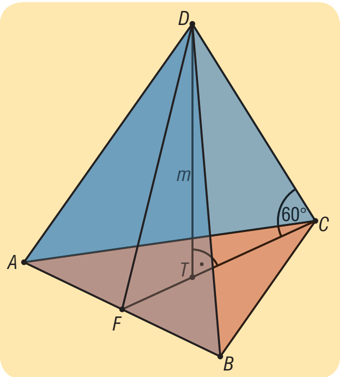
Használjuk a 10.5. ábra jelöléseit! A gúla magasságának T talppontja az ABC szabályos háromszög súlypontja lesz. Mivel a szabályos háromszög súlyvonala egyben magasság is, továbbá a súlypont a súlyvonalakat $2:1$ arányban osztja, ezért

$$TC=\frac{2}{3}CF=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Felhasználtuk, hogy a szabályos háromszög magassága az oldal hosszának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese.)

A gúla magasságára fennáll, hogy

$$\frac{TD}{TC}=\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}\Leftrightarrow TD=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1{,}5\text{ cm}.$$



10.5. ábra A nyílvessző hegye

Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, ezért az alapterület: $T\approx 0{,}974\text{ cm}^2$.
A gúlára vonatkozó térfogatképlet miatt:

$$V=\frac{T\cdot m}{3}\approx 0{,}49\text{ cm}^3.$$

2. példa Egy virágcserép lefelé keskenyedő szabályos csonka gúla alakú, a teteje 10 cm, az alja pedig 4 cm oldalhosszúságú négyzet, és tudjuk, hogy 416 cm^3 mennyiségű virágföld fér bele. Mennyi föld van akkor benne, ha magasságának $\frac{3}{4}$ részéig van csak tele?

Megoldás:
Behelyettesítve a csonka gúla térfogatképletébe:

$$416 = \frac{m}{3}\left(10^2 + \sqrt{10^2 \cdot 4^2} + 4^2\right) \Rightarrow m = 8\text{ cm}$$

a cserép magassága.

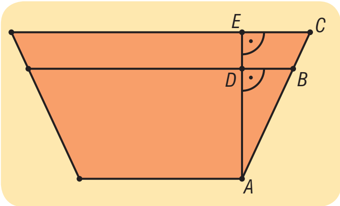
A föld által elfoglalt rész egy 4 cm alapélű, $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6\text{ cm}$ magasságú, felfelé szélesedő szabályos csonka gúla. Ha az eredeti elrendezést elmetsszük az alapjára merőleges és az egyik alapélre illeszkedő síkkal, akkor a síkmetszet egy szimmetrikus trapéz lesz, amely a 10.7. ábrán látható. A trapéz alapjai 4, illetve 10 cm hosszúak. Világos, hogy $AD = 6\text{ cm}$, $AE = 8\text{ cm}$, $EC = \frac{10-4}{2} = 3\text{ cm}$. Az ABD és ACE háromszögek megfelelő szögei egyenlők, így a két háromszög hasonló, ezért

$$\frac{6}{8} = \frac{DB}{EC} = \frac{DB}{3} \Rightarrow DB = 2{,}25\text{ cm}.$$

Ebből adódik, hogy ha csak $\frac{3}{4}$ részéig van csak tele a cserép, akkor a fedőlapot alkotó négyzet oldala $4 + 2 \cdot 2{,}25 = 8{,}5\text{ cm}$.
Behelyettesítve a csonka gúla térfogatképletébe:

$$V = \frac{6}{3} \cdot \left(8{,}5^2 + \sqrt{8{,}5^2 \cdot 4^2} + 4^2\right) = 244{,}5\text{ cm}^3.$$

10.6. ábra Cserepes virág

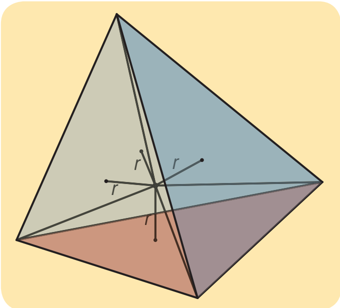


10.7. ábra A virágcserép

10.3. A poliéderek térfogata

Konvex poliéderek térfogatát megkaphatjuk oly módon, hogy a belsejükben felvett pontot a csúcsokkal összekötve a poliédert gúlákra bontjuk. A poliéder térfogata a gúlák térfogatainak összege lesz. Konkáv poliéderek térfogatának kiszámítása visszavezethető a konvex esetre, hiszen a határoló lapok síkjai egy konkáv poliédert konvex poliéderekre darabolnak fel.

3. példa Igazoljuk, hogy ha egy poliéderbe gömb írható, akkor érvényes lesz a $V = \frac{Ar}{3}$ összefüggés a poliéder térfogata, felszíne és a beírt gömb sugara között! (Egy poliéder beírt gömbjén azt a gömböt értjük, amely a poliéder minden határoló sokszöglapját érinti.)



10.8. ábra Poliéder térfogata

Megoldás:
A beírt gömb középpontját a csúcsokkal összekötve olyan gúlák adódnak, melyek mindegyikének magassága a beírt gömb r sugara. Alkalmazva a gúlák térfogatára vonatkozó összefüggést, adódik az állítás.

4. példa Egy tetraéder lapjainak területe egyenlő. Igazoljuk, hogy a tetraéder belsejében felvett pontnak a lapoktól mért távolságainak összege független a pont helyzetétől!

Megoldás:
A térfogatképlet miatt világos, hogy a tetraéder minden lapja ugyanakkora távolságra van a szemközti csúcstól, más szóval a tetraéder minden magassága egyenlő hosszú. Jelölje m ezt a távolságot, x, y, z, v pedig a pontnak a lapoktól mért távolságait. Ha a belső pontot összekötjük a tetraéder csúcsaival, akkor ezzel négy gúlára bontjuk, melyek térfogatainak összege a tetraéder térfogata:

$$\frac{Tx}{3}+\frac{Ty}{3}+\frac{Tz}{3}+\frac{Tv}{3}=\frac{Tm}{3},$$

$$x+y+z+v=m.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Oldjuk meg!

10.9. ábra Kerti lak

10.10. ábra A Kheopsz-piramis

1. Egy szabályos négyoldalú gúla alaplapjának területe 36 cm^2, oldallapjainak magassága pedig 5 cm.
a) Mekkora a felszíne?
b) Mekkora a térfogata?

2. Egy kerti házikó teteje szabályos hatoldalú gúla, melynek alapéle 90 cm, oldaléle 150 cm.
Hány m^2 cserép borítja a tetőt?

3. Az Egyiptomban található Kheopsz-piramis alapja egy 230 méter oldalhosszúságú négyzet, oldalélei egyenlők, magassága pedig 150 méter. A piramist mészkőből építették, melynek sűrűsége $2{,}7\ \frac{\text{tonna}}{m^3}$.
a) Mekkora a piramis tömege tonnában kifejezve, ha a benne levő üregektől eltekintünk?
b) Hány tehervonat-szerelvényre lenne szükség ennyi kő elszállításához, ha tudjuk, hogy egy vagonban egyszerre 50 tonna kő fér el és egy szerelvény 40 vagonból áll?
c) Egy művész elhatározza, hogy befedi a piramist textillel. Legalább hány m^2 anyagra lesz szüksége?

4. Van egy 18 cm élhosszú fakockánk, amelyből egy szabályos tetraédert szeretnénk kivágni úgy, hogy a tetraédert a kocka négy csúcsa határozza meg.
a) Mekkora lesz a keletkező tetraéder térfogata?
b) Mekkora lesz a keletkező tetraéder felszíne?

5. Egy négyzetalapú egyenes csonka gúla alapéle 10 cm hosszú, fedőlapjának éle 4 cm, magassága pedig szintén 4 cm.
a) Mekkora a térfogata?
b) Mekkora a felszíne?

11. További testek térfogata

11.1. A testek térfogatáról általában (Kiegészítő lecke)

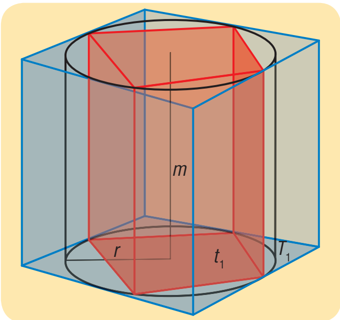
Tetszőleges test térfogatának a kiszámítása sokban emlékeztet a síkidomok területének értelmezésére és kiszámítására. Ez is bonyolult kérdés, így csak vázolunk egy lehetséges értelmezést a térfogatra. Tegyük fel, hogy a test korlátos, tehát belefoglalható pl. egy kockába. Tekintsük a testen belülre írt összes poliédert! Ezeknek létezik térfogata, a mérőszámok $\{v_1, v_2, v_3, ...\}$ halmaza pedig felülről korlátos, hiszen a testet tartalmazó kocka térfogata nyilvánvalóan felső korlát. Tekintsük a testen kívülre írt poliédereket! Ezeknek létezik térfogata, és a mérőszámok $\{V_1, V_2, V_3, ...\}$ halmaza alulról korlátos, hiszen bármely belülre írt poliéder térfogata alsó korlát. Axióma rögzíti (teljességi axióma), hogy felülről korlátos nemüres számhalmaznak van legkisebb felső korlátja. Ugyancsak érvényes, hogy alulról korlátos nemüres számhalmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja. Akkor mondjuk, hogy a testnek van térfogata, ha a $\{v_1, v_2, v_3, ...\}$ halmaz v legkisebb felső korlátja egyenlő a $\{V_1, V_2, V_3, ...\}$ halmaz V legnagyobb alsó korlátjával. A test térfogatának mérőszáma ekkor a $v = V$ szám. A fő probléma ezzel a definícióval az, hogy nem látszik belőle, hogyan lehet használni egy konkrét test esetén a térfogat kiszámítására. A forgáshenger és a forgáskúp esetére mutatunk egy-egy megvalósítást. Az integrálszámítás alkalmazásainál visszatérünk a kérdésre. A határozott integrál fogalmának ismeretében, a Newton–Leibniz-formulát alkalmazva kiszámíthatjuk például a gömb, vagy általában a forgástestek térfogatát.

11.2. A forgáshenger térfogata

Tétel A forgáshenger térfogata $V = \pi r^2 m$, ahol r az alapkör sugara és m a henger magassága.

11.1. ábra Hordó

Bizonyítás:
Tekintsük az alapkörön belülre írt sokszögek fölé emelt m magasságú egyenes hasábokat, valamint az alapkörön kívülre írt sokszögek fölé emelt, szintén m magasságú egyenes hasábokat! Egy belülre írt sokszög területe legyen t_i, egy kívülre írt sokszög területe pedig T_i. Az integrálszámítás során megmutatjuk, hogy a körnek van területe és a terület értéke πr^2. A területszámításnál látottak szerint ez azt jelenti, hogy πr^2 a $\{t_1, t_2, t_3, ...\}$ halmaz legkisebb felső korlátja és egyben a $\{T_1, T_2, T_3, ...\}$ halmaz legnagyobb alsó korlátja. A belülre írt hasábok térfogatai $\{t_1 m, t_2 m, ...\}$, a kívülre írtaké pedig $\{T_1 m, T_2 m, ...\}$. Könnyű végiggondolni, hogy akkor az első számhalmaz legkisebb felső korlátja létezik és egyenlő a második halmaz legnagyobb alsó



11.2. ábra Forgáshenger térfogata

korlátjával, és ez a szám éppen $\pi r^2 m$. A térfogat fogalmával kapcsolatosan mondottak miatt ezzel megkaptuk a tétel állítását.

Az is világos, hogy ferde körhengerre a bizonyítás változtatás nélkül átvihető.

1. példa Egy forgáshenger térfogatának és felszínének mérőszámai úgy aránylanak egymáshoz, mint $3:4$. A tengelymetszet területének mérőszáma 24.
a) Határozzuk meg az alapkör sugarának mérőszámát!
b) Határozzuk meg a magasság mérőszámát!

Megoldás:
Jelölje r az alapkör sugarának, m pedig a magasságnak a mérőszámát! A tengelymetszet egy $2r$, illetve m oldalhosszúságú téglalap. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\frac{V}{A}=\frac{\pi r^2 m}{2\pi r\left(r+m\right)}=\frac{rm}{2\left(r+m\right)}=\frac{3}{4},$$

$$2rm=24 \Leftrightarrow rm=12.$$

Könnyen adódik, hogy

$$\frac{6}{r+m}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow r+m=8.$$

Mivel $m=8-r$, így

$$r\left(8-r\right)=12 \Leftrightarrow 0=r^2-8r+12,$$

melynek megoldásai:

$$r=2, \text{ illetve } r=6.$$

Két henger felel meg:

$$r_1=2, m_1=6, \text{ illetve } r_2=6, m_2=2.$$

11.3. A forgáskúp térfogata

Tétel
A forgáskúp térfogata $V=\dfrac{\pi r^2 m}{3}$, ahol r az alapkör sugara és m a kúp magassága.

11.3. ábra Forgáskúp

Bizonyítás:
Lényegében a hengernél látott gondolatmenet majdnem szó szerint vihető át. Annyit kell rajta változtatni, hogy belülre írt, illetve kívülre írt gúlákat kell mondani, továbbá a $\left\{\frac{t_1 m}{3},\frac{t_2 m}{3},\ldots\right\}$ és a $\left\{\frac{T_1 m}{3},\frac{T_1 m}{3},\ldots\right\}$ halmazokról beszélni.

Ferde körkúp esetére a forgáskúpra vonatkozó gondolatmenet szó szerint érvényes.

MatEm_Book.indb 244 2012.07.05. 12:09:36

11.4. A csonka kúp térfogata

A kúpok térfogatképletének birtokában meghatározhatjuk a csonka kúp térfogatát.

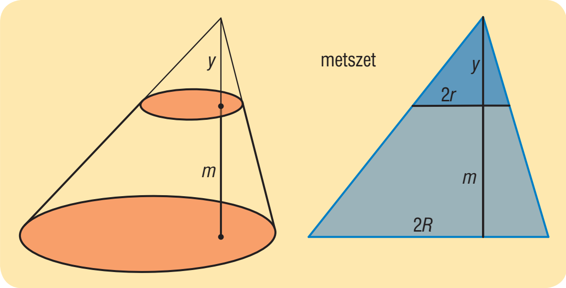
Tétel A csonka kúp térfogata $V=\frac{\pi m}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$, ahol m a magasság, R az alapkör, r pedig a fedőkör sugara.

Bizonyítás:
Készítsünk el egy olyan metszeti ábrát, melyet az alapkör és a fedőkör egy-egy, egymással párhuzamos átmérőjére illeszkedő sík vág ki a csonka kúpból!

A 11.4. ábrán látható hasonló háromszögek miatt:

$$\frac{y+m}{y}=\frac{2R}{2r}\Leftrightarrow 1+\frac{m}{y}=\frac{R}{r}\Leftrightarrow (R-r)y=mr.$$

A csonka kúp térfogata az eredeti és a levágott kúp térfogatának különbsége:



11.4. ábra Csonka kúp és síkmetszete

$$V=\frac{\pi}{3}R^2(m+y)-\frac{\pi}{3}r^2y=\frac{\pi}{3}\left[R^2m+(R+r)(R-r)y\right]=\frac{\pi m}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right).$$

Ez volt a tétel állítása.

2. példa Egy forgáskúp alakú toronytetőt olyan gerendák tartanak, amelyek a kúp alapkörén támaszkodnak, és a kúp csúcsában futnak össze. A gerendák az alaplappal 60°-os szöget zárnak be, a padlástér térfogata 49 m^3.
a) Mekkora a toronytető magassága?
b) Milyen hosszúak a gerendák?
c) Legalább hány m^2 lemez kell a tető lefedéséhez?

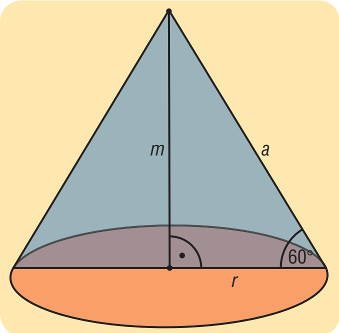
Megoldás:
Használjuk a 11.5. ábra jelöléseit!
a) Mivel az ábra alapján

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{m}{r} \Rightarrow m=\sqrt{3}r,$$

ezért

$$V=\frac{\pi r^2 m}{3}\Leftrightarrow 49=\frac{\pi r^2\cdot\sqrt{3}r}{3},$$

$$r\approx 3\text{ m}.$$



11.5. ábra A tető

MatEm_Book.indb 245 2012.07.05. 12:09:39

Innen a magasság:

$$m = r\sqrt{3} \approx 5,2 \text{ m}.$$

b) Az alkotók hossza lesz a gerendák hossza. A Pitagorasz-tételből:

$$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{3r^2 + r^2} = 2r = 6 \text{ m}.$$

c) A palástot kell lefedni:

$$P = \pi r a = 56,55 \text{ m}^2.$$

11.5. A gömb térfogata

A gömb térfogatára vonatkozó képlet igazolását (illetve a gömb részeivel kapcsolatos térfogatszámítási problémákat) az integrálszámítás alkalmazásaként megmutatjuk, így itt csak az eredményt közöljük:

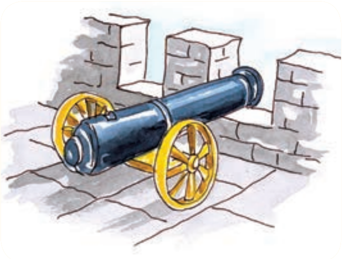
Tétel

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Sokszor láthatunk olyan „bizonyításokat”, melyek az ún. Cavalieri-elvre hivatkoznak. Ezt a bizonyítási módszert azért nem ismertetjük, mivel már pontos kimondása is meghaladja a követelményszintet, az igazolása pedig végképp nem tartozik a középiskolai matematika tárgykörébe. Márpedig nem szerencsés matematikából olyan eredményekre hivatkozni, amelyeket korrekt módon még megfogalmazni sem tudunk középiskolai szinten. Ebben a könyvben tehát e módszer egyetlen alkalmazásával sem találkozhatunk.

3. példa A középkori hadviselésben használtak olyan gömb alakú robbanó lövedéket, melynek belsejében gömb alakú üreget töltöttek meg puskaporral. Az egyik ilyen lövedék falának vastagsága mindenütt 2 cm, tömege (puskapor nélkül) 6,85 kg, anyagának sűrűsége pedig 7,5 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ volt.

Mekkora volt az üreg sugara? (Az eredményt egész cm-re kerekítve adjuk meg!)



11.6. ábra Középkori vár ágyúja

Megoldás:

Tegyük fel, hogy az üreg sugara cm-ben mérve r! A sűrűség a tömeg és a térfogat hányadosa, így a lövedék anyagának térfogata a tömegének és sűrűségének hányadosa: $\frac{6850}{7,5} \approx 913,3 \text{ cm}^3$. Ez kiszámítható a lövedék és az üreg térfogatának különbségeként:

$$\frac{4\pi (r+2)^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3} = 913,3.$$

Rendezés után:

$$(r+2)^3 - r^3 = 218,$$

$$r^3 + 6r^2 + 12r + 8 - r^3 - 218 = 0,$$

$$6r^2 + 12r - 210 = 0,$$

$$3r^2 + 6r - 105 = 0.$$

Ennek pozitív megoldása:

$$r = 5.$$

Az üreg sugara tehát kb. 5 cm volt.

Oldjuk meg!

1. Egy 1 cm^3 térfogatú higanycsepp 100 egyforma, kisebb cseppre esett szét.
a) Mekkora a kis cseppek sugara?
b) Hányszorosára növekedett a higany felszíne a szétesés miatt?

2. Egy henger tengelymetszetének területe 126 cm^2, térfogata 441π cm^3.
a) Határozzuk meg az alapkör sugarát!
b) Mekkora a henger felszíne?

3. Egy vulkán jó közelítéssel forgáskúp alakú, alapjának átmérője 8 km, magassága 3 km.
a) Milyen hosszú a csúcsra vezető legrövidebb út a hegyen?
b) Hány km^3 a hegy térfogata?
c) Mekkora a hegy palástjának területe?

11.7. ábra Vulkán

4. A jurta egy olyan sátor, amely egy forgáshenger alakú alsó részből és egy rá illeszkedő, forgáskúp alakú felső részből áll. Az oldalának magassága 2 méter, teljes magassága 3 méter, alapkörének sugara pedig 3 méter. (A jurta „padlója” a föld, amin áll.)
a) Készítsünk ábrát a jurtáról!
b) Hány m^3 a jurta térfogata? (Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg!)
c) Hány m^2 anyag kell a jurta elkészítéséhez? (Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg!)

5. Egy háromszög oldalainak hossza 6 cm, 25 cm és 29 cm. Megforgatjuk a háromszöget a leghosszabb oldal körül, illetve a hosszúság szerint középső oldal körül.
a) Határozzuk meg a keletkező forgástestek térfogatának arányát, és igazoljuk, hogy az arány racionális szám!
b) Számítsuk ki a testek térfogatát!

6. Egy csonka kúp formájú vödör alapkörének sugara 10 cm, fedőkörének sugara pedig 20 cm. A vödör alkotója 30 cm. Belefér-e a vödörbe 5 liter víz?

7. A 2π dm^2 felszínű egyenes körhengerek közül melyiknek a térfogata a legnagyobb? Mennyi a maximális térfogat?

11.8. ábra Vödör

12. Egymásba írt testek

Gyakran találkozhatunk testeknek olyan elrendezésével, amikor az egyik test tartalmazza a másikat. Most részletesebben megvizsgálunk ezek közül néhányat.

1. példa Egy tetraéder határoló lapjai olyan egybevágó háromszögek, melyeknek oldalai rendre 13 cm, 14 cm és 15 cm hosszúak. Határozzuk meg a tetraéder beírt gömbjének sugarát!

Megoldás:
A poliéderek térfogatának tárgyalásánál szereplő 1. példa alapján a beírt gömb sugarának meghatározását visszavezethetjük a tetraéder felszínének és térfogatának meghatározására, hiszen

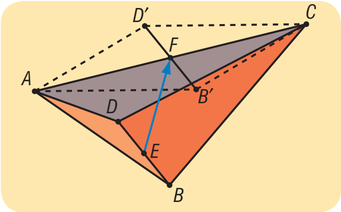
$$V = \frac{Ar}{3} \Leftrightarrow r = \frac{3V}{A}.$$

Egy lap területét a Heron-formula segítségével számíthatjuk ki. A kerület fele 21 cm, ezért

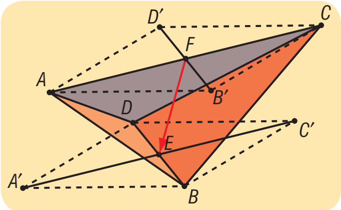
$$T = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \Rightarrow A = 4T = 336\ \text{cm}^2.$$

A térfogat meghatározása nem könnyű feladat. Ehhez először a tetraéderrel kapcsolatosan egy új fogalmat vezetünk be, melynek a neve: **bennfoglaló paralelepipedon**. Tekintsük az $ABCD$ tetraéder BD és AC kitérő éleinek E, illetve F felezőpontjai által meghatározott $\overrightarrow{EF}$ vektort! Toljuk el vele a BD élt, ekkor kapjuk az $AB'CD'$ paralelogrammát (12.1. ábra). (AC és $B'D'$ felezik egymást.) Tekintsük most az AC élnek az $\overrightarrow{FE}$ vektor által megadott eltoláskor keletkező képét, ekkor kapjuk az $A'BC'D$ paralelogrammát (12.2. ábra). Az elmondottakból következik, hogy az $A'BC'DAB'CD'$ test paralelepipedon. Belátható az is, hogy az $ABCD$ tetraéder bármelyik két szemközti (kitérő) éle ugyanezt a paralelepipedont határozza meg. A test tehát a tetraéder megadásával egyértelműen meg van határozva, és ez a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonja (12.3. ábra). Könnyű látni, hogy megfordítva: bármely paralelepipedonhoz rendelhető tetraéder, melynek ő a bennfoglaló paralelepipedonja.

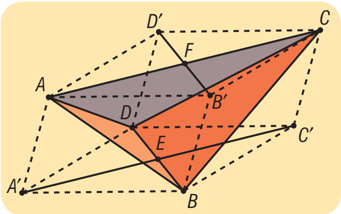
A feladatban szereplő tetraéder lapjai egybevágó, nem egyenlő szárú háromszögek. Az ábrára nézve ebből az adódik, hogy a bennfoglaló paralelepipedon szemközti lapjai olyan egybevágó paralelogrammák, melyeknek átlói egyenlők. Ez viszont azt jelenti, hogy a határoló lapjai téglalapok, vagyis a bennfoglaló paralelepipedon téglatest (12.4. ábra)! A tetraéder térfogatát ezért kiszámíthatjuk oly módon, hogy a téglatest térfogatából levonjuk annak a 4 derékszögű tetraédernek a térfogatát, amely



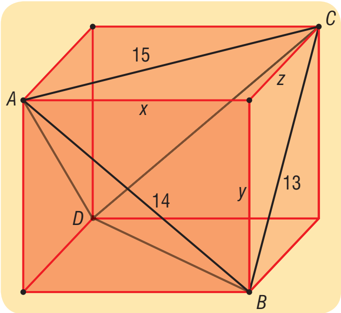
12.1. ábra Eltolás 1.



12.2. ábra Eltolás 2.



12.3. ábra Bennfoglaló paralelepipedon



12.4. ábra A bennfoglaló paralelepipedon most téglatest a téglatest tetraéderrel nem közös csúcsainál keletkezik. Ha a téglatest egy csúcsból induló éleinek hossza *x*, *y* és *z*, akkor a Pitagorasz-tétel miatt:

$$x^2 + y^2 = 14^2 = 196,$$
$$y^2 + z^2 = 13^2 = 169,$$
$$z^2 + x^2 = 15^2 = 225.$$

Összeadva:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 295,$$

ezért

$$x^2 = 126 \Leftrightarrow x = \sqrt{126},$$
$$y^2 = 70 \Leftrightarrow y = \sqrt{70},$$
$$z^2 = 99 \Leftrightarrow z = \sqrt{99}.$$

Mivel a derékszögű tetraéderek mindegyikének térfogata könnyen látható módon $\frac{xyz}{6}$, így az *ABCD* tetraéder térfogata:

$$V = xyz - 4 \cdot \frac{xyz}{6} = \frac{xyz}{3} \approx 311,48\ \text{cm}^3.$$

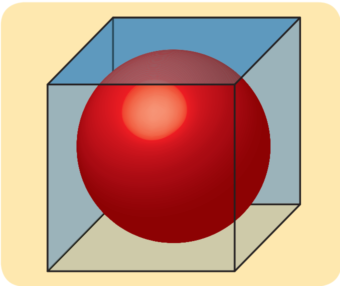
A beírt gömb sugara:

$$r = \frac{3 \cdot 311,48}{336} \approx 2,78\ \text{cm}^2.$$

12.1. A beírt gömb

Egy poliéder beírt gömbjén azt a gömböt értjük, amely a poliéder minden határoló sokszöglapját érinti. Korábban láttuk, hogy minden tetraédernek van beírt gömbje, de ez általánosan nem igaz: a poliéderek nem mindegyikének van beírt gömbje. Azt is igazoltuk, hogy a beírt gömb létezése esetén a sugarának kiszámítása a felszín és a térfogat kiszámítására vezethető vissza.

A forgáskúpoknak mindig létezik beírt gömbje. Gondoljuk meg, hogy ha tekintünk egy egyenlő szárú háromszöget a beírt körével, majd a szimmetriatengelye körül megforgatjuk, akkor megkapjuk a kúpot a beírt gömbbel.

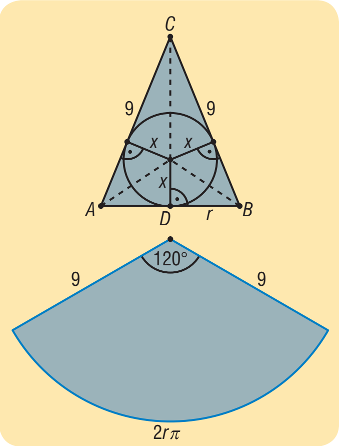


12.5. ábra Beírt gömb

2. példa Egy forgáskúp kiterített palástja egy 9 cm sugarú, 120°-os középponti szögű körcikk. Határozzuk meg a beírt gömb sugarát!

Megoldás:
Jelölje *x* a beírt gömb sugarát, *r* pedig a kúp alapkörének sugarát. Tekintsük a kúp tengelyére illeszkedő sík segítségével kapott ún. tengelymetszeti ábrát, illetve a síkba terített palástot.
Mivel a 120°-os középponti szöghöz tartozó körív a kör kerületének harmada, ezért

$$2r\pi = \frac{2 \cdot 9\pi}{3} \Leftrightarrow r = 3\ \text{cm}.$$



12.6. ábra A forgáskúp tengelymetszete és kiterített palástja

A Pitagorasz-tétel miatt:

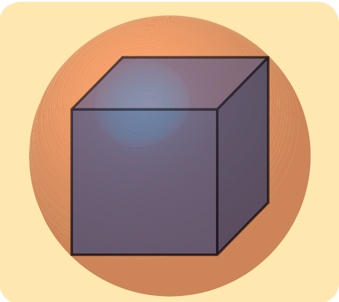
$$CD = \sqrt{9^2 - r^2} = \sqrt{72} \approx 8,49 \text{ cm.}$$

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy a háromszög területe kiszámítható a beírt kör sugarának segítségével is, így az *ABC* háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{6 \cdot 8,49}{2} = x \cdot \frac{9+9+6}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \cdot 8,49}{24} \approx 2,12 \text{ cm.}$$

(Természetesen *x* értéke hasonló háromszögek vagy trigonometriai számítások segítségével is meghatározható.)

12.2. A köré írt gömb

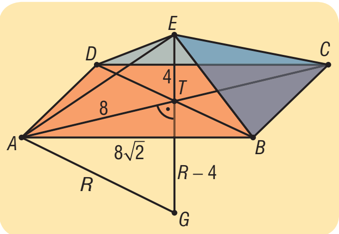


12.7. ábra Köré írt gömb

Egy poliéder köré írt gömbjén azt a gömböt értjük, amely a poliéder minden csúcsán áthalad. Láttuk, hogy minden tetraédernek, téglatestnek van köré írt gömbje. Általában persze nem feltétlenül létezik egy poliéderhez köré írt gömb. Arra is érdemes figyelni, hogy a köré írt gömb középpontja (ha létezik) nem feltétlenül a testen belül helyezkedik el.

A forgáskúp köré mindig írható gömb. Gondoljuk meg, hogy ha tekintünk egy egyenlő szárú háromszöget a köré írt körével, majd a szimmetriatengelye körül megforgatjuk, akkor megkapjuk a kúpot a köré írt gömbbel. Ugyancsak egyszerű meggondolni, hogy a forgáshengerek köré is mindig írható gömb.

3. példa Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle $8\sqrt{2}$ egység, magassága pedig 4 egység. Mekkora a köré írt gömb sugara?



12.8. ábra A számolás szemléltetése

Megoldás:

Az adatokból megsejthető, hogy a köré írt gömb középpontja kívül van a testen, valamint szimmetriai okokból a gúla csúcsát az alaplap középpontjával összekötő egyenesre illeszkedik. Legyen *R* a köré írt gömb sugara és *G* a gömb középpontja. A 12.8. ábra jelölései mellett, mivel *AT* a négyzet átlójának fele,

$$AT = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 8.$$

A Pitagorasz-tételt felírva az *AGT* derékszögű háromszögre:

$$R^2 = 8^2 + (R-4)^2,$$

$$R^2 = R^2 - 8R + 80,$$

$$R = 10.$$

12.3. Összetett feladatok

A térgeometria fejezet zárásaként most olyan feladatok következnek, amelyek összetettek, megoldásukhoz szinte minden, a témakörben ismertetett fogalomra és összefüggésre szükség van. Érdemes figyelni arra, hogy ha a test rendelkezik forgásszimmetriával, akkor a tengelyre illeszkedő síkkal vett metszete, az ún. tengelymetszet síkgeometriai összefüggések felhasználását teszi lehetővé. (Ez különösen akkor előnyös, ha a térlátásunk nem túl jó.)

4. példda Egy derékszögű tetraéder egy csúcsban összefutó, egymásra páronként merőleges éleinek hossza: 70 cm, 30 cm és 40 cm. Határozzuk meg a test

a) térfogatát;

b) felszínét;

c) legrövidebb magasságának hosszát;

d) beírt gömbjének sugarát;

e) a köré írt gömb sugarát!

Megoldás:

Használjuk a 12.9. ábra jelöléseit. A tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T_{ABD} \cdot DC}{3} = \frac{\frac{30 \cdot 40}{2} \cdot 70}{3} = 14000\ \text{cm}^3.$$

A Pitagorasz-tételt alkalmazva:

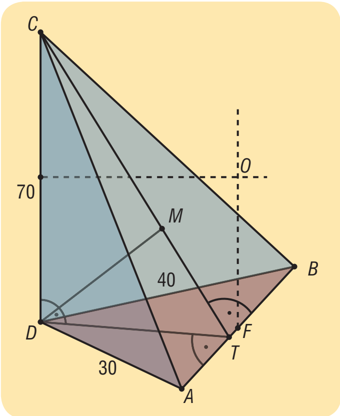
$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 50\ \text{cm}.$$

Az *ABD* háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy

$$\frac{50 \cdot DT}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} \Leftrightarrow DT = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24\ \text{cm}.$$

A *CDT* derékszögű háromszögből:

$$CT = \sqrt{CD^2 + DT^2} = \sqrt{70^2 + 24^2} = 74\ \text{cm}.$$



12.9. ábra A derékszögű tetraéder

A tetraéder felszíne:

$$A = \frac{30 \cdot 40}{2} + \frac{30 \cdot 70}{2} + \frac{40 \cdot 70}{2} + \frac{50 \cdot 74}{2} = 4900\ \text{cm}^2.$$

A térfogatra vonatkozó képletből következik, hogy a legnagyobb területű határoló laphoz tartozik a legrövidebb magasság. A legnagyobb területű határoló lap az *ABC* lap. A hozzá tartozó *MD* magasságra:

$$V=\frac{T_{ABC}\cdot MD}{3}\Leftrightarrow MD=\frac{3V}{T_{ABC}}=\frac{3\cdot 14000}{1850}\approx 22,7\text{ cm.}$$

(A térelemek hajlásszögénél szereplő 3. példa megoldása során igazoltuk, hogy az M pont, amely a D csúcs merőleges vetülete az ABC lapon, illeszkedik a CT magasságra.)
A beírt gömb sugara könnyen adódik a térfogat és felszín értékének ismeretében:

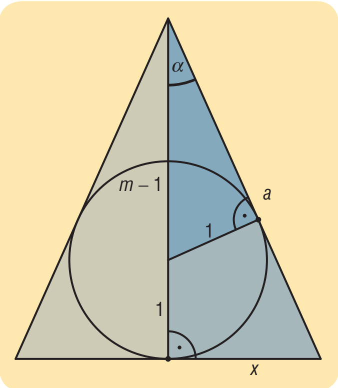
$$V=\frac{Ar}{3}\Leftrightarrow r=\frac{3V}{A},$$

$$r\approx 8,57\text{ cm.}$$

Az ADB háromszög köré írt kör középpontja a Thalész-tétel megfordítása miatt az AB él F felezési pontja. A tetraéder köré írt gömb O középpontja a CD él felezőmerőleges síkjának az ADB lapra F-ben állított merőlegessel vett metszéspontja lesz. Sugarát a Pitagorasz-tétel segítségével számolhatjuk ki:

$$R=\sqrt{25^2+35^2}\approx 43\text{ cm.}$$

5. példa Egységnyi sugarú gömb köré forgáskúpot írunk.
a) Mekkora annak a kúpnak a nyílásszöge, amelyiknek a felszíne a legkisebb?
b) Mekkora annak a kúpnak a nyílásszöge, amelyiknek a térfogata a legkisebb?



12.10. ábra A tengelymetszet

Megoldás:
A 12.10. tengelymetszeti ábrán m a kúp magassága, x az alapkör sugara, a a kúp alkotója és α a nyílásszög fele. Az ábrán lévő hasonló háromszögek miatt:

$$\sin\alpha=\frac{x}{a}=\frac{1}{m-1}\Rightarrow x(m-1)=a.$$

A forgáskúp felszín- és térfogatképletének felhasználásával:

$$\frac{3V}{A}=\frac{\pi x^2 m}{\pi x(a+x)}=\frac{xm}{a+x}=\frac{\frac{x}{a}\cdot m}{1+\frac{x}{a}}=\frac{\frac{m}{m-1}}{1+\frac{1}{m-1}}=1.$$

Ebből következik, hogy a felszín és a térfogat ugyanarra a kúpra lesz minimális, így csak a térfogatra végzünk számításokat.

Pitagorasz tételét alkalmazva:

$$a^2=x^2+m^2,$$

$$x^2(m-1)^2=x^2+m^2,$$

$$x^2\left[(m-1)^2-1\right]=m^2,$$

$$x^2=\frac{m}{m-2}.$$

Behelyettesítve a térfogatképletbe:

$$\frac{\pi}{3}x^2m=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{m^2}{m-2}.$$

Mivel

$$\frac{m^2}{m-2}=\frac{(m-2)\cdot(m+2)+4}{m-2}=4+m-2+\frac{4}{m-2}\geq 4+2\cdot\sqrt{(m-2)\frac{4}{m-2}}=8,$$

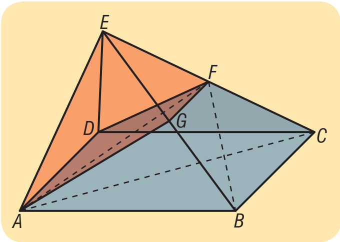
a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt a térfogat pontosan akkor lesz minimális, ha $m-2=2 \Leftrightarrow m=4$. Ekkor lesz a fentiek szerint a felszín is minimális, a nyílásszögre pedig:

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow 2\alpha\approx 38{,}94°.$$

6. példa Tekintsük az *ABCDE* gúlát, melynek alapja az *ABCD* paralelogramma. Milyen térfogatarányban osztja két részre a gúlát az a sík, amely illeszkedik az *A* és *D* csúcsra, valamint az *EC* oldalél *F* felezőpontjára?

Megoldás:

Legyen *G* az *EB* él felezőpontja. Az *EB* élt *G* pontban metszi a sík, mivel $FG \parallel BC \parallel AD$, így az *A*, *D*, *F* és *G* pontok azonos síkban vannak. Jelölje *V* az *ABCDE* gúla térfogatát. Meghatározzuk az *ABCDFG* test térfogatát. Az *F* pont feleakkora távolságra van az alapsíktól, mint az *E*, míg az *ACD* háromszög területe az *ABCD* paralelogramma területének fele, így az *ACDF* tetraéder térfogata



12.11. ábra Síkkal kettéosztott gúla

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V=\frac{1}{4}V,$$

és ugyanennyi az *ABCF* tetraéder térfogata is. Mivel *AG* az *ABE* háromszögben súlyvonal, így az *ABGF* tetraéder térfogata egyenlő az *ABEF* tetraéder térfogatának felével. Az *ABEF* tetraéder térfogata egyenlő az *ABCF* tetraéder térfogatával, hiszen mindkettő az *ABEC* tetraéder térfogatának fele. Tehát az *ABGF* tetraéder térfogata $\frac{1}{8}V$, így

$$V_{ABCDFG}=\frac{1}{4}V+\frac{1}{4}V+\frac{1}{8}V=\frac{5}{8}V,$$

ahonnan adódik, hogy a keresett térfogatarány 3:5.

7. példa Legyen az *ABCD* szabályos tetraéder köré írt gömb sugara *r*. Igazoljuk, hogy ha *P* tetszőleges belső pont, akkor

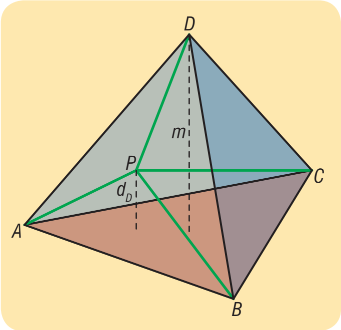
$$PA+PB+PC+PD\geq 4r!$$

Megoldás:

Jelölje d_D *P*-nek a *D*-vel szemközti laptól vett távolságát. Hasonlóan értelmezzük a d_A, d_B és d_C mennyiségeket. A *PABC*, *PBCD*, *PCDA* és *PABD* tetraéderek térfogatának összege egyenlő az *ABCD* tetraéder térfogatával. Ezért, ha *m* a szabályos tetraéder magassága, *T* pedig a lapok területe, akkor

$$\frac{d_A\cdot T}{3}+\frac{d_B\cdot T}{3}+\frac{d_C\cdot T}{3}+\frac{d_D\cdot T}{3}=\frac{m\cdot T}{3},$$

$$d_A+d_B+d_C+d_D=m.$$



12.12. ábra A szabályos tetraéder

Mivel a szabályos tetraéder magasságai egyben súlyvonalak, továbbá a köré írt gömb középpontja egyben a súlypont, így $m = \frac{4}{3}r$, hiszen egy tetraéder súlyvonalai $3:1$ arányban osztják egymást. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy pl.

$$PD + d_D \geq m,$$

ezért

$$PA + PB + PC + PD + d_A + d_B + d_C + d_D \geq 4m,$$

ahonnan

$$PA + PB + PC + PD \geq 3m = 4r,$$

amit éppen igazolni kellett. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha P a szabályos tetraéder középpontja.

Oldjuk meg!

12.13. ábra Fagylaltok

1. Egy forgáskúp formájú fagylaltostölcsér alkotója 13 cm, alapkörének átmérője 10 cm.
a) Mekkora a kúp nyílásszöge?
b) Mekkora a tölcsér űrtartalma?
c) Mekkora a kúppalást területe?

2. Egy szabályos négyoldalú gúla alapélének hossza 10 cm, magassága pedig 12 cm.
a) Mekkora a felszíne?
b) Mekkora a térfogata?
c) Mekkora a gúla lapjait érintő gömb sugara?

3. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 12 cm, oldaléleinek hossza 13 cm.
a) Mekkora a gúla térfogata?
b) Mekkora a beírt gömb sugara?
c) Mekkora a köré írt gömb sugara?

4. Egy forgáskúp alapkörének sugara 5 cm, magassága pedig 12 cm.
a) Mekkora a beírt gömb sugara?
b) Mekkora a köré írt gömb sugara?

5. Tekintsük az egységsugarú gömbbe írt téglatesteket!
a) Melyiknek a térfogata lesz maximális?
b) Melyiknek a felszíne lesz maximális?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 710-713., valamint 696., 705. és 714. feladatok

VIII. fejezet

Analízis

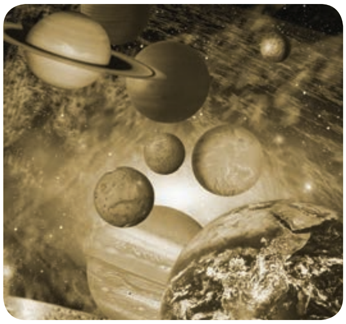
$$\lim_{n \to \infty}$$

Integráltan vagy differenciáltan?

1. Analízis

1.1. Bevezetés

1.1. ábra Arkhimédész (Kr. e. 287–212)



1.2. ábra A Naprendszer

1.3. ábra Isaac Newton (1643–1727)

A matematikai analízis központi szerepet játszik az összes természettudományban. Mai formájának kialakulása a matematikán belül nagyon hosszú időszakot ölel fel, így bevezetésül tanulságos lesz áttekinteni vázlatosan a történetét.

Már az ókorban felvetődtek olyan kérdések, amelyek pontos megválaszolása a matematikai analízis tárgykörébe tartozik. Néhány közülük:

- Mekkora a kör kerülete, illetve területe?
- Mekkora a parabola egy húrja által levágott szelet területe?
- Mekkora a gömb térfogata?
- Mekkora egy görbe vonal hossza?

Érdemes megemlítenünk két ókori görög matematikust, akiknek a munkássága alapvetőnek bizonyult. **Eudoxosz** volt az, aki felfedezte, hogy egy keresett mennyiséget meghatározhatunk tetszőleges pontossággal való közelítések segítségével (az ún. „kimerítés” módszerének leírása). **Arkhimédész** használta először a kétoldali közelítés módszerét, melynek alkalmazása során a vizsgált alakzatot belülről és kívülről is közelítette. Módszerének segítségével meghatározta pl. a parabolaszelet területét, illetve a gömb térfogatát. Arkhimédész volt az ókor legnagyobb matematikusa, munkásságának ezekben a kérdésekben csak a XVII. században lett érdemi folytatása. Ennek okai lehettek, hogy hiányzott a geometriától független szemléletmód, illetve nem volt megfelelő jelölésrendszer, ami a levezetések leírását roppant körülményessé tette.

A fizikában az 1600-as évek központi problémája a testek mozgásának leírása és a mozgás okainak tisztázása volt. Néhány jellegzetes kérdés:

- Hogyan írható le a szabadon eső test mozgása?
- Hogyan írható le az elhajított test pályája?
- Hogyan magyarázható az égitestek mozgása?

A válaszokhoz megfelelő matematikai módszert kellett kidolgozni, amely képes megadni egy mennyiség változásának matematikai leírását. Ezt lényegében egyszerre, egymástól függetlenül **Newton** és **Leibniz** végezte el. Módszerük segítségével nemcsak a mozgás leírása vált lehetővé, hanem további kérdésekre is válasz kaphattak. Például:

- Mit értsünk egy görbe egy adott pontján átmenő érintőjén?
- Hogyan számolható ki egy síkidom területe?
- Hogyan oldjunk meg szélsőérték-problémákat?

1.4. ábra Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

A Newton, illetve Leibniz által kidolgozott eljárás azonban számos problémát hordozott. Például ún. „végtelenül kicsiny” mennyiségekkel számoltak, amelyeket aztán a számítások során adott helyeken elhanyagoltak, míg más helyeken osztottak velük. Óriási feszültséget okozott, hogy a módszer ontotta a fizika, illetve a matematika által felvetett kérdésekre a válaszokat, ugyanakkor az alkalmazása során tett lépések nem voltak kellően megalapozottak. Hiányzott belőlük az a precizitás, amely pl. az ókori görög geometriai bizonyításokat jellemezte. Mintegy két évszázad telt el, amíg a matematikusok megalkották azokat a fogalmakat és módszereket, amelyek segítségével az analízis felépítése tisztává vált. Ennek a folyamatnak részeként alakult ki a függvény, és a valós szám fogalma is.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy a továbbiakban az analízisnek nem a XVII-XVIII. században használt formáját ismerjük meg, hanem azt, amely a XIX. század végére vált általánosan elfogadottá.

A középiskolában látott matematikai ismeretek közül a legmélyebbek ebben a fejezetben kerülnek elő, így elengedhetetlen a definíciók pontos megtanulása, a kidolgozott példák gondos tanulmányozása és a kitűzött feladatok megoldása!

1.2. A valós szám fogalma és két nevezetes axióma

Ahhoz, hogy a bevezetőben említett problémák közül pl. arra válaszoljunk, hogy mekkora egy adott sugarú körlap területe, szükség van a valós szám fogalmának tisztázására, hiszen a terület nagyságát egy mérőszám adja meg. Eddigi tanulmányaink során egyszerűen azt mondtuk, hogy a valós számok a tizedes törtek, amelyek a számegyenes pontjainak felelnek meg. Itt azonnal felmerül az a probléma, hogy egyértelmű-e a tizedes tört alak, tehát pl. a $0,\dot{9}$ és az $1,\dot{0}$ tizedes törtek ugyanazt a valós számot jelölik-e? További kérdés, hogy pl. miként adjunk össze két valós számot, amelyek végtelen tizedes tört alakban vannak felírva? Látható, hogy a kérdések nem egyszerűek. A valós szám fogalmának megalapozására az euklideszi geometriában már korábban megismert rendszerhez hasonlót dolgoztak ki. Ennek az ún. **axiomatikus módszer**nek a pontos ismertetése meghaladja a középiskolai szintet. Bebizonyítható, hogy minden valós számnak van végtelen tizedes tört alakja, és az is, hogy a számegyenes pontjai valóban azonosíthatók a valós számokkal. Alapvetőnek bizonyult az ún. **arkhimédészi axióma**:

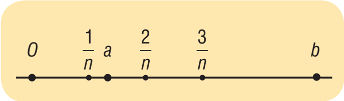
Axióma Tetszőleges *a* pozitív számhoz található az *a*-nál nagyobb *n* természetes szám.

1. példa Igazoljuk, hogy ha a és b tetszőleges pozitív számok, akkor létezik olyan n természetes szám, amelyre teljesül, hogy $n \cdot b > a$!

Megoldás:

Alkalmazzuk az arkhimédészi axiómát úgy, hogy a helyére $\frac{a}{b}$ -t írunk!

2. példa Igazoljuk, hogy ha $0 \le a < b$ valós számok, akkor a és b között van racionális szám!



1.5. ábra Van közöttük racionális szám

Megoldás:

Az arkhimédészi axiómát $\frac{1}{b-a}$-ra alkalmazva adódik, hogy van olyan n pozitív egész, amelyre $\frac{1}{n} < b - a$. Jelöljük meg a számegyenesen a 0-tól indulva az $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$ számokat! Ekkor lesz olyan k pozitív egész, hogy

$$a < \frac{k}{n} < b.$$

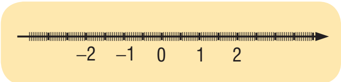
Könnyű látni, hogy a példában szereplő állítás bármely két valós számra érvényes.

3. példa Igazoljuk, hogy ha $a < b$ valós számok, akkor a és b között van irracionális szám!

Megoldás:

Ismeretes, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám. Mivel $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, és a 2. példa alapján van köztük egy r racionális szám, ezért $a < r + \sqrt{2} < b$, ahol $r + \sqrt{2}$ irracionális szám.

A 2. és a 3. példa alapján kimondhatjuk:



1.6. ábra A számegyenes mindenütt sűrű

1. tétel Bármely két valós szám között van racionális és irracionális szám is.

(Ezt úgy is szokták mondani, hogy a racionális, illetve az irracionális számok halmaza **mindenütt sűrű** a valós számok halmazában.)

Most az ún. **korlátos számhalmaz**okkal foglalkozunk. (Szám alatt mindig valós számot értünk ebben a könyvben.)

Definíció A H számhalmaz felülről korlátos, ha van olyan K szám, hogy a H halmaz minden x elemére $x \le K$ teljesül. A K számot a halmaz felső korlátjának nevezzük.

(Nyilvánvaló, hogy ha H felülről korlátos, akkor végtelen sok felső korlátja van.)

Definíció A H számhalmaz alulról korlátos, ha van olyan k szám, hogy a H halmaz minden x elemére $x \ge k$ teljesül. A k számot a halmaz alsó korlátjának nevezzük.

(Nyilvánvaló, hogy ha H alulról korlátos, akkor végtelen sok alsó korlátja van.)

Definíció A H számhalmaz korlátos, ha felülről és alulról is korlátos.

4. példa Állapítsuk meg, hogy az alábbi számhalmazok közül melyek azok, amelyek alulról, illetve felülről korlátosak!

a) $A = \left\{ \frac{1}{n} :\ n = 1, 2, 3... \right\}$,

b) $B = \left\{ \frac{p}{q} :\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z}^{+} \right\}$,

c) $C = \left\{ \left| a - b\sqrt{2} \right| :\ a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N} \right\}$.

Megoldás:

a) Az A halmaz felülről korlátos, hiszen az 1 felső korlát. Alulról is korlátos, hiszen a halmaz elemei pozitív számok, így a 0 alsó korlát.

b) A B halmaz felülről nem korlátos, hiszen elemei között szerepel az összes természetes szám. Alulról korlátos, hiszen elemei nemnegatív számok, így a 0 alsó korlát.

c) A C halmaz felülről nem korlátos, hiszen tartalmazza az összes természetes számot $(b = 0)$. Alulról korlátos, mivel elemei nemnegatív számok.

Alapvető szerepet játszik majd a későbbiekben a korlátos számhalmazokra vonatkozó ún. **teljességi axióma**:

Axióma Minden felülről korlátos és nemüres számhalmaznak van legkisebb felső korlátja.

Egyszerűen igazolható ennek az a következménye, mely szerint alulról korlátos és nemüres számhalmaznak van legnagyobb alsó korlátja.

Definíció Egy felülről korlátos és nemüres H számhalmaz legkisebb felső korlátját a halmaz felső határának, idegen szóval szuprémumának nevezzük. Jelölése: $\sup H$.

Definíció Egy alulról korlátos és nemüres H számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a halmaz alsó határának, idegen szóval infimumának nevezzük. Jelölése: $\inf H$.

5. példa

Határozzuk meg, hogy mennyi a $H = \left\{ \frac{n-2}{n} : n = 1, 2, \ldots \right\}$ számhalmazhoz tartozó $\sup H$, illetve $\inf H$ értéke!

Megoldás:

Mivel $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$, ezért $\inf H = -1$, mivel $\frac{2}{n}$ pozitív és legnagyobb értéke 2. Állítjuk, hogy $\sup H = 1$. Nyilvánvaló, hogy az 1 felső korlát. Tegyük fel indirekt módon, hogy nem az 1 a legkisebb felső korlát, hanem valamely $a < 1$ pozitív szám. Ekkor minden pozitív egész n-re

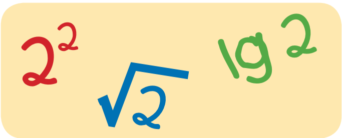
$$1 - \frac{2}{n} \le a \Leftrightarrow n \le \frac{2}{1-a},$$

ami ellentmond az arkhimédészi axiómának! Indirekt feltevésünk megdőlt, ami bizonyítja állításunk helyességét.

Fontos megjegyezni, hogy egy felülről korlátos számhalmazra a teljességi axióma csak a felső határ létezését biztosítja, annak értékének meghatározása konkrét halmaz esetén általában nem könnyű feladat!

Most az eddig elmondottak egyik alkalmazásaként a hatványozás valós kitevőre való kiterjesztését vizsgáljuk meg.

1.3. A valós kitevős hatványozás



1.7. ábra Hatvány, gyök, logaritmus

A Hatvány, gyök, logaritmus című fejezetben szó esett arról, hogyan értelmezzük az a^x kifejezést, ahol a adott pozitív szám és x valamely racionális szám. Szó volt arról is, hogy a hatványozás azonosságai érvényben maradnak az ott szereplő definíció mellett. Az alábbi tétel a definíció egy nagyon fontos következményét tartalmazza.

2. tétel Ha $a>1$ és $r_1<r_2$ racionális számok, akkor $a^{r_1}<a^{r_2}$. Ha pedig $0<a<1$ és $r_1<r_2$ racionális számok, akkor $a^{r_1}>a^{r_2}$.

Bizonyítás:

Tudjuk, ha $a>1$ és p, q pozitív egészek, akkor $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}>1$, tehát minden r pozitív racionális számra $a^r>1$. Így akkor $r_1<r_2$ esetén $a^{r_2}=a^{r_1}a^{r_2-r_1}>a^{r_1}$, amint azt állítottuk.

A tétel második részének bizonyítását az olvasóra bízzuk.

Az irracionális kitevős hatvány értelmezésekor a fenti tételben szereplő monotonitási tulajdonságot szeretnénk érvényben tartani (permanenciaelv). Legyen $a>1$. Ha azt szeretnénk, hogy tetszőleges x, y valós számokra $x<y$ esetén $a^x<a^y$ teljesüljön, akkor az a^x-nek ki kell elégítenie az $a^r<a^x<a^s$ egyenlőtlenséget, amennyiben r és s olyan racionális számok, melyekre $r<x<s$. Igazolható, hogy ez egyértelműen meghatározza a^x-t. Ez az alábbi tételen múlik:

3. tétel Ha $a>1$, akkor tetszőleges x valós számra

$$\sup\left\{a^r:\ r\in\mathbb{Q}, r<x\right\}=\inf\left\{a^s:\ s\in\mathbb{Q}, x<s\right\}.$$

Ha $0<a<1$, akkor tetszőleges x valós számra

$$\inf\left\{a^r:\ r\in\mathbb{Q}, r<x\right\}=\sup\left\{a^s:\ s\in\mathbb{Q}, x<s\right\}.$$

A tétel bizonyítását annak nehézsége miatt nem részletezzük. A bizonyításban a teljességi axiómát kell felhasználni. Következzék a hatványozás általános definíciója!

Definíció Ha $a>1$ adott valós szám, akkor tetszőleges x valós számra a^x legyen a $\sup\left\{a^r:\ r\in\mathbb{Q},\ r<x\right\}=\inf\left\{a^s:\ s\in\mathbb{Q},\ x<s\right\}$ szám. Ha $0<a<1$ adott valós szám, akkor tetszőleges x valós számra a^x legyen az $\inf\left\{a^r:\ r\in\mathbb{Q},\ r<x\right\}=\sup\left\{a^s:\ s\in\mathbb{Q},\ x<s\right\}$ szám. Az 1^x legyen minden x-re 1.

Figyeljük meg, hogy ez a definíció racionális x szám esetén megegyezik a korábban adott definícióval!

4. tétel Ha $a>0$ és x tetszőleges valós szám, akkor $a^x>0$.

Bizonyítás:

Ha $a>1$, akkor tetszőleges x-hez választható olyan r racionális szám, hogy $r<x$. Ekkor a fenti definíció miatt $0<a^r\le a^x$. Hasonlóan adódik az állítás $0<a<1$ esetén. Ha $a=1$, akkor az állítás triviális.

A definícióból következik a monotonitási tulajdonság teljesülése tetszőleges kitevőre, melyet a következő állítás fejez ki.

5. tétel Ha $x_1 < x_2$, akkor $a > 1$ esetén $a^{x_1} < a^{x_2}$; ha pedig $0 < a < 1$, akkor $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy $a > 1$. Legyenek r és s olyan racionális számok, amelyekre $x_1 < r < s < x_2$. (Ilyenek biztosan léteznek az 1. tétel miatt.) Ekkor a definícióból: $a^{x_1} \le a^r < a^s \le a^{x_2}$. Ha $0 < a < 1$, akkor a bizonyítás hasonlóan végezhető.

Be lehet bizonyítani azt is, hogy ha az alap pozitív, akkor a hatványozás azonosságai érvényesek lesznek minden valós kitevő esetén is.

Oldjuk meg!

1. A teljességi axiómát felhasználva igazoljuk, hogy alulról korlátos és nemüres számhalmaznak van legnagyobb alsó korlátja!

2. Igazoljuk, hogy ha a és b pozitív egészek, akkor $\left|a - b\sqrt{2}\right| > \dfrac{1}{2(a+b)}$!

3. a) Bizonyítsuk be, hogy ha a és b racionális számok, akkor $a+b$ és ab is racionális számok!
b) Igaz-e, hogy ha $a+b$ és ab is racionális számok, akkor a és b is racionális számok?

4. Legyen $H = \left\{a + b\sqrt{2} : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Eleme-e a H számhalmaznak a $\sqrt[3]{2}$?

5. Legyen $A = \left\{\dfrac{3n+2}{n+1} : n = 1, 2, \ldots\right\}$. Határozzuk meg, hogy mennyi az A számhalmazhoz tartozó sup A, illetve inf A értéke!

6. Legyen $B = \left\{\sqrt{n+3} - \sqrt{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$. Határozzuk meg, hogy mennyi a B számhalmazhoz tartozó sup B, illetve inf B értéke!

2. A számsorozatok

2.1. A számsorozat fogalma

A sorozat a mindennapi életben is gyakran használt szó, gondoljunk csak pl. a filmsorozat, győzelmi sorozat, sorozatlövés kifejezésekre. Mindegyik adott dolgok egymás után következését fejezi ki. A matematikában a **számsorozat** fogalma tehát minden bizonnyal számok egymásutániságát jelenti. Precízen:

Definíció Számsorozatnak nevezzük a pozitív egész számok halmazán értelmezett valós értékű függvényeket.
A függvény által az n pozitív egészhez rendelt valós szám a sorozat n-edik **tag**ja. Az n-et az adott tag **index**ének nevezzük.
Azt mondjuk, hogy egy sorozat **konstans sorozat**, ha minden tagja ugyanaz a valós szám.

2.1. ábra Képsorozat

Gyakran előfordul, hogy a nemnegatív egész számok halmazán értelmezett valós értékű függvényeket is számsorozatnak mondjuk. A továbbiakban a számsorozat kifejezés helyett gyakran csak a sorozat szót fogjuk használni. Két sorozatot akkor tekintünk azonosnak, ha n-edik tagjaik minden n-re megegyeznek.

Sokszor lehet találkozni a sorozat tagja elnevezés mellett a sorozat eleme kifejezéssel. Ezt mi nem fogjuk használni, mivel félreértésekre vezethet. Gondoljunk arra, hogy a sorozat tagjainak halmazát tekintve e halmaz elemei nem egyeznek meg feltétlenül a sorozat tagjaival, hiszen egy sorozat tagjai között valamely valós szám többször is előfordulhat, míg egy halmaz elemei között csak egyszer.

Jelölések:
Ebben a könyvben egy $a:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ függvény által meghatározott számsorozatot általában (a_n)-nel fogunk jelölni. Használják még pl. az $\left(a_i\right)_{i=1}^{\infty}$ jelölést is. Az is előfordul, hogy a számsorozatot egyszerűen a_n-nel jelöljük. (Ilyenkor ügyelnünk kell arra, hogy ne tévesszük össze a sorozatot a sorozat n-edik tagjával.)

Egy sorozatot többféle módon is megadhatunk. A leggyakoribb az, hogy képlettel meg tudjuk adni a sorozat n-edik tagját:

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, ekkor $(a_n) = \left(-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots\right)$;

b) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$, ekkor $(a_n) = \left(1, \sqrt{5}-\sqrt{2}, \sqrt{6}-\sqrt{3}, \ldots\right)$;

c) $a_n = 5n-2$, ekkor $(a_n) = (3, 8, 13, \ldots)$;

d) $a_n = 3\cdot(-2)^n$, ekkor $(a_n) = (-6, 12, -24, \ldots)$;

e) $a_n = \sin n\cdot\dfrac{\pi}{2}$, ekkor $(a_n) = (1, 0, -1, \ldots)$.

2.2. ábra Lépésről lépésre

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

2.3. ábra Prímek a pozitív egészek között

Van, amikor ismerjük a sorozat első néhány tagjának értékét, a további tagok pedig bizonyos kisebb indexű tagok segítségével vannak megadva. Ezt **rekurzív megadási mód**nak hívjuk. Ilyenkor a nem ismert értékű tagokat a már ismertek felhasználásával lépésenként számíthatjuk ki.

f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \ (n \geq 3)$;

g) $a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 5,\ (n \geq 2)$;

h) $a_1 = 2,\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\right),\ (n \geq 2)$.

Az is előfordulhat, hogy a sorozat megadása nem teszi lehetővé tetszőleges tagjának kiszámítását.

i) $a_n =$ a π szám n-edik tizedesjegye;

j) $a_n =$ az n-edik prímszám.

1. példa Igazoljuk, hogy a c) és g) sorozatok azonosak!

Megoldás:
Teljes indukcióval bizonyítunk. Azt állítjuk, hogy a g) sorozat minden egyes tagjára teljesül az $a_n = 5n-2$ összefüggés. Ez $n=1$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy állításunk $(n-1)$-re igaz, belátjuk, hogy akkor n-re is az. A rekurziós összefüggés és feltevésünk szerint

$$a_n = a_{n-1} + 5 = 5(n-1) - 2 + 5 = 5n - 2,$$

amit éppen igazolni akartunk.

2. példa Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1 = 1,\ a_n = 4a_{n-1} + 1,\ (n \geq 2)$. Állítsuk elő a sorozat n-edik tagját zárt formulával! (Tehát az a)–e) sorozatoknál látott módon.)

Megoldás:
Számítsuk ki a sorozat első néhány tagját: $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 21,\ a_4 = 85.$ Ezek alapján kialakulhat az a sejtésünk, hogy $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$. A sejtést teljes indukcióval nem nehéz bizonyítani. Feltéve, hogy az állítás $(n-1)$ -re igaz:

$$a_n = 4a_{n-1} + 1 = 4 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{3} + 1 = \frac{4^n - 4}{3} + 1 = \frac{4^n - 1}{3},$$

ami a sejtést igazolja.

A továbbiakban olyan, bizonyos sorozatokra teljesülő tulajdonságokat tanulmányozunk, amelyek fontosak lesznek a későbbi vizsgálataink során.

2.2. A korlátos sorozatok

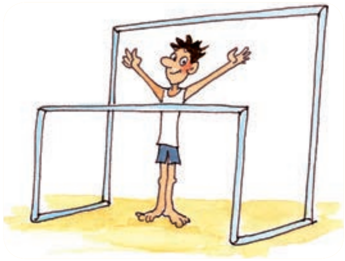
Korábban már megismerkedtünk a korlátos számhalmaz fogalmával. Most a sorozatokra fogalmazzuk meg ugyanezeket a tulajdonságokat.

Definíció Az (a_n) sorozat felülről korlátos, ha van olyan K szám, hogy a sorozat minden a_n tagjára $a_n \leq K$ teljesül. A K számot a sorozat felső korlátjának nevezzük.

(Nyilvánvaló, ha a sorozat felülről korlátos, akkor végtelen sok felső korlátja van.)

Definíció Az (a_n) sorozat alulról korlátos, ha van olyan k szám, hogy a sorozat minden a_n tagjára $a_n \geq k$ teljesül. A k számot a sorozat alsó korlátjának nevezzük.

(Nyilvánvaló, ha a sorozat alulról korlátos, akkor végtelen sok alsó korlátja van.)



2.4. ábra Korlátos

Definíció Az (a_n) sorozat korlátos, ha felülről és alulról is korlátos.

A most következő példák megoldásait gondosan tanulmányozzuk át, mivel az eredmények jó részére később hivatkozni fogunk!

3. példa Vizsgáljuk meg az a)–d) sorozatokat korlátosság szempontjából!

Megoldás:

a) Mivel $a_n \leq |a_n| = \frac{1}{n} \leq 1$ minden n-re, így a sorozat felülről korlátos. Tekintettel arra, hogy $a_n \geq -|a_n| = -\frac{1}{n} \geq -1$ minden n-re, így a sorozat alulról is korlátos. Az a) sorozat tehát korlátos.

b) Világos, hogy minden n-re $a_n \geq 0$, így a sorozat alulról korlátos. Figyeljük meg, hogy

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+3}+\sqrt{1}} = 1,$$

így a sorozat felülről is korlátos. A b) sorozat tehát korlátos.

c) A sorozat alulról korlátos, hiszen $a_n \geq 3$ nyilván minden n-re teljesül. **A sorozat felülről nem korlátos: bármely K szám esetén van olyan (K-tól függő) $n = n(K)$, hogy $a_n > K$.** Mivel

$$5n-2 > K \Leftrightarrow n > \frac{K+2}{5},$$

ezért például $n(K) = \left[\frac{K+2}{5}\right]+1$ ilyen n lesz.

d) A sorozat felülről nem korlátos, ugyanis bármely K-ra létezik n, hogy $a_{2n} = 3\cdot 2^{2n} > K$. Vegyük észre, hogy $2^{2n} \geq 2n$ minden n-re, ugyanis egy $2n$ elemű halmaz összes részhalmazainak száma áll a bal oldalon, míg az 1 elemű részhalmazok száma a jobb oldalon. Ezért $a_{2n} \geq 6n \geq K$, ha pl. $n = \left[\frac{K}{6}\right]+1$. Annak bizonyítását, hogy a sorozat alulról sem korlátos, az olvasóra bízzuk.

4. példa Korlátosak-e az alábbi sorozatok?

a) $a_n = \dfrac{3n-1}{2n+7}$ b) $b_n = \dfrac{2n^2-5}{5n+117}$

2.5. ábra Számológép

Megoldás:
Sokszor segít, ha nagy n számokra megvizsgáljuk a tagok értékét. Például $n = 1000$ esetén $a_{1000} \approx 1,49$ és $b_{1000} \approx 391$. Ezekből sejthető, hogy a_n korlátos, míg b_n felülről nem korlátos.

a) Könnyű látni, hogy minden n-re $a_n \geq 0$. Most igazoljuk, hogy minden n-re $a_n \leq \frac{3}{2}$.

$$\frac{3n-1}{2n+7} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 6n-2 \leq 6n+21,$$

ami igaz.

b) A törtet alulról megbecsülve:

$$\frac{2n^2-5}{5n+117} \geq \frac{2n^2-5n}{5n+117n} = \frac{2n-5}{122},$$

ami tetszőlegesen nagy értéket felvehet, ha n elég nagy, így a (b_n) sorozat nem korlátos.

Már ezekből a példákból is látható, hogy a korlátosság vizsgálata általában különféle becsléseket igényel. Érdemes ezért átismételni a nevezetes közepek között fennálló egyenlőtlenségeket, illetve a teljes indukció módszerét. Most egy gyakran használható egyenlőtlenséget igazolunk.

5. példa Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív szám és n pozitív egész, akkor

$$(1+a)^n \geq 1+na!$$

Megoldás:
A binomiális tételt felhasználva:

$$(1+a)^n = 1+\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}a^2+\ldots+\binom{n}{n}a^n \geq 1+na.$$

6. példa Legyen $a_n = q^n$, ahol q a 0-tól különböző adott valós szám és $n = 1, 2, \ldots$. Vizsgáljuk meg a sorozatot korlátosság szempontjából!

Megoldás:
Ha $|q| \leq 1$, akkor minden n-re $|a_n| \leq 1$, így a sorozat korlátos. Ha $q > 1$, akkor az 5. példában látott egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$q^n = [1+(q-1)]^n \geq 1+n(q-1).$$

Könnyű látni, hogy $1+n(q-1)$ tetszőlegesen nagy értéket felvehet, ha n elég nagy, így az (a_n) sorozat nem korlátos. Végül, ha $q < -1$, akkor $a_{2n} = (q^2)^n$, így q^2-re alkalmazva az előző becslést adódik, hogy a sorozat ekkor sem korlátos.

7. példa

Korlátos-e az $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat?

Megoldás:
Vegyük észre, hogy bármely $k \geq 2$ pozitív egészre

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

ezért

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2,$$

vagyis a sorozat felülről korlátos, így a sorozat korlátos, hiszen pozitívak a tagjai.

8. példa

Korlátos-e az $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat?

Megoldás:
Belátjuk, hogy a sorozat felülről nem korlátos, így nem lehet korlátos sorozat.

$$a_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Világos, hogy bármely rögzített K esetén van olyan k, hogy $a_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \geq K$, ami állításunkat bizonyítja.

9. példa

Igazoljuk, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat korlátos!

Megoldás:
Csak a felülről való korlátosság igazolásával foglalkozunk. A harmonikus és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel. Mivel

$$1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2} = \sqrt[n]{4},$$

ezért $n \geq 2$ esetén

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \leq 4.$$

(Egy másik bizonyítás következik a binomiális tétel tárgyalásánál szereplő 5. példa megoldásából.)

A korlátos számhalmazok kapcsán találkoztunk már a felső határ és alsó határ kifejezésekkel. Ezeket a sorozatokra is teljesen hasonló módon értelmezzük. Általában véve nem könnyű megállapítani pl. egy adott felülről korlátos sorozat esetén a legkisebb felső korlát értékét. Érdekességképpen közöljük, hogy a 7. példában szereplő sorozatra a felső határ értéke $\frac{\pi^2}{6}$. (Ezt egyébként először Eulernek sikerült igazolnia.) A 9. példában szereplő sorozathoz tartozó felső határ értékére később visszatérünk.

10. példa

Határozzuk meg az $a_n = \frac{5n-3}{2n+1}$ sorozathoz tartozó legkisebb felső korlát értékét!

Megoldás:

Először igazoljuk, hogy a sorozat felülről korlátos, így létezik a felső határ. Minden n-re

$$\frac{5n-3}{2n+1} \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow 10n-6 \le 10n+5$$

igaz, így ezért a sorozat felülről korlátos. Azt állítjuk, hogy az $\frac{5}{2}$ a legkisebb felső korlát. Ennek igazolására a következő módszert alkalmazzuk. Legyen $1 > \varepsilon > 0$ valamely pozitív szám. Megmutatjuk, hogy van olyan N index, hogy $a_N > \frac{5}{2} - \varepsilon$. Ekvivalens egyenlőtlenségekkel dolgozva:

$$\frac{5n-3}{2n+1} > \frac{5}{2} - \varepsilon,$$

$$\frac{5n-3}{2n+1} - \frac{5}{2} > -\varepsilon,$$

$$\frac{-11}{4n+2} > -\varepsilon \Leftrightarrow \frac{11}{4n+2} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} - 2\right) < n,$$

ezért $N = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} - 2\right)\right] + 1$ megfelelő index lesz. Ez azt jelenti, hogy $\frac{5}{2} - \varepsilon$ már nem felső korlát.

Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg a 4. a) példában szereplő sorozathoz tartozó legkisebb felső korlát értékét!
2. Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1 = 1$, $a_n = 5a_{n-1} + 1$, $(n \ge 2)$. Állítsuk elő a sorozat n-edik tagját zárt formulával!
3. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat korlátosság szempontjából!

   a) $a_n = \frac{5n^2 - 37}{7n-2}$ b) $b_n = \frac{2 - 13n^2}{n^3 + 1}$

4. Korlátos-e felülről az $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ sorozat?

5. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$!

6. Korlátos-e felülről az $(a_n): a_1 = \frac{1}{4},\ a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n^2-1},\ (n = 2, 3, \ldots)$ sorozat?

7. Igazoljuk, hogy az $(a_n): a_1 = 1,\ a_n = \sqrt[n]{n},\ (n \geq 2)$ sorozat felülről korlátos!

3. A monoton sorozatok

Láttuk, hogy a sorozatok függvényként vannak definiálva, így nem meglepő, hogy a függvényekre megfogalmazott nevezetes tulajdonságok egy része a sorozatoknál is megjelenik. A függvény monotonitásának fogalmával korábbi tanulmányaink során már többször is találkozhattunk. Természetes módon vihető át sorozatokra a függvények kapcsán megfogalmazott összes meghatározás.

Definíció Az (a_n) sorozat monoton növekvő, ha minden n-re $a_n \leq a_{n+1}$.

Definíció Az (a_n) sorozat szigorúan monoton növekvő, ha minden n-re $a_n < a_{n+1}$.

Definíció Az (a_n) sorozat monoton csökkenő, ha minden n-re $a_n \geq a_{n+1}$.

3.1. ábra Monotonitás

Definíció Az (a_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha minden n-re $a_n > a_{n+1}$.

Most néhány kidolgozott példa következik, amelyek bemutatnak a monotonitással kapcsolatos vizsgálatokban néhány jól alkalmazható megoldási fogást.

1. példa Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából a következő sorozatokat!

a) $a_n = \frac{3n-1}{2n+7}$ b) $b_n = \frac{2n^2-5}{5n+117}$

Megoldás:
Érdemes kiszámítani a sorozatok első néhány tagját:

$$a_1 = \frac{2}{9} \approx 0,22,\ a_2 = \frac{5}{11} \approx 0,45,\ a_3 = \frac{8}{13} \approx 0,61,\ a_4 = \frac{11}{15} \approx 0,73;$$

$$b_1 = -\frac{3}{122} \approx -0,025,\ b_2 = \frac{3}{127} \approx 0,024,\ b_3 = \frac{13}{132} \approx 0,098,\ b_4 = \frac{27}{137} \approx 0,197.$$

Ezek alapján azt sejthetjük, hogy mindkét sorozat szigorúan monoton növekvő. Próbáljuk most ezt bizonyítani!

a) A definíció alapján azt kell belátnunk, hogy minden pozitív egész n-re

$$\frac{3n-1}{2n+7} < \frac{3(n+1)-1}{2(n+1)+7} \Leftrightarrow \frac{3n-1}{2n+7} < \frac{3n+2}{2n+9}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$6n^2 - 2n + 27n - 9 < 6n^2 + 4n + 21n + 14,$$

$$6n^2 + 25n - 9 < 6n^2 + 25n + 14,$$

$$-9 < 14,$$

ami igaz, így állításunk is az.

b) Azt kell bizonyítanunk, hogy minden pozitív egész n-re

$$\frac{2n^2-5}{5n+117} < \frac{2(n+1)^2-5}{5(n+1)+117} \Leftrightarrow \frac{2n^2-5}{5n+117} < \frac{2n^2+4n-3}{5n+122}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$10n^3 + 244n^2 - 25n - 610 < 10n^3 + 254n^2 + 453n - 351,$$

$$0 < 10n^2 + 478n + 259,$$

ami igaz, így állításunk is az.

Természetesen óvatosnak kell lenni, mert egy sorozat első néhány tagjának ismeretében nem mindig lehet helyes sejtést megfogalmazni.

2. példa

Legyen $a_n = n^{\frac{1}{n}}$, ahol $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Monoton-e az (a_n) sorozat?

Megoldás:
Ha kiszámítjuk a sorozat első három tagjának értékét: $a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{2} \approx 1,41,\ a_3 = \sqrt[3]{3} \approx 1,44,$ akkor arra gondolhatunk, hogy a sorozat monoton növekvő. Ez azonban nem igaz, ugyanis $a_4 = \sqrt{2},\ a_5 = \sqrt[5]{5} \approx 1,38.$

Bár ez a sorozat a definíció szerint nem bizonyult monotonnak, mégis rendelkezik monotonitás szempontjából egy fontos tulajdonsággal: **létezik olyan N index, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > a_{n+1}$ teljesül minden n-re, tehát a_N-től kezdve a sorozat szigorúan monoton csökken**. (Joggal nevezik sokszor az ilyen tulajdonsággal rendelkező sorozatokat is monotonnak.) Megmutatjuk, hogy $n \geq 4$ mellett $a_n > a_{n+1}$, azaz

$$n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Átrendezve:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

A korlátos sorozatok tárgyalásánál igazoltuk, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$, így a bizonyítás kész.

3. példa

Igazoljuk, hogy az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat szigorúan monoton növekvő!

Megoldás:

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}.$$

A számtani és mértani közép nem lehet egyenlő, mivel $1+\frac{1}{n} \neq 1$, így $a_{n+1} > a_n$ minden n-re.

A feladatban szereplő sorozatról már tudtuk, hogy korlátos, most pedig igazoltuk, hogy monoton. Erre a sorozatra még visszatérünk, mivel a matematika egy nevezetes számával van kapcsolatban.

4. példa

Igazoljuk, hogy az $a_1 = 2,\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right),\ (n \geq 2)$ sorozat monoton és korlátos!

Megoldás:

A sorozat alulról korlátos, ugyanis a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt, ha $n \geq 2$, akkor:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \geq \sqrt{a_{n-1}\cdot\frac{2}{a_{n-1}}} = \sqrt{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha $a_{n-1} = \sqrt{2}$, de akkor $a_{n-2} = \sqrt{2}$ és így tovább, végül $a_1 = \sqrt{2}$, ami ellentmondás. Tehát minden n-re $a_n > \sqrt{2}$.

Most megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő, azaz $a_n > a_{n+1}$ minden n-re. (Ebből azonnal adódik az is, hogy a sorozat felülről korlátos!) Teljes indukciót alkalmazunk. Könnyű látni, hogy az állítás $n = 1$-re igaz. Tegyük fel, hogy az állítás $(n-1)$-re igaz, ekkor elegendő azt igazolnunk, hogy n-re is az lesz, azaz

$$\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) > \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \Leftrightarrow a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} > a_n + \frac{2}{a_n}.$$

Rendezés után:

$$a_{n-1} - a_n + 2\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} > 0,$$

$$(a_{n-1} - a_n)\left(1 - \frac{2}{a_{n-1}a_n}\right) > 0,$$

ez pedig az indukciós feltevés, valamint $a_{n-1}a_n > 2$ miatt igaz.

Azt kaptuk tehát, hogy a feladatban szereplő sorozat monoton és korlátos. Később visszatérünk rá, mert egy nevezetes számmal áll kapcsolatban.

Oldjuk meg!

1. Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából a következő sorozatokat!

a) $a_n = \dfrac{2n+1}{7n-5}$ b) $b_n = \dfrac{3n-2}{2n^2+n+3}$

2. Mit mondhatunk monotonitás szempontjából az alábbi, általános tagjukkal adott sorozatokról?

a) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$ b) $b_n = q^n$, ahol q adott valós szám.

3. Igazoljuk, hogy az $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $(n = 1, 2, ...)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő!

4. Igazoljuk, hogy az $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $(n = 1, 2, ...)$ sorozat monoton és korlátos!

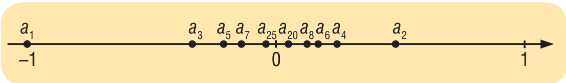
4. A számsorozatok határértéke

4.1. ábra Svájc és Ausztria határán

A most megtárgyalandó fogalom központi szerepet játszik a matematikában. Kialakulása hosszú folyamat volt, teljes megértése sok időt igényel. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a definíciók pontos (ha úgy tetszik, szóról szóra) való megtanulása nélkül esélyünk sem lesz a további anyagrészek megértésére.

1. példa

Tekintsük az n-edik tagjára vonatkozó $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ képlettel adott sorozatot, és ábrázoljuk a sorozat néhány tagját a számegyenesen!

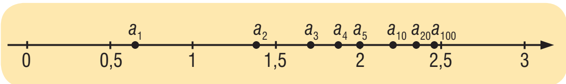


4.2. ábra A sorozat első néhány tagja

Jól látható, hogy a sorozat tagjai az n index növekedésével a 0 szám köré „tömörülnek".

2. példa

Vizsgáljuk most meg az $a_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$ sorozatot és ábrázoljuk a sorozat néhány tagját a számegyenesen!



4.3. ábra A sorozat első néhány tagja

Itt az látható, hogy a sorozat tagjai az n index növekedésével balról a 2,5 szám mellé „tömörülnek".

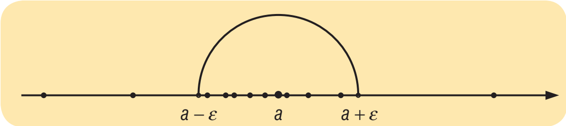
MatEm_Book.indb 272 2012.07.05. 12:26:15

Definíció Az a szám ε sugarú környezetének $(\varepsilon > 0)$ nevezzük az $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ alakú nyitott intervallumot a számegyenesen.

A fenti két példában azt vettük észre, hogy van olyan a szám, amelyhez „közel lesznek” az (a_n) sorozat tagjai az n index növekedésével. Ezt a következő meghatározás fejezi ki szemléletesen.

1. definíció Az (a_n) sorozatnak létezik a határértéke, ha van olyan a szám, hogy az a **tetszőleges sugarú környezetében** benne van a sorozat **majdnem minden tag**ja. (Tehát csak véges sok tag maradhat ki belőle.)

Azt, hogy az (a_n) számsorozatnak létezik a határértéke, úgy is szokás mondani, hogy a sorozat **konvergens**. Ha az (a_n) számsorozatnak nem létezik a határértéke, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat **divergens**. A definícióban szereplő a számot a sorozat **határérték**ének (**limesz**ének) nevezzük. A fenti definíció tehát azt fogalmazza meg, hogy mikor **konvergál** (másképpen mondva: tart) az (a_n) sorozat egy a számhoz.



4.4. ábra Konvergens sorozat

Jelölés:

$$a_n \to a \quad \text{vagy} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

A definíció szemléltetését szolgálja a 4.4. ábra.

A fent leírt definíciónak nagy előnye, hogy szemléletes; nagy hátránya viszont, hogy egy konkrét sorozatra nehéznek látszik az alkalmazása. Most következzék egy másik definíció, amely alapján már számításokat is tudunk majd végezni.

4.5. ábra A római limesz

2. definíció Az (a_n) sorozatnak létezik határértéke, ha van olyan a szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbszám (N általában függ ε-tól), amelyre teljesül, hogy $n > N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.

Be lehet bizonyítani, hogy a két definíció ekvivalens. (Gondoljuk végig!)
Térjünk most vissza a határérték fogalmának bevezetésénél látott két sorozathoz! A 2. definíció alapján most igazoljuk, hogy mindkét sorozatnak van határértéke, illetve ki is számoljuk őket.

3. példa
Azt állítjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$

Megoldás:
Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Célunk olyan N szám megtalálása, hogy $n > N$ esetén

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

teljesüljön. Láthatjuk, hogy $N = \frac{1}{\varepsilon}$ megfelel.

4. példa

Azt állítjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-3}{2n+1} = \frac{5}{2}$.

Megoldás:
Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Célunk olyan N szám megtalálása, hogy $n > N$ esetén

$$\left|\frac{5n-2}{2n+1} - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon$$

teljesüljön. Innen:

$$\left|\frac{10n-4-10n-5}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{9}{2(2n+1)} < \varepsilon,$$

$$\frac{9}{2\varepsilon} < 2n+1,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2\varepsilon} - 1\right) < n.$$

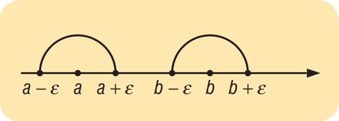
Látjuk, hogy $N = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2\varepsilon} - 1\right)$ megfelelő lesz.

Fontos megérteni, hogy ha valamely sorozatnak létezik határértéke, akkor N küszöbszámból természetesen nem csak egy van: minden, a találtnál nagyobb szám is küszöbszám lesz ugyanarra az ε -ra nézve.

Felmerül a kérdés, hogy hány határértéke lehet egy sorozatnak. A következő tétel erre válaszol.

1. tétel Konvergens sorozatnak egy határértéke van.

Bizonyítás:



4.6. ábra Csak egy határérték lehet

Tegyük fel indirekt módon, hogy az (a_n) sorozatnak két határértéke is van: a és b. Feltehetjük, hogy $a < b$. Válasszuk az a és b számhoz is környezetsugárnak $\varepsilon = \frac{b-a}{4}$ -et! Azonnal ellentmondásba kerülünk az 1. definícióban leírtakkal, amelyet az ábra szemléltet is.

Természetesen nem minden sorozatnak létezik határértéke.

5. példa Konvergens-e az $a_n = 2-(-1)^n$, $(n=1,2,...)$ sorozat?

Megoldás:
Világos, hogy minden k-ra $a_{2k} = 1$ és $a_{2k+1} = 3$. Tegyük fel, hogy létezik a sorozatnak határértéke: a. Válasszuk környezetsugárnak pl. $\varepsilon = \frac{1}{10}$-et! Az a szám ε sugarú környezete $\frac{2}{10}$ hosszú szakasz a számegyenesen. Erre nem eshet rá egyszerre az 1 és a 3! (Bármelyik csak véges sokszor maradhatna ki.)

6. példa Konvergens-e az $a_n = 2^n$, $(n=1,2,...)$ sorozat?

Megoldás:
Tegyük fel, hogy létezik a sorozatnak határértéke: a. Válasszuk környezetsugárnak pl. $\varepsilon = 1$-et! Ekkor a sorozatnak csak véges sok tagja lehet $(a+1)$-nél nagyobb. Ez azonban nem igaz, hiszen a korlátos sorozatoknál látott 6. példa szerint a sorozat nem korlátos. A sorozat tehát divergens.

Azok a sorozatok, amelyeknek nincs határértéke, divergens sorozatok. A divergens sorozatok közül azokra, amelyek olyanok, mint az előbbi sorozat, külön elnevezést használnak.

Definíció Az (a_n) sorozat a ∞-hez tart, ha minden K számhoz létezik olyan N szám, hogy ha $n > N$, akkor $a_n > K$.

(Szokás ezt úgy is mondani, hogy az (a_n) sorozat **a végtelenhez divergál**.)

Jelölés:

$$a_n \to \infty \text{ vagy } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Hasonlóan értelmezhető a $-\infty$-hez tartás fogalma.
A 6. példában tapasztaltakat általánosabban fogalmazza meg az alábbi fontos tétel.

2. tétel Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás:
Csak a felülről való korlátosságot igazoljuk, az alsó korlát létezésének bizonyítása hasonlóan végezhető el. Tegyük fel, hogy a sorozat határértéke a. Válasszuk környezetsugárnak pl. $\varepsilon = 1$-et! Tudjuk, hogy az $(a-1, a+1)$ intervallumon kívül a sorozatnak csak véges sok tagja lehet. Ha van a sorozatnak $(a+1)$-nél nagyobb tagja, akkor vegyük ezek közül a legnagyobbat! (Véges sok szám között mindig van legnagyobb.) Ez a szám felső korlátja lesz a sorozatnak. Ha nincs a sorozatnak $(a+1)$-nél nagyobb tagja, akkor az $a+1$ szám a felső korlát. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4.7. ábra Közel a célhoz

A tételben megfogalmazott állítás nem fordítható meg, tehát a korlátosságból nem lehet a konvergenciára következtetni, lásd a 3. példában szereplő sorozatot! A tétel állítását úgy is meg lehet fogalmazni, hogy **a korlátosság a konvergencia szükséges feltétele**. (De, mint láttuk, nem elegendő feltétele.) Most a 2. definíció felhasználásával meghatározzuk néhány sorozat határértékét. Fontos látni, hogy a definíciót csak akkor tudjuk használni, ha a határértéket valamilyen módon megsejtettük. Jó szolgálatot tehet ebben egy számológép, melynek segítségével általában nem nehéz kiszámítani egy sorozat nagy indexszel bíró tagjait. Ha a sorozat konvergens, akkor várható, hogy ezek a tagok közel lesznek a határértékhez.

7. példa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{7n-5}=?$$

Megoldás:
Mivel „nagy” n-ek esetén $2n+1\approx 2n$ és $7n-5\approx 7n$, ezért sejthető, hogy a határérték létezik és $\frac{2}{7}$-del egyenlő. Rögzítsünk egy $\varepsilon>0$ számot. Célunk olyan N szám megtalálása, hogy $n>N$ esetén

$$\left|\frac{2n+1}{7n-5}-\frac{2}{7}\right|<\varepsilon$$

teljesüljön. Innen:

$$\left|\frac{14n+7-(14n-10)}{7(7n-5)}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{17}{7(7n-5)}<\varepsilon,$$

$$\frac{17}{7\varepsilon}<7n-5 \Leftrightarrow \frac{1}{7}\left(\frac{17}{7\varepsilon}+5\right)<n,$$

ahonnan látszik, hogy $N=\frac{1}{7}\left(\frac{17}{7\varepsilon}+5\right)$ megfelelő.

8. példa

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=?$$

Megoldás:
Könnyen megsejthető, hogy a sorozat a 0-hoz tart. Legyen $\varepsilon>0$, rögzített. Mivel

$$\left|\sqrt{n+3}-\sqrt{n}-0\right|=\sqrt{n+3}-\sqrt{n},$$

továbbá

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}<\frac{3}{2\sqrt{n}},$$

ezért

$$\frac{3}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{9}{4\varepsilon^2} < n$$

azt mutatja, hogy $N = \frac{9}{4\varepsilon^2}$ megfelelő választás.

9. példda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = ?$$

Megoldás:
A teljes indukcióval foglalkozó anyagrész 1. példája alapján

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$, rögzített. Belátjuk, hogy a feladatban szereplő sorozat $\frac{1}{3}$-hoz tart.

$$\left|\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3n^2 + n}{6n^3} < \varepsilon,$$

$$\frac{3n+1}{6n^2} < \varepsilon.$$

Mivel

$$\frac{3n+1}{6n^2} \le \frac{4n}{6n^2} = \frac{2}{3n},$$

ezért

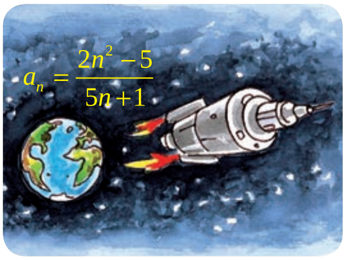
$$\frac{2}{3n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{3\varepsilon} < n$$

miatt $N = \frac{2}{3\varepsilon}$ megfelelő lesz.

10. példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 5}{5n+1} = ?$$

Megoldás:
A korlátos sorozatokkal foglalkozó rész 4. b) feladatában találkoztunk ezzel a sorozattal. Igazoltuk, hogy a sorozat felülről nem korlátos, ezért nem konvergens. Az ott látott becslésből több is leolvasható: a sorozat a ∞-hez divergál.



4.8. ábra Nincs határ

Oldjuk meg!

1. Igaz-e, hogy ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor a végtelenhez tart?

2. Legyenek $a < b < c$ adott valós számok. Adjunk meg olyan (a_n) sorozatot, amelyre teljesül, hogy végtelen sok tagja esik az *a*, *b* és *c* számok mindegyikének tetszőleges sugarú környezetébe!

3. Igaz-e, hogy pozitív tagú és konvergens sorozat határértéke pozitív szám?

4. Határozzuk meg az alábbi, általános tagjukkal adott sorozatok határértékét (amennyiben a határérték létezik)!

a) $a_n = \dfrac{2n+9}{3n-1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2+2}-n$ c) $a_n = \dfrac{3n^2-1}{2n+1}$ d) $a_n = \dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$

e) $a_n = \dfrac{1-2+3-4+5-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+5n}}$

5. A határérték kiszámítása

5.1. Műveletek konvergens sorozatokkal

Egy sorozat konvergens voltának eldöntése és a határértékének meghatározása általában nem könynyű feladat. Következzen néhány olyan tétel, amelyek megkönnyítik a határérték kiszámítását. Ezeket a tételeket határérték-számítási tételeknek is szokták nevezni.

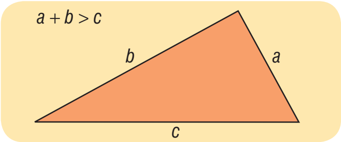
1. tétel Ha az (a_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, valamint c adott valós szám, akkor a $(c \cdot a_n)$ sorozat is konvergens és határértéke $c \cdot a$.

Bizonyítás:
Ha $c = 0$, akkor a tétel állítása nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $c \neq 0$ és legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel $|ca_n - ca| = |c| \cdot |a_n - a|$, továbbá $a_n \to a$, ezért $\dfrac{\varepsilon}{|c|}$-hez is létezik N, hogy $n > N$ esetén

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \Leftrightarrow |c| \cdot |a_n - a| < \varepsilon,$$

ami igazolja a tételt.

Most egy hasznos észrevételt ismerhetünk meg, amelyet háromszög-egyenlőtlenségnek hívnak.



5.1. ábra Háromszög-egyenlőtlenség a geometriában

1. példa Ha x és y valós számok, akkor $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Megoldás:
Tekintettel arra, hogy mindkét oldalon nemnegatív számok állnak, ezért ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük:

$$(|x+y|)^2 \leq (|x|+|y|)^2,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2,$$

$$2xy \leq 2|xy|,$$

ami nyilván igaz. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha x és y előjele azonos.

2. tétel Ha az (a_n) és (b_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, $b_n \to b$, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat is konvergens és $a_n + b_n \to a + b$.

Bizonyítás:
Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left|(a_n + b_n) - (a + b)\right| = \left|(a_n - a) + (b_n - b)\right| \le |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Az $\frac{\varepsilon}{2}$-höz létezik N_1, hogy $n > N_1$ esetén $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Hasonlóan: az $\frac{\varepsilon}{2}$-höz létezik N_2, hogy $n > N_2$ esetén $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így akkor $n > \max(N_1, N_2)$ mellett

$$\left|(a_n + b_n) - (a + b)\right| < \varepsilon,$$

ami igazolja a tételt. A tétel állítása teljes indukcióval 2-nél több (de véges sok) tagra is kiterjeszthető.

Az alábbi tételek bizonyítását nem részletezzük azok összetettebb jellege miatt. A bizonyítások mindegyike elvégezhető a határérték 2. definíciójának segítségével.

3. tétel Ha az (a_n) és (b_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, $b_n \to b$, akkor az $(a_n b_n)$ sorozat is konvergens és határértéke ab.

A tétel állítása teljes indukcióval 2-nél több (de véges sok) tényezőre is kiterjeszthető.

4. tétel Ha az (a_n) és (b_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, $b_n \to b$, továbbá $b \neq 0$ és $b_n \neq 0$ minden n-re, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is konvergens és $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

5. tétel Ha az (a_n) sorozat konvergens és $a_n \to a$, továbbá $a_n \ge 0$, akkor az $\left(\sqrt{a_n}\right)$ sorozat is konvergens és $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

(A tétel állítása egyébként k-adik gyökre is érvényes.)

Nézzünk néhány példát ezen tételeknek a használatára! A példák egy része a határérték 2. definíciójának alkalmazásaként már szerepelt.

2. példa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{7n-5} = ?$$

Megoldás:
Mivel

$$\frac{2n+1}{7n-5}=\frac{2+\frac{1}{n}}{7-\frac{5}{n}},$$

továbbá $\frac{1}{n}\to 0$, így az 1. tétel szerint $\frac{5}{n}\to 0$. A 2. tétel szerint $2+\frac{1}{n}\to 2$, $7-\frac{5}{n}\to 7$, végül a 4. tételt alkalmazva: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{7n-5}=\frac{2}{7}$.

3. példa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=?$$

Megoldás:

Felhasználva, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, valamint az 1–3. tételeket:

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

4. példa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+4n+5}{5n^3+20n^2+3n+1}=?$$

Megoldás:

Felhasználva, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, a 3. tétel miatt adódik, hogy adott k pozitív egészre $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$.

Alkalmazva az 1–4. tételeket:

$$\frac{2n^3-3n^2+4n+5}{5n^3+20n^2+3n+1}=\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{5+\frac{20}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\to\frac{2}{5}.$$

5. példa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+5\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=?$$

Megoldás:

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, így az 1–4. tételeket alkalmazva:

$$\frac{\sqrt{n+2}+5\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+5\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\to\frac{1+5}{2}=3.$$

5.2. Számsorozatok határértékével kapcsolatos további ismeretek

A korábbiak során többször is találkozhattunk olyan sorozattal, amely a korlátosság és a monotonitás követelményének is megfelel. Mivel egy ilyen sorozat minden tagja a számegyenesen ugyanarra a zárt intervallumra esik, ezért „gyanús”, hogy a sorozat tagjai az index növekedésével egy adott szám felé haladva „tömörülnek”, vagyis a sorozat konvergens. Ezt fejezi ki a következő, alapvető fontosságú tétel. A bizonyítása nem tananyag, nem kell megtanulni; azért szerepeltetjük, hogy érzékelni tudjuk az eddigi anyagrészek közötti finom kapcsolatokat.

6. tétel Ha egy számsorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Bizonyítás:
Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a sorozat monoton növekvő. Mivel a sorozat felülről korlátos, így a teljességi axióma szerint létezik $\sup a_n$, azaz a legkisebb felső korlát. Ha $\sup a_n = a$, akkor azt állítjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$! Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, de rögzített. Világos, hogy $a-\varepsilon$ már nem felső korlátja az (a_n) sorozatnak, így létezik olyan n_0 index, hogy $a-\varepsilon < a_{n_0}$. Tekintettel arra, hogy a sorozat monoton nő, azt kapjuk, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$a-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < a+\varepsilon,$$

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

ami azt adja, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ezt akartuk bizonyítani.

Most már kimondhatjuk, hogy az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ általános taggal adott sorozat konvergens, hiszen korábban igazoltuk, hogy korlátos és monoton. A sorozat határértéke a matematika egyik híres száma, melyet Euler tiszteletére e-vel jelölünk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718.$$

Euler bizonyította be először, hogy az e szám irracionális.

5.2. ábra Az *e* irracionális szám

6. példa
Igazoljuk, hogy az $a_1 = 2,\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right),\ (n \geq 2)$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét!

Megoldás:
Erről a sorozatról a monoton sorozatokról szóló rész 4. példájának megoldásában igazoltuk, hogy monoton és korlátos. A fenti tétel szerint ezért konvergens. Jelöljük a-val a határértéket! Mivel $a_{n-1} \to a$ nyilvánvaló, ezért a műveletekről szóló tételek (határértéktételek), valamint a határérték egyértelműsége miatt

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)\Leftrightarrow a=\sqrt{2},$$

hiszen $a_n \geq \sqrt{2}$.
A példában szereplő sorozat némi módosításával rekurziót kaphatunk valamely pozitív szám négyzetgyökének kiszámítására.

Oldjuk meg!

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-7n+1}{3n^2+7}=?$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{5n+3}=?$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n^2-2n-1}=?$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2\sqrt{n+2}}{\sqrt{100n+1}}=?$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=?$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=?$ (q adott valós szám)

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=?$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=?$

3. Igazoljuk, hogy az $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n=1,2,\ldots$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét!

4. Igazoljuk, hogy ha A adott pozitív szám, akkor az $a_1=A$, $a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{A}{a_{n-1}}\right)$, $(n\geq 2)$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét!

5. Pistike azt állítja, hogy $1 = 0$. A következő „bizonyítással” kívánja alátámasztani állítását:

$$1=\frac{n}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n},\ \text{ de }\ \frac{1}{n}\to 0,\ \text{ ezért }\ 1=n\cdot 0=0.$$

Hol a hiba?

6. Nevezetes sorozatok

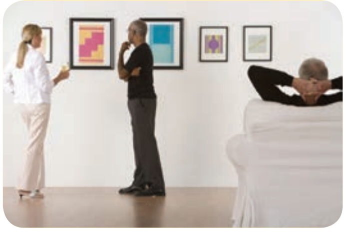
A továbbiakban részletesen megvizsgálunk két olyan sorozatot, amelyekkel gyakran találkozhatunk nemcsak a matematikán belül, hanem a mindennapi életben is.

6.1. A számtani sorozatok

1. példa Egy kiállítás látogatottsági adataiból kiderült, hogy minden nap az előző napinál 100-zal több látogatójuk volt, valamint, hogy összesen 53 940 ember nézte meg a tárlatot. Tudjuk még, hogy az első napon 240 látogatójuk volt.
a) Hány látogató volt a huszadik napon?
b) Hány napig volt nyitva a kiállítás?
c) Hány látogató volt az utolsó napon?

Megoldás:

a) Jelölje a_n az n-edik napon megjelent látogatók számát. A feladat szövegéből kiderül, hogy $a_{n+1} = a_n + 100$. Ekkor $a_1 = 240$, $a_2 = 240 + 100$, $a_3 = 240 + 2 \cdot 100$, $a_4 = 240 + 3 \cdot 100$, és így $a_{20} = 240 + 19 \cdot 100 = 2140$. Tehát 2140 ember nézte meg a kiállítást a huszadik napon.



6.1. ábra A kiállítás

b) A feladat szövege szerint $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 53\,940$. Mivel $a_n = 240 + (n-1) \cdot 100$, ezért

$$240 + (240+100) + (240 + 2\cdot 100) + \ldots + \left[240 + (n-1)\cdot 100\right] = 53940,$$

$$n \cdot 240 + \left[100 + 2\cdot 100 + \ldots + (n-1)\cdot 100\right] = 53940,$$

$$240n + 100 \cdot \left[1 + 2 + \ldots + (n-1)\right] = 53940.$$

A zárójelben szereplő összeg kiszámítása egy ügyes fogással egyszerűen megtehető. (Ezt az eljárást **Gauss** állítólag már hétévesen megtalálta.) Jelölje s_{n-1} az összeget, és írjuk fel s_{n-1}-et kétféleképpen (oda-vissza módon) egymás alá rendezve a tagokat:

$$s_{n-1} = \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ldots + (n-1),$$

$$s_{n-1} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1.$$

6.2. ábra Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Mivel az egymás alatt-felett szereplő számok összege minden esetben n, ezért

$$2s_{n-1} = n(n-1) \Leftrightarrow s_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ennek felhasználásával:

$$240n + 100 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 53\,940,$$

$$50n^2 + 190n - 53\,940 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai $n = 31$ és $n = -34{,}8$. Ezek közül értelemszerűen csak a 31 felel meg. Tehát 31 napig tartott nyitva a kiállítás.

c) Behelyettesítve: $a_{31} = 240 + 30 \cdot 100 = 3240$, tehát az utolsó napon ennyien nézték meg a tárlatot.

A fenti példában egy olyan sorozat tagjai szerepelnek, amelyre az jellemző, hogy minden tag ugyanannyival nagyobb az előzőnél. Kicsit általánosabb megfogalmazást használva adódik a következő meghatározás.

Definíció Ha az (a_n) sorozat olyan, hogy minden n-re $a_{n+1} = a_n + d$, ahol d adott valós szám, akkor a sorozatot **számtani sorozat**nak nevezzük. A d szám neve: **differencia** (különbség), hiszen d egy tagnak és az őt megelőzőnek a különbsége.

Felmerülhet a kérdés, hogy miért nevezik a definícióban leírt sorozattípust számtaninak. Vegyük észre, hogy a másodiktól kezdve minden tag az őt közrefogó tagok számtani közepe:

$$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}=\frac{a_n-d+a_n+d}{2}=a_n.$$

Ennek az észrevételnek a megfordítása is igaz: ha az (a_n) sorozat olyan, hogy $n\geq 2$ esetén minden n-re $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, akkor a sorozat számtani sorozat. (Például teljes indukció felhasználásával ezt mindenki maga is könnyen beláthatja.)

6.3. ábra A házszámok számtani sorozatot alkotnak

A számtani sorozatokra vonatkozó alapvető észrevételek következnek.

Ha $d=0$, akkor konstans sorozatot kapunk, amely tehát tekinthető számtani sorozatnak. Ha $d>0$, akkor a számtani sorozat szigorúan monoton növekvő, ha pedig $d<0$, akkor szigorúan monoton csökkenő. Könnyű látni, hogy ha $d>0$, akkor a számtani sorozat felülről nem korlátos, ha pedig $d<0$, akkor alulról nem korlátos.

Az 1. példa megoldása közben két fontos összefüggést is használtunk, amelyek minden számtani sorozatra érvényesek. Ezeket most általánosan is megfogalmazzuk, majd igazoljuk azokat.

1. tétel Ha (a_n) számtani sorozat, akkor minden n-re: $a_n=a_1+(n-1)d$.

Bizonyítás:
Teljes indukcióval a bizonyítás igen egyszerű, így azt az olvasóra bízzuk.
(A tétel azt fejezi ki, hogy az első tag és a differencia megadja a számtani sorozatot.)

2. tétel Ha s_n jelöli az (a_n) számtani sorozat első n tagjának összegét, tehát $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, akkor

$$s_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk az 1. példa megoldásában már látott oda-vissza való felírás módszerét az s_n kiszámítására!

$$s_n=a_1+a_2\quad+\quad a_3+\ldots+a_n,$$
$$s_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1.$$

Az 1. tétel miatt

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1)d+a_1+(n-k)d=2a_1+(n-1)d,$$

ezért

$$2s_n=n\cdot\left[2a_1+(n-1)d\right],$$

ahonnan adódik a bizonyítandó állítás.

2. példa a) Az (a_n) sorozat olyan, hogy $a_n = 5n - 7$ teljesül minden n-re. Igazoljuk, hogy számtani sorozatról van szó!

b) Az (a_n) sorozat első n tagjának összege minden n-re $\left(2n^2 - n\right)$-nel egyenlő. Igazoljuk, hogy számtani sorozatról van szó!

Megoldás:

a) Mivel minden n-re $a_{n+1} = 5(n+1) - 7 = 5n - 7 + 5 = a_n + 5$, ezért a számtani sorozat definíciója szerint (a_n) egy $d = 5$ differenciájú számtani sorozat, melynek első tagja a -2.

b) Mivel minden n-re $s_n = 2n^2 - n$, ezért

$$s_{n-1} = 2(n-1)^2 - (n-1) = 2n^2 - n - (4n-3) = s_n - (4n-3),$$

ahonnan adódik, hogy $a_n = s_n - s_{n-1} = 4n - 3$ teljesül minden n-re, ha $n \geq 2$, továbbá $a_1 = s_1 = 1$. Innen a befejezés az a) rész alapján már egyszerű.

A számtani sorozatokkal kapcsolatos feladatok többségének megoldása jórészt olyan egyenletek vagy egyenletrendszerek megoldására vezethető vissza, melyekben szereplő egyenletek az 1. és 2. tételek segítségével írhatók fel.

3. példa Bergengóciában egy gyümölcsfán megérett a körte. Négy hét alatt potyogott le mind az 1610 darab. Tudjuk, hogy minden nap 3-mal több esett le, mint az azt megelőző napon.

a) Hány körte esett le az első napon?

b) A körték hány százaléka van még a fán három hét elteltével?

Megoldás:

a) Jelölje a_n azt, hogy hány körte esett le a fáról az n-edik napon. A feladat szövegéből nyilvánvaló, hogy egy $d = 3$ differenciájú számtani sorozat tagjai lesznek az $a_1, a_2, \ldots$ számok. A 2. tétel szerint:

$$1610 = \frac{2a_1 + 27 \cdot 3}{2} \cdot 28 \Leftrightarrow a_1 = 17,$$

tehát 17 db körte esett le az első napon.

b) Mivel $s_{21} = \dfrac{2 \cdot 17 + 20 \cdot 3}{2} \cdot 21 = 987$, ezért három hét múlva még $1610 - 987 = 623$ db körte van a fán, ami pedig az eredeti mennyiség $\dfrac{623}{1610} \cdot 100 \approx 38{,}7$ százaléka.

6.4. ábra Az érett körték

6.2. A mértani sorozatok

4. példa Meseországban van egy hatalmas sivatag. A sivatag szélén egy kanna víz 3 tallérba kerül, befelé haladva viszont az ára naponta megduplázódik. Ha naponta egy kanna vizet kell meginnunk, akkor legalább mennyi pénz legyen nálunk, hogy a 20 nap járóföldre lévő úti célunkat elérhessük, tudva, hogy csak egy kanna áll rendelkezésünkre, amelybe minden nap meg kell vennünk a vizet?

6.5. ábra Mesés sivatag

Megoldás:
Az első napi vízadag 3 tallérba, a második napi $3 \cdot 2 = 6$ tallérba, a harmadik napi $3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2 = 12$ tallérba, általánosan az n-edik napi $3 \cdot 2^{n-1}$ tallérba kerül majd. Ez azt jelenti, hogy legalább $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 3 \cdot 2^{19}$ tallérra van szükségünk. Ennek az összegnek a kiszámítása a célunk. Jelöljük s-sel, és írjuk fel $2s$-t!

$$s = 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 3 \cdot 2^{19},$$

$$2s = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{19} + 3 \cdot 2^{20}.$$

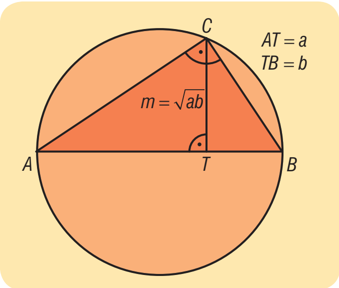
Innen látszik, hogy

$$2s = s + 3 \cdot 2^{20} - 3 \Leftrightarrow s = 3\left(2^{20} - 1\right) = 3\,145\,725.$$

Tehát legalább 3 145 725 tallérnyi pénzösszeg birtokában vághatunk csak neki a sivatagnak.

Az előző példában egy olyan sorozat tagjai szerepeltek, amelyre az igaz, hogy a másodiktól kezdve minden tag az előző tag ugyanannyiszorosa.

Definíció Ha az (a_n) sorozat olyan, hogy $a_1 \neq 0$, továbbá minden n-re $a_{n+1} = a_n \cdot q$, ahol q adott, 0-tól különböző valós szám, akkor a sorozatot **mértani sorozat**nak nevezzük. A q szám neve: **kvóciens** (hányados).



6.6. ábra Mértani közép

Megjegyzés:
A mértani sorozat definíciója nem egységes a szakirodalomban. Az $a_1 \neq 0, q \neq 0$ feltételeket nem mindig szerepeltetik. Ebben a könyvben azonban csak a fenti definícióval adott sorozatokat tekintjük mértani sorozatnak.

Felmerülhet a kérdés, hogy miért nevezik a definícióban leírt sorozattípust mértaninak. Ha a sorozat pozitív tagokból áll, akkor a második tagtól kezdve minden tag az őt közrefogó tagok mértani közepe lesz:

$$\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_n}{q} \cdot a_n q} = \sqrt{a_n^2} = a_n.$$

Ennek az észrevételnek a megfordítása is igaz: ha az (a_n) sorozat olyan, hogy pozitívak a tagjai, továbbá $n \geq 2$ esetén minden n-re $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$, akkor a sorozat mértani sorozat. Negatív tagok előfordulása esetén a fenti összefüggések a megfelelő tagok abszolút értékeire érvényesek. (Például teljes indukció felhasználásával mindezt mindenki maga is könnyen beláthatja.)

A mértani sorozatokra vonatkozó alapvető észrevételek következnek.

Ha $q = 1$, akkor konstans sorozatot kapunk, amely tehát tekinthető mértani sorozatnak. Ha $q > 0$, akkor minden tag előjele az a_1 előjelével egyezik meg. Ha $q < 0$, akkor a mértani sorozat tagjai felváltva pozitív, illetve negatív előjelűek. Ebből azonnal következik, hogy ekkor a sorozat nem monoton.

Ha $q > 1$ és $a_1 > 0$, akkor a mértani sorozat szigorúan monoton növekvő, ha pedig $q > 1$ és $a_1 < 0$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő. (Miért?)

Ha $0<q<1$ és $a_1>0$, akkor a mértani sorozat szigorún monoton csökkenő, ha pedig $0<q<1$ és $a_1<0$, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő. (Miért?)

A korlátossággal kapcsolatos kérdésekre kicsit később visszatérünk.
A 4. példa megoldása közben két fontos összefüggést is használtunk. Ezeket most általánosan is megfogalmazzuk, majd igazoljuk azokat.

3. tétel Ha (a_n) mértani sorozat, akkor minden n-re: $a_n=a_1q^{n-1}$.

Bizonyítás:
Teljes indukcióval a bizonyítás igen egyszerű, így azt az olvasóra bízzuk.
(A tétel azt fejezi ki, hogy az első tag és a hányados megadja a mértani sorozatot.)

4. tétel Ha s_n jelöli az (a_n) mértani sorozat első n tagjának összegét, tehát $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, akkor $q=1$ esetén $s_n=na_1$, míg $q\neq 1$ esetén $s_n=a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

Bizonyítás:
A tétel $q=1$-re vonatkozó része nyilvánvaló. Ha $q\neq 1$, akkor a 3. tétel felhasználásával:

$$qs_n=q\left(a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-1}\right)=s_n-a_1+a_1q^n,$$

$$s_n(q-1)=a_1\left(q^n-1\right)\Leftrightarrow s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Most visszatérünk a mértani sorozatok korlátosságának kérdésére.

5. tétel Azt állítjuk, hogy $|q|>1$ esetén egy mértani sorozat nem korlátos, míg $|q|\leq 1$ esetén a mértani sorozat korlátos.

Bizonyítás:
Ez utóbbi állítás egyszerűen következik abból, hogy $|a_n|=\left|a_1q^{n-1}\right|=|a_1|\cdot|q|^{n-1}\leq|a_1|$.
Ha $|q|>1$, akkor a korlátossággal kapcsolatos témakör 5. példájában látott egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$|a_{n+1}|=\left|a_1q^n\right|=|a_1||q|^n=|a_1|\left[1+\left(|q|-1\right)\right]^n\geq|a_1|\left[1+n\left(|q|-1\right)\right]=|a_1|+n|a_1|\left(|q|-1\right).$$

Mivel $|a_1|\left(|q|-1\right)=a$ egy adott pozitív szám, ezért na tetszőlegesen nagy értéket felvehet, amiből azonnal következik, hogy a mértani sorozat nem korlátos.

6. tétel Ha $|q|<1$, akkor az $a_n=aq^n$, $(n=0,1,2,\ldots)$ mértani sorozat konvergens, és határértéke 0.

Bizonyítás:

A tétel állításának bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, de rögzített. Olyan N számot keresünk, amelyre igaz, hogy $n > N$ esetén

$$|q|^n < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Az előző tételnél már hivatkozott egyenlőtlenség felhasználásával:

Mivel

$$1+n\left(\frac{1}{|q|}-1\right) > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|}-1\right)},$$

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left[1+\left(\frac{1}{|q|}-1\right)\right]^n \geq 1+n\left(\frac{1}{|q|}-1\right),$$

ezért $N = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|}-1\right)}$ megfelelő választás lesz.

5. példa Egy baktériumtenyészet úgy szaporodik, hogy óránként 20%-kal nő a baktériumok mennyisége. Hány óra kell ahhoz, hogy a számuk a kezdeti érték 1000-szeresére növekedjék? (Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg!)

6.7. ábra Baktériumok

Megoldás:

Tegyük fel, hogy kezdetben k darab baktérium volt a tenyészetben. Mivel óránkénti számukat egy $q = 1,2$ hányadosú mértani sorozat tagjai adják meg, ezért n óra múlva $k \cdot 1,2^n$ db a számuk. Meg kell oldanunk a

$$\frac{k \cdot 1,2^n}{k} = 1000 \Leftrightarrow 1,2^n = 1000$$

egyenletet. Mindkét oldal 10 alapú logaritmusát véve:

$$n \cdot \lg 1,2 = 3 \Leftrightarrow n = \frac{3}{\lg 1,2} \approx 37,89.$$

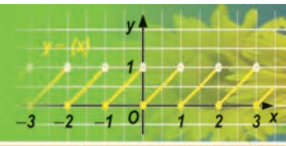
Tehát 38 óra kell ahhoz, hogy a baktériumok száma az 1000-szeresére növekedjék.

6. példa Egy mértani sorozat három egymást követő tagjának összege -13. Ha ezekhez a tagokhoz rendre 2-t, 3-at és 29-et adunk, akkor egy számtani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozat hányadosát!

Megoldás:

A számtani sorozat három egymást követő tagjának összege $-13+2+3+29=21$, így a számtani sorozat definíciója miatt a középső tag 7 lesz. Ezért a mértani sorozat három egymást követő tagja felírható $\frac{4}{q}$, 4, $4q$ formában, ahol q a hányados. Fennáll a következő egyenlet:

$$\frac{4}{q}+4+4q=-13.$$



Rendezés után:

$$4q^2 + 17q + 4 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai $q_1 = -4$, $q_2 = -\frac{1}{4}$. Ellenőrzésképpen írjuk fel a két megoldásnak megfelelő 3-3 tagot a mértani, illetve számtani sorozatból:

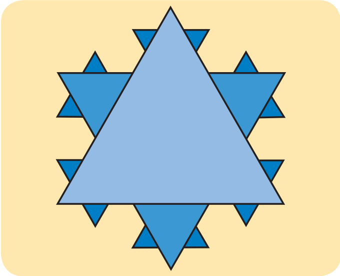
1) mértani: –1, 4, –16; számtani: 1, 7, 13;

2) mértani: –16, 4, –1; számtani: –14, 7, 28.

Láthatjuk, hogy mind a két megoldás teljesíti a feladat szövegében leírtakat.

7. példa Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög minden oldalát három egyenlő részre bontottuk, majd a középső szakaszok fölé kifelé szabályos háromszögeket emeltünk. Ezzel egy „csillag” keletkezett. Ismételjük meg az eljárást a kapott sokszög minden oldalára! Folytatva az eljárást, mekkora lesz az *n*-edik lépés után kapott síkidom kerülete?

(Az alakzatot Koch-féle hópehelynek nevezik és 1904-ben írták le először. Az ábrán különböző színárnyalatokkal van jelölve a kiindulási háromszög, valamint az első két lépés után kapott összes háromszög. Gondoljuk meg, hogy az eredeti háromszög köré írt köre tartalmazni fogja az összes síkidomot!)

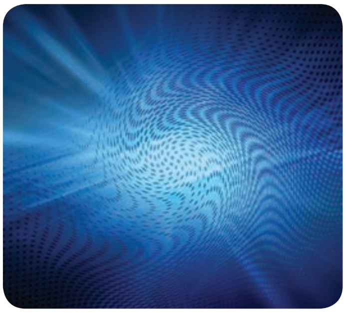


6.8. ábra A Koch-féle hópehely első néhány háromszöge

Megoldás:

Mivel egy adott szabályos háromszög valamely oldalán egy lépés után keletkező töröttvonal hossza a háromszög oldalhosszúságának $\frac{4}{3}$-szorosa, ezért egy lépés után ugyanez igaz a keletkező sokszög kerületére. Így az *n*-edik lépés után kapott síkidom kerülete $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ egység lesz.

A kerületet leíró sorozat felülről nem korlátos, annak értéke tehát tetszőlegesen nagy lehet! Ez azért is érdekes, mivel a sokszög határát leíró görbe sehol sem metszi át önmagát, viszont korlátos síkrészen fekszik. A Koch-féle hópehely szép példája az ún. fraktáloknak. Keressünk az internet segítségével további információkat a fraktálokról!



6.9. ábra Mesterséges fraktál

A 6.10. ábrán levő képeken egy mesterséges és két természetes fraktált láthatunk.

6.10. ábra További fraktálok

8. példa Legyen $a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$ Igazoljuk, hogy $a_n < 2$ minden n-re!

Megoldás:
A mértani sorozat első néhány tagjának összegére vonatkozó képletet alkalmazva:

$$(1)\quad \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1-k}}\right) = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^n}.$$

Rendezzük el az alábbi táblázat szerint a_n tagjait!

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{2^3} & + & \ldots & + & \frac{1}{2^n} \\
 & & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{2^3} & + & \ldots & + & \frac{1}{2^n} \\
 & & & & \frac{1}{2^3} & + & \ldots & + & \frac{1}{2^n} \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & \frac{1}{2^n}
\end{array}$$

A k-adik sorban álló összeg az (1) összefüggés szerint $\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^n}$, ezért

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+1}{2^n} < 2.$$

6.11. ábra Leonardo Fibonacci (1170–1250)

Most egy híres sorozatról lesz szó, amely nevének említése nélkül szerepelt már a sorozatok bevezetésekor felsorolt példák között. Az $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $(n \geq 3)$ rekurzióval adott sorozatot **Fibonacci-sorozat**nak nevezzük: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … . Nézzünk utána az interneten, hogy ki volt Fibonacci, illetve hol fordulnak elő pl. a természetben a sorozat tagjai, amelyeket Fibonacci-számoknak hívnak!

6.12. ábra Fibonacci-számok a természetben

9. példa Adjuk meg a Fibonacci-sorozat *n*-edik tagját az *n* függvényeként! (Olyan formulát keresünk tehát, amely *n* ismeretében közvetlenül megadja az *n*-edik Fibonacci-számot.)

Megoldás:
A rekurziós összefüggés érvényes marad, ha belevesszük a sorozatba az $a_0 = 0$ tagot. Ez kényelmesebbé teszi a számolást a későbbiekben. A most következő módszer megértése nem egyszerű feladat. Azért szerepeltetjük, mivel a Fibonacci-sorozat megadásában szereplőhöz hasonló, ún. lineáris rekurziók esetén nagyon hasznosnak bizonyult. (Hozzá kell tenni, hogy alkalmazásához általában szükség van az ún. komplex számok ismeretére.)
Keressünk olyan mértani sorozatokat, amelyek kielégítik a rekurziós összefüggést! Legyen $b_n = bq^n$, ahol *n* természetes szám, $b, q \neq 0$. Behelyettesítve:

$$bq^n = bq^{n-1} + bq^{n-2},$$
$$q^2 = q + 1,$$
$$q^2 - q - 1 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Tehát két különböző mértani sorozat van, amely eleget tesz a rekurziós összefüggésnek. Látjuk, hogy ezek egyike sem lehet azonos a Fibonacci-sorozattal. Megpróbáljuk a Fibonacci-sorozat tagjait $a_n = b_1 q_1^n + b_2 q_2^n$ alakban megkeresni, ahol b_1 és b_2 még nem ismert számok. A fentiek miatt ekkor teljesülni fog minden $n \geq 2$-re a rekurziós összefüggés, hiszen

$$b_1 q_1^n = b_1 q_1^{n-1} + b_1 q_1^{n-2},$$
$$b_2 q_2^n = b_2 q_2^{n-1} + b_2 q_2^{n-2},$$

ahonnan összeadás után:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Mivel a Fibonacci-sorozatban $a_0 = 0$ és $a_1 = 1$, így teljesülnie kell a következőknek:

$$0 = b_1 + b_2,$$
$$1 = b_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. A gondolatmenetből következik, hogy az $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ sorozat azonos a Fibonacci-sorozattal, így a kitűzött célt elértük.

Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg az $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ általános taggal adott sorozat határértékét!

6.13. ábra Múlik az idő

2. Pistike nem érti, hogy miért telik el egy óra hossza. Hiszen először eltelik az egy óra fele, azaz fél óra, majd a hátralévő idő fele, azaz negyed óra és így tovább: mindig eltelik a hátralévő idő fele, de marad még idő, aminek el kell telnie az egy órából. Adjunk magyarázatot!

(Az ilyen típusú paradoxonok már az ókorban ismertek voltak. Nézzünk utána az interneten annak, hogy ki volt **Zénon**, illetve miről szól Akhilleusz és a teknős története!)

3. Igaz-e, hogy ha egy mértani sorozat korlátos, akkor konvergens?

4. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n+1}{2^n}\right)=2$!

(A mértani sorozatoknál látott 8. példához kapcsolódik.)

5. Tekintsük az $a_0=4$, $a_1=-1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$, $(n=0,1,2,...)$ rekurzióval adott sorozatot! Állítsuk elő a_n-et az n függvényeként!

További feladatok:
Számtani sorozat:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 564-574. feladatok
Fibonacci-sorozat:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 595-598. feladatok
Mértani sorozat:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 575-589. feladatok

7. Kamatszámítás, járadékszámítás

7.1. ábra Tőzsdei árfolyamok

A mértani sorozatok alapvető szerepet játszanak a kamatszámítások, törlesztőrészlet-számítások, biztosítások, járadékszámítások matematikai problémáiban. Valójában az ún. pénzügyi matematika a matematikán belül már régen önálló területté vált, és pl. alapvető szerepet játszott a logaritmus fogalmának kialakulásában.

A témakörben sok olyan kifejezés van, melyekkel gyakran találkozunk a mindennapi életben, használjuk őket, sokszor anélkül, hogy jelentésükkel pontosan tisztában lennénk. Először ezek közül a legfontosabb fogalmakat kell megismernünk, megértenünk és megtanulnunk. Érdemes átismételni a százalékszámításról általános iskolában, illetve 9. osztályban tanultakat is.

A **tőke** a továbbiakban mindig a befektetett (kezdeti) pénzösszeget fogja jelenteni. A **kamat** az a pénzösszeg, amelyet adott idő elteltével vagy adott időközönként a befektetőnek fizet az, akinek a pénzt kölcsönadták. A **kamatláb** (általában ***p***-vel jelölik) egy %-ban adott szám, amely azt fejezi ki, hogy a kamat hány százaléka a befektetett összegnek:

$$p = \frac{\text{kamat}}{\text{tőke}} \cdot 100.$$

A napi szóhasználatban a kamat és a kamatláb kifejezések gyakran összemosódnak, mivel a kamat szót kamatláb értelemben használják: „12%-os évi kamatra felvett kölcsön”. Van, amikor ez az összemosódás nem okoz félreértést, de komoly zavar forrása is lehet. **Tőkésítés**nek nevezik azt, amikor egy időszak végén a kamatot a tőkéhez csatolják. (Használatos a **kamatjóváírás** kifejezés is.) Ez után már a következő időszakban a kamattal megnövelt tőke kamatozik tovább. Ezt **kamatos-kamat**-számításnak nevezzük. Tehát a tőkésítés utáni pénzösszeg: $\text{tőke} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

1. példa Év elején 2 millió forintot beteszünk egy bankba, évi 10%-os kamatláb mellett. Mennyi pénzünk lesz 5 év elteltével, ha minden év végén tőkésítenek? Hány %-kal több ez a betett összegnél?

Megoldás:
Az első év végén $2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1$, a második év végén $\left(2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1\right) \cdot 1{,}1 = 2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1^2$, végül az ötödik év végén $2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}1^5 \approx 3\,221\,000$ forintunk lesz a bankban. Ez az eredeti összegnél kb.

$$\frac{3\,221\,000 - 2\,000\,000}{2\,000\,000} \cdot 100 = \left(1{,}1^5 - 1\right) \cdot 100 \approx 61\%\text{-kal több.}$$

Könnyű észrevenni, hogy a tőkésítés hatására a befektetett pénz egy mértani sorozat szerint, exponenciálisan növekszik. Ha t jelöli a tőkét, p az adott időszakra vonatkozó kamatlábat, n pedig a kamatjóváírások számát (futamidő/időszakok száma), akkor

$$t_n = t\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

adja meg a futamidő végén a pénzösszeget. A kamatos kamatot egy híres amerikai üzletember a világ nyolcadik csodájának nevezte. Ennek bemutatására szolgál a következő feladat.

2. példa 1626-ban az indiánok 26 dollár értékű üveggyöngyért eladták Manhattan szigetét a holland telepeseknek. Ezt sokszor úgy emlegetik (az indiánok szempontjából persze) mint a világ legrosszabb üzletét. Tételezzük fel, hogy befektették volna az összeget évi átlagosan 6%-os kamatláb mellett. Mennyi pénzük lenne 2010-ben?

Megoldás:
A kamatos kamatra vonatkozó összefüggésbe helyettesítve $(t = 26, p = 6, n = 384)$ kapjuk:

$$t_{384} = 26 \cdot 1{,}06^{384} \approx 1{,}3565 \cdot 10^{11} = 135{,}65 \cdot 10^9,$$

ami 135,65 milliárd dollár.
A tanulság tehát az, hogy a hosszú távú befektetések igen jövedelmezőek tudnak lenni.

7.2. ábra Manhattan

3. példa Egyszer 507 000 forintot tettünk be a bankba, a kamatláb mindvégig évi 12% volt, és a futamidő végén 1 millió forintot vehettünk fel. Hány évig kamatozott a pénz, ha a kamatjóváírás évenként történt? (Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:
n jelöli az eltelt évek számát, akkor

$$10^6 = 5{,}07 \cdot 10^5 \cdot 1{,}12^n,$$

$$1{,}9724 = 1{,}12^n.$$

Mindkét oldal 10 alapú logaritmusát véve:

$$\lg 1{,}9724 = n \lg 1{,}12,$$

$$n = \frac{\lg 1{,}9724}{\lg 1{,}12} \approx 6.$$

Tehát hatéves futamidejű befektetésről volt szó.

4. példa Tíz éven keresztül minden év elején 100000 forintot helyezünk el egy bankban, ahol az éves kamatláb 8%. Mennyi pénzt vehetünk fel a tizedik év leteltével? (Közben természetesen ebből a pénzből semmit nem veszünk fel.)

Megoldás:
Most nemcsak azt kell figyelembe vennünk, hogy év végén a kamatot hozzáírják a tőkéhez, hanem azt is, hogy az év elején berakott összeggel ugyanez történik. Érdemes az év végi egyenlegeket elkészíteni!

Az 1. év végén: $10^5 \cdot 1{,}08$,

a 2. év végén: $\left(10^5 \cdot 1{,}08 + 10^5\right) \cdot 1{,}08 = 10^5 \cdot \left(1{,}08 + 1{,}08^2\right)$,

a 3. év végén: $\left(10^5 + 10^5 \cdot 1{,}08 + 10^5 \cdot 1{,}08^2\right) \cdot 1{,}08 = 10^5 \cdot \left(1{,}08 + 1{,}08^2 + 1{,}08^3\right)$.

7.3. ábra Bank

Ezek alapján már könnyű felírni a 10. év végére vonatkozó egyenleget:

$$10^5 \cdot \left(1{,}08 + 1{,}08^2 + \ldots + 1{,}08^{10}\right) = 10^5 \cdot 1{,}08 \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1} \approx 1564550.$$

Tehát a tizedik év végén 1 564 550 forintot vehetünk fel. (Felhasználtuk a mértani sorozat első *n* elemének összegére vonatkozó képletet.)

A számítások szempontjából fontos probléma, hogy ha pl. egy kölcsönt *p* százalékos évi kamatláb mellett veszünk fel, akkor havonta mekkora kamatlábbal számoljunk? A pénzügyi gyakorlatban ezt egyszerűen úgy tekintik, hogy a havi kamatláb $\frac{p}{12}$ százalék.

Végül egy igen fontos kérdést, az egyenlő részletekben történő törlesztést tárgyaljuk. (Az ilyen típusú hiteltörlesztési módot **annuitás**nak nevezik.) Általános képletet is levezethetnénk, ám ezt nem tesszük, csupán az eredményt közöljük.

5. példa Új lakást vásárolunk, amelyhez 10 millió forint összegű kedvezményes, évi 6%-os kamatlábbal rendelkező lakáshitelt veszünk fel 20 év futamidőre. A kölcsön törlesztése havonként történik, a hónap végén. Mennyi lesz a havi törlesztőrészlet, ha a kamatláb közben végig ugyanakkora marad?

Megoldás:
A havi kamatláb a fentiek szerint 0,5% lesz. Jelölje x a havi törlesztőrészlet nagyságát. A kölcsönből hátralévő összeg:
az 1. hónap végén: $10^7 \cdot 1{,}005 - x$,
a 2. hónap végén: $\left(10^7 \cdot 1{,}005 - x\right) \cdot 1{,}005 - x = 10^7 \cdot 1{,}005^2 - 1{,}005x - x$,
a 3. hónap végén: $\left(10^7 \cdot 1{,}005^2 - 1{,}005x - x\right) \cdot 1{,}005 - x = 10^7 \cdot 1{,}005^3 - 1{,}005^2 x - 1{,}005x - x$.
Ez alapján már könnyen felírhatjuk a 240. hónap végén hátralévő összeget (ami nyilván 0-val lesz egyenlő):

$$0 = 10^7 \cdot 1{,}005^{240} - 1{,}005^{239} x - \ldots - 1{,}005x - x = 10^7 \cdot 1{,}005^{240} - x\left(1 + 1{,}005 + \ldots + 1{,}005^{239}\right),$$

$$0 = 10^7 \cdot 1{,}005^{240} - x\frac{1{,}005^{240} - 1}{1{,}005 - 1},$$

$$x \approx 71\,643.$$

Tehát kb. 71 643 forint lesz a havi törlesztőrészlet. (Felhasználtuk a mértani sorozat első n elemének összegére vonatkozó képletet.)

7.4. ábra Nyugdíjasok

Ha bevetjük az $r = \dfrac{p}{100}$ jelölést, A jelöli a felvett hitelösszeget, n pedig a kamatlábhoz tartozó futamidőt, akkor a törlesztőrészlet:

$$x = A \cdot \frac{r}{1 - \dfrac{1}{(1+r)^n}}.$$

Ide kapcsolódik az ún. **életjáradék** és a **nyugdíj** kérdése. Ekkor egy adott összegből havonta fizetnek ki egyenlő összegeket, miközben a megmaradt pénz tovább kamatozik. A kifizetések száma nincs meghatározva. Könnyű meggondolni, hogy a probléma szoros kapcsolatban áll a törlesztőrészlet kérdésével. Ha feltételezzük, hogy a havi kamatláb állandó, akkor $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{(1+r)^n} = 0$ miatt a havi összeg $x = A \cdot r$. Ha tehát pl. egy 8 millió forintos megtakarítást életjáradékra váltunk át úgy, hogy a havi kamatláb 0,6%, akkor a járadék havi összege 48000 forint lesz.

Oldjuk meg!

1. Bankba raktunk 500 000 forintot 10 évre, évi 12%-os kamatláb mellett. Tegyük fel, hogy évi 9%-os az árszínvonal emelkedése átlagosan (infláció). A 10. év végén hányszorosa a bankból kivett pénz vásárlóértéke a 10 évvel korábbinak?
2. Minden év elején 250 000 forintot helyezünk el egy bankban 6 éven át. Mennyi pénzünk lesz a hatodik év végén, ha az éves kamatláb 9%?
3. Nyugdíjpénztári befizetéseink eredményeképpen 4 millió forintunk gyűlt össze. Az összeget egy 20 év futamidejű járadékra váltjuk, ahol a kifizetések évente történnek. Mekkora éves járadékot kapunk, ha feltételezzük, hogy a futamidő végéig évi 12%-os átlagos hozamot ér el a pénztár?

4. Bizonyítsuk be a törlesztőrészlettel kapcsolatban az 5. példa után található általános képletet!

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 583-586. feladatok

8. Néhány szó a végtelen sorokról

A matematikában a végtelennel kapcsolatos vizsgálódások az ókorban kezdődtek, és még napjainkban is tartanak. Ennek fontos részét képezte a XVII. századtól az ún. „végtelen összegek” vizsgálata. Mivel az ezzel kapcsolatos viták és eredmények döntő szerepet játszottak a határérték és a valós szám fogalmának kialakulásában, ezért vázolunk néhány eredményt erről a területről. Ezek közül nem mindegyik kötődik szorosan az érettségi tematikához, de több helyen felbukkannak a középiskolai matematikában. Gondolatébresztés gyanánt néhány példa következik.

8.1. ábra Végtelen sor

1. példa Vajon mi lehet az alábbi összegek értéke?

a) $1+1+1...$

b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$

d) $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+...$

e) $1-1+1-1+...$

f) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$

Megoldás:
Úgy érezzük, hogy az a)-val jelölt összeg bármilyen nagy lehet.

A b)-vel jelölt összeg kapcsán eszünkbe juthat az, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=\infty$.

A c)-vel és d)-vel jelölt összegek a mértani sorozatokhoz köthetőnek látszanak.
Az e)-vel jelölt összeg nagyon érdekes. Könnyen rá lehet vágni, hogy mivel írható $\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+...$ alakban, ezért 0-val egyenlő. Viszont írható $1+\underbrace{(-1+1)}_{0}+\underbrace{(-1+1)}_{0}+...$ alakban is, ami alapján meg úgy tűnik, hogy értéke 1. (Leibniz például úgy kívánta feloldani ezt a „paradoxont”, hogy az összeg értékét $\frac{1}{2}$-nek vette.)

Az f)-fel jelölt összeg értékéről még sejtést is igen nehéz megfogalmazni. Belátható, hogy az alább szereplő definíció szerint az összeg értéke $\ln 2$.
Számos vita és próbálkozás után végül is a matematikusok arra jutottak, hogy a „végtelen összegek” nem feltétlenül rendelkeznek számértékkel. El kellett dönteni, hogy mi alapján mondjuk azt, hogy egy formálisan

$$a_1+a_2+a_3+...=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

alakban írható összeg egyenlő egy számmal.

Definíció Ha számok végtelen sorozatának $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ összegét képezzük, akkor ún. végtelen sort kapunk.

(Ez azt jelenti, hogy egy végtelen sor mindig egy számsorozathoz kötődik.)

Definíció A $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ végtelen sor n-edik részletösszegén az $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ számot értjük, ahol $n = 1, 2, \ldots$ Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat konvergens, és a határértéke A (azaz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$), akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ végtelen sor konvergens, és az összege A. Jelölés: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$.

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ végtelen sor összege ∞. Jelölés: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$. Végül, ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ végtelen sor divergens.

(Gyakran előfordul, hogy a végtelen sorokkal kapcsolatban a $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ jelölést is használják, ez nem szokott félreértésre vezetni.)

Fontos megérteni, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ jelölés nem egy szám, hanem pusztán egy formális kifejezés.

A definíció alapján könnyen válaszolhatunk az 1. példában szereplő összegek közül néhánynak az értékére vonatkozó kérdésre:

a) Mivel $s_n = n$, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$.

b) Korábban igazoltuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

e) Mivel $s_{2n} = 0$ és $s_{2n+1} = 1$, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ divergens.

Definíció A $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ alakú sort mértani sornak nevezzük. $(a \neq 0,\ q \neq 0)$

Tétel A mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, ekkor összege $\frac{a}{1-q}$.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy $|q| < 1$! Mivel

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^n = a\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

továbbá a mértani sorozatoknál látott 4. tétel alapján $|q|<1$ esetén $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, ezért a határértékre vonatkozó ismereteink szerint

$$s_n \to a\frac{0-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Ha $|q|>1$, akkor q^n nem korlátos (ezt a mértani sorozatoknál igazoltuk), így s_n nem lehet konvergens. Annak végiggondolását, hogy a részletösszegek s_n sorozata $q=1$, illetve $q=-1$ esetén nem konvergens, az olvasóra bízzuk.

A fenti tétel, illetve a konvergencia definíciója alapján most már válaszolhatunk az 1. példában szereplő összegek közül a c) és d) értékére vonatkozó kérdésre:

c) Mivel $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ezért $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2.$

d) Mivel

$$s_n = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots+\frac{9}{10^n} = 9\left[\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right],$$

$$\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10}\cdot\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n-1}{\frac{1}{10}-1} \to \frac{1}{9},$$

ezért

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=1.$$

Ezek szerint akkor $0,\dot{9}=1$, amivel megválaszoltuk a valós számok tizedes tört alakjával kapcsolatos egyik nevezetes problémát! Ezen az úton továbbhaladva belátható, hogy a tizedes törtek felfoghatók végtelen soroknak, a velük végzett műveletek pedig visszavezethetők a sorokra értelmezett műveletekre, amelyek viszont a konvergens sorozatokkal végzett műveletekre vezethetők vissza. (Lásd a Valós szám fogalma című téma bevezetőjét!)

Tekintettel arra, hogy a sor konvergenciájának definíciója miatt egy sor összegére vonatkozó kérdés lényegében határérték-számítási probléma, ezért további példák bemutatása helyett szokásosan kitűzünk néhány feladatot.

Oldjuk meg!

1. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$!

2. Határozzuk meg az alábbi mértani sorok összegét!

a) $\sum_{n=0}^{\infty}2\left(\frac{3}{10}\right)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

3. Igazoljuk, hogy $1,1\dot{9}=\frac{6}{5}$!

4. Igazoljuk, hogy a mértani sorozatoknál szereplő ún. Koch-féle hópehely területe $\frac{2\sqrt{3}}{5}$!

9. Függvények (valós függvények)

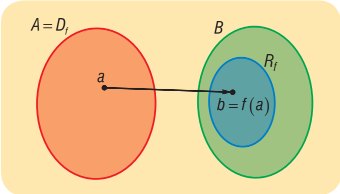
Korábbi tanulmányaink során már találkoztunk a függvény fogalmával, és megismertünk néhány nevezetes függvényt. Először röviden összefoglaljuk azokat az ismereteket, amelyekre feltétlenül szükség lesz a továbbiakban.

Definíció Ha az A halmaz mindegyik a eleméhez hozzárendeljük a B halmaz valamely b elemét, akkor a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

Jelölések:

$$f: A \to B, \quad b = f(a).$$

Az A halmazt az f függvény **értelmezési tartományá**nak nevezzük, jelölése: $A = D_f$. A B halmaz azon b elemei, amelyekhez van $a \in A$, hogy $b = f(a)$, alkotják az f függvény **értékkészletét**, jelölés: $R_f = \{f(a) : a \in A\}$.
(Fontos megjegyezni, hogy $R_f \subset B$, azaz R_f részhalmaza B-nek.)



9.1. ábra Függvény

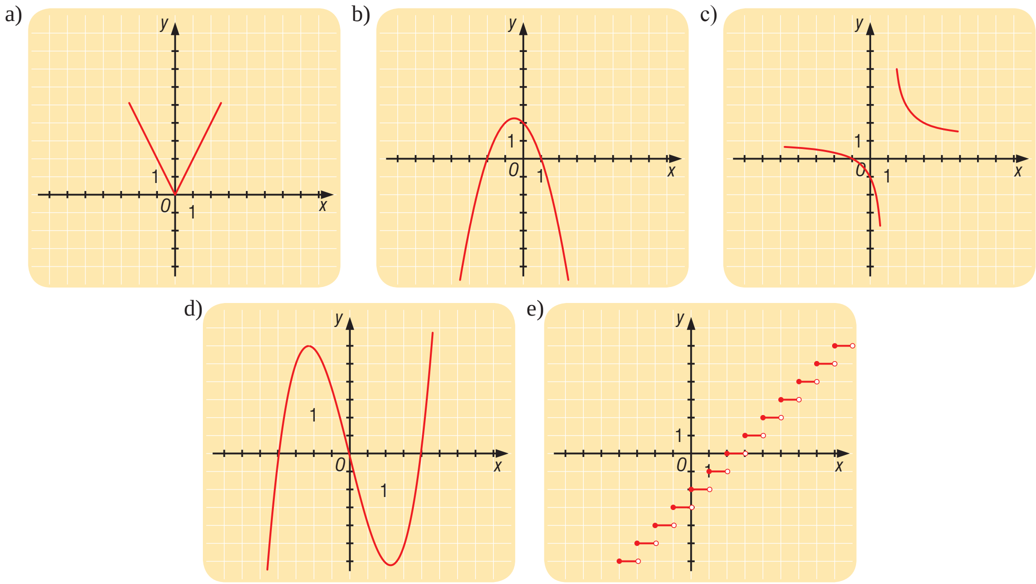
Az ***f* és *g* függvény**eket akkor tekintjük **azonos**nak (egyenlőnek), ha $D_f = D_g$, valamint $f(x) = g(x)$ teljesül minden $x \in D_f = D_g$ esetén.

A továbbiakban olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek a valós számok valamely részhalmazán értelmezettek, és értékkészletük részhalmaza a valós számok halmazának. Ezeket **valós függvények**nek nevezik. Ha tehát a későbbiekben a függvény szót használjuk, akkor azt mindig ebben az értelemben tesszük.
Tanultuk, hogy a valós függvényeket a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben szemléltetni lehet. Egy $f: A \to B$ függvény grafikonját azok az $(x; f(x))$ pontok alkotják, amelyekre $x \in A = D_f$. Az $y = f(x)$-et a **grafikon egyenleté**nek nevezzük. Természetesen a grafikon létezése nem feltétlenül jelenti azt, hogy ábrázolni is tudjuk az őt alkotó összes pontot! Erre szép példa az ún. **Dirichlet**-függvény:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$


9.2. ábra Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

1. példa Az alábbi grafikonok a korábbi tanulmányokban már szerepelt függvényekhez kapcsolódnak. Adjunk meg az egyes grafikonokhoz hozzárendelési utasítást!



9.3. ábra Függvénygrafikonok

Megoldás:

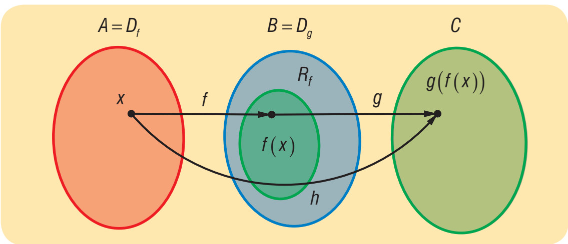
a) $f(x)=|2x|$, b) $f(x)=(x+2)\cdot(x-1)$, c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, d) $f(x)=x^3-4x$, e) $f(x)=[x-2]$.

Nagyon gyakran előfordul, hogy egy függvényt két (vagy több) függvény hozzárendeléseinek egymás utáni alkalmazásával kaphatunk meg. Innen származik az összetett függvény fogalma.

Definíció Az $f: A \to B$ és $g: B \to C$ függvények összetételén (kompozícióján) azt a $h: A \to C$ függvényt értjük, amelyre $D_h = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$, továbbá $h(x) = g(f(x))$ teljesül minden $x \in D_h$ esetén. A *g* függvényt külső, az *f* függvényt belső függvénynek nevezzük.

Jelölés:

$$h = g \circ f : h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



9.4. ábra Összetett függvény

Fontos megjegyezni, hogy általában $g \circ f \neq f \circ g$, amire a leírásnál is ügyelni kell! A fenti definíció segítségével könnyen megfogalmazhatjuk pl. a háromszoros függvényösszetétel módját.

2. példa Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^5-x.$ Adjuk meg a $h=g\circ f$ függvényt!

Megoldás:

Mivel $h(x)=g(f(x))$, ezért $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\left(x^2+1\right)^5-\left(x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)^5-x^2-1.$

A függvényösszetételek kapcsán gyakran előforduló jelenség, hogy a külső függvény értelmezési tartományára vonatkozó feltétel miatt (hogy ti. $R_f\subset D_g$) az összetételre kiszemelt függvények közül a belső függvény értelmezési tartományát úgymond szűkíteni kell.

Definíció Egy $f:D_f\to B$ függvény leszűkítésén értjük azt az f^* függvényt, amelyre $D_{f^*}\subset D_f$, továbbá $f^*(x)=f(x)$ teljesül minden $x\in D_{f^*}$ esetén.

Ennek a jelenségnek a fordítottja az, amikor egy függvény értelmezési tartományát kibővítjük.

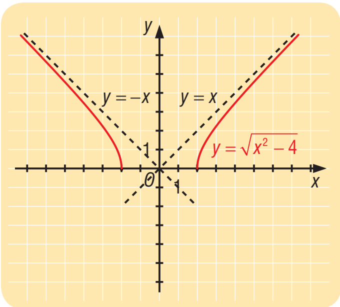
Definíció Egy $f:D_f\to B$ függvény kibővítésén értjük azt az f^* függvényt, amelyre $D_f\subset D_{f^*}$, továbbá $f^*(x)=f(x)$ teljesül minden $x\in D_f$ esetén.

Ezzel találkozhattunk például a hatványozás kapcsán, az exponenciális függvény fogalmának kialakításakor.

3. példa Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4$ és $g:\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{x}.$ Szűkítsük le az *f* függvényt egy olyan f^* függvényre, amelyre a $h=g\circ f^*$ összetett függvény a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett, továbbá adjuk meg a *h* függvényt! Vázoljuk fel a *h* függvény grafikonját!

Megoldás:

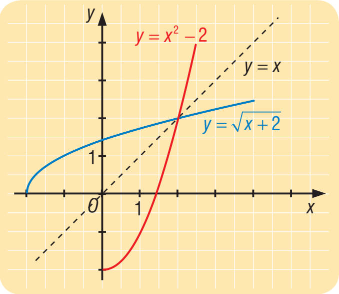
Mivel $g(f(x))=\sqrt{x^2-4}$, ezért legyen $D_{f^*}=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 2$ vagy $x\leq -2\}$ és $f^*(x)=x^2-4$. Könnyű látni, hogy ekkor $h:D_h=D_{f^*},\ h(x)=\sqrt{x^2-4}$ teljesíti a feltételeket. A grafikon felvázolása előtt érdemes átgondolni, hogy $h(x)=h(-x)$, minden $x\in D_{f^*}$ esetén, valamint azt, hogy „nagy” *x*-ek esetén $h(x)\approx|x|$.



9.5. ábra $g(\,f(x)\,)$

Most az összetett függvényekkel kapcsolatba hozható fontos fogalomról lesz szó.

4. példa Tekintsük az $f:\{x\in\mathbb{R}: x\geq -2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+2}$ függvényt. Adjunk meg olyan g függvényt (ha egyáltalán van ilyen), amelyre teljesül, hogy $R_f=D_g,\ D_f=R_g$, továbbá $f(g(x))=g(f(x))=x$! Ábrázoljuk az f és g függvények grafikonjait ugyanabban a koordináta-rendszerben!



9.6. ábra A két függvény grafikonja

Megoldás:

Könnyű látni, hogy $R_f=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$. Ha $g(x)=y$, akkor

$$f(g(x))=x \Leftrightarrow \sqrt{y+2}=x,$$

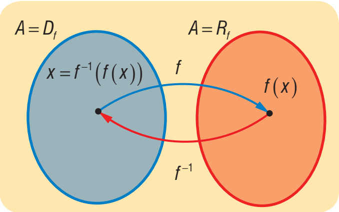
$$y=x^2-2,$$

$$g(x)=x^2-2.$$

Világos, hogy erre teljesülni fog $g(f(x))=x$ és $D_f=R_g$. A levezetés mutatja, hogy egyetlen, a feltételeknek megfelelő függvény van: $g:\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}, g(x)=x^2-2$.

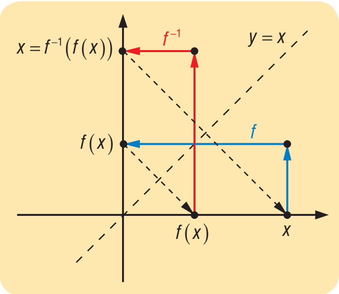
Definíció Az $f: A\to B$ függvényt kölcsönösen egyértelműnek nevezzük az A és B között, ha $R_f=B$, továbbá $x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$ esetén $f(x_1)\neq f(x_2)$. (Tehát a B halmaz minden elemének van „őse” az A halmazban, továbbá f különböző A-beli elemekhez különböző B-beli elemeket rendel.)

Definíció Ha az $f: A\to B$ függvény kölcsönösen egyértelmű az A és B között, akkor f^{-1} jelöli azt a függvényt, amelyre $D_{f^{-1}}=R_f,\ R_{f^{-1}}=D_f$, továbbá $f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$. Az ilyen f^{-1} függvény neve: az f **függvény inverze**.



9.7. ábra Inverz függvény

A definícióból azonnal látszik, hogy ha az f függvénynek létezik az f^{-1} inverze, akkor az f^{-1} függvénynek is létezik az inverze, és az éppen az f lesz. A 4. példa alapján sejthető, hogy az inverz függvény grafikonja és az eredeti függvény grafikonja a $y=x$ egyenesre tengelyesen szimmetrikusan helyezkedik el. Ennek bizonyítása a 9.7. ábráról könnyen leolvasható.



9.8. ábra Inverz függvény grafikonja

5. példa Legyen $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\},\ f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Határozzuk meg az f függvény inverzét, és vázoljuk fel grafikonjaikat közös koordináta-rendszerben!

Megoldás:

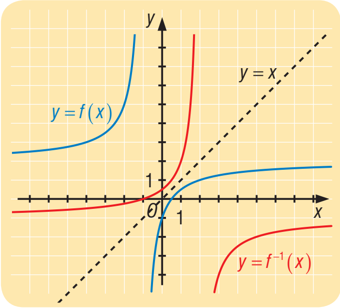
Legyen $f^{-1}(x)=y$, ekkor ekvivalens átalakításokkal:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Leftrightarrow \frac{2y-1}{y+1}=x,$$

$$2y-1=xy+x,$$

$$y=\frac{x+1}{-x+2}.$$

Így $f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{-x+2}$, hiszen könnyű ellenőrizni, hogy $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$, valamint $D_{f^{-1}}=R_f$, $R_{f^{-1}}=D_f$. (Grafikonok a 9.8. ábrán.)



9.9. ábra Inverz függvények grafikonjai

Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg az alábbi függvények inverzeit:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-3$, b) $g:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}, g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

2. Mutassunk példát olyan f és g függvényekre, amelyekre $g\circ f$ és $f\circ g$ is értelmezhető, de $g\circ f\neq f\circ g$!

3. Tekintsük az $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ és $g(x)=\sqrt{2x-1}$ hozzárendelési utasításokkal rendelkező függvényeket! Adjuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető $g\circ f$, valamint adjuk meg $g\circ f$ értékkészletét!

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok körében:

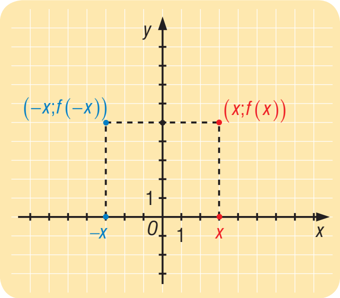
$$x^2-4=\sqrt{x+4}\,!$$

5. Adjunk meg olyan, a valós számok halmazán értelmezett függvényt, amely minden valós értéket pontosan három különböző helyen vesz fel!

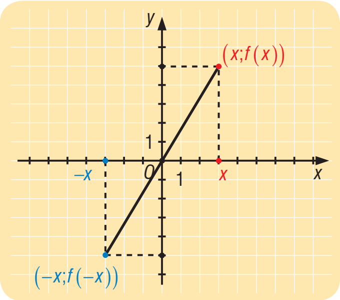
10. A valós függvények nevezetes tulajdonságai

Az eddigi tanulmányainkban már szerepelt, valamint a 9. lecke 1. példájában előforduló függvények grafikonjait nézegetve megfigyelhetők bizonyos szimmetriák, illetve egyéb nevezetes tulajdonságok. Ezek azért hasznosak, mert segítségükkel a függvények leírása egységesen kezelhetővé válik. Természetesen felmerülhet a kérdés, hogy miért éppen ezek a tulajdonságok érdekesek számunkra? Erre azt mondhatjuk, hogy a matematika fejlődése során ezek bizonyultak lényegesnek a függvények jellemzésének szempontjából. (Természetesen vannak olyan nevezetes tulajdonságok is, amelyek lényegesek, de a középiskolai szintet meghaladja a tárgyalásuk, ezért itt nem fognak szerepelni.)

Úgy látszik, hogy az 1. a) példa grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, míg az 1. d) grafikonja szimmetrikus az origóra. Ezekhez a tulajdonságokhoz kötődnek a következő meghatározások.



10.1. ábra Páros függvény grafikonja



10.2. ábra Páratlan függvény grafikonja

Definíció Az f függvény páros, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(x) = f(-x)$.

(Könnyű látni, hogy ekkor f grafikonja az y tengelyre szimmetrikus.)

Definíció Az f függvény páratlan, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $-f(x) = f(-x)$.

(Könnyű látni, hogy ekkor f grafikonja az origóra középpontosan szimmetrikus.)

1. példa Melyek a páros, illetve páratlan függvények az alábbi, a valós számokon értelmezett függvények közül?

a) $f(x) = |2x|$ b) $f(x) = x^3 - 4x$ c) $f(x) = \sin^3 x$

d) $f(x) = x^2 - x$ e) Dirichlet-függvény

Megoldás:

a) Páros, mert $|2(-x)| = |-2x| = |2x|$;

b) páratlan, mert $(-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x)$;

c) páratlan, mert $\sin^3(-x) = (-\sin x)^3 = -\sin^3 x$;

d) se nem páros, se nem páratlan;

e) páros.

2. példa Igazoljuk, hogy minden $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény előáll egy páros és egy páratlan függvény összegeként!

Megoldás:

Ha $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ páros és $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ páratlan, valamint $f(x) = g(x) + h(x)$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor

$$f(x) - g(x) = h(x),$$
$$f(-x) - g(x) = -h(x),$$

ahonnan

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ és } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Ellenőrzés: $g(x) + h(x) = f(x)$ és $g(x) = g(-x)$ nyilvánvaló,

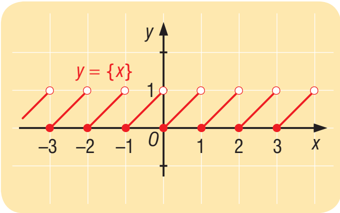
$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

Már 9. osztályban találkozhattunk az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x-[x]=\{x\}$$

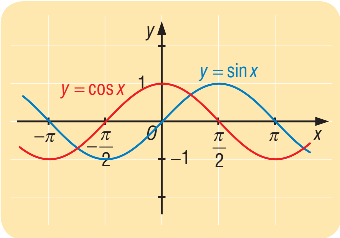
ún. törtrész-függvénnyel. Grafikonja a 10.3. ábrán látható.

A 10. osztályban szerepelt pl. a szinusz-, illetve a koszinusz-függvény (10.4. ábra). Ezek a függvények rendelkeznek egy közös tulajdonsággal, amelyet periodikusságnak hívunk.



10.3. ábra Törtrész-függvény

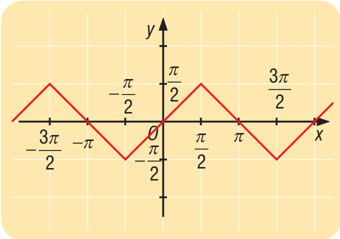
Definíció Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény periodikus, ha van olyan $d\neq 0$ valós szám, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x+d)=f(x)$. A *d* számot az *f* függvény periódusának nevezzük.



10.4. ábra Trigonometrikus függvények

Vegyük észre, hogy ha *d* az *f* periódusa, akkor $k\cdot d$ is periódus lesz minden $k\neq 0$ egész számra. Fontos tudni, hogy egy periodikus függvénynek nem feltétlenül van legkisebb pozitív periódusa! Gondoljunk pl. a konstans függvényekre, vagy a Dirichlet-függvényre, amelynek pl. minden pozitív racionális szám periódusa lesz, és világos, hogy ezek között nincsen legkisebb. Amikor van legkisebb pozitív periódus, akkor általában azzal célszerű dolgozni. (A periodikus függvény definíciója egyébként nem egységes a matematikai szakirodalomban, a fenti a leggyakrabban használt definíció.)

E szerint a definíció szerint a törtrész-függvény periodikus. Több periódusa is van, pl. az 1 vagy a –2. A trigonometrikus függvények is periodikusak, természetesen végtelen sok periódussal. A periodikusság felismerése azért hasznos egy adott függvény esetén, mivel ekkor a függvény leírása szempontjából elegendő egy $|d|$ hosszú intervallumon vizsgálni a függvényt. Példák periodikus függvények grafikonjaira a 10.5. és 10.6. ábrákon találhatók.

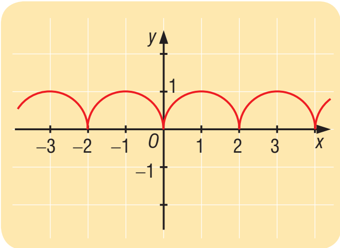


10.5. ábra Periodikus függvény

3. példa Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ függvény olyan, hogy minden *x*-re

$$f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}.$$

Igazoljuk, hogy *f* periodikus függvény!



10.6. ábra Periodikus függvény

Megoldás:

A feladat szövegében szereplő összefüggésben *x* helyére $(x+1)$-et írva:

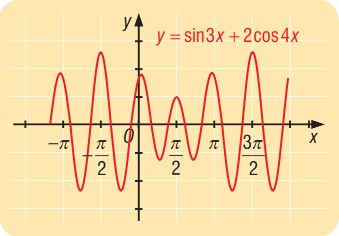
$$f(x+2)=\frac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1}=\frac{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=\frac{-2}{2f(x)}=-\frac{1}{f(x)}.$$

Írjunk most a kapott összefüggésben x helyére $(x+2)$-t:

$$f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x).$$

Ez pedig a definíció alapján azt jelenti, hogy az f függvény periodikus, továbbá a 4 az egyik periódusa.

4. példa Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin 3x+2\cos 4x$ periodikus függvény!



10.7. ábra Az f függvény grafikonja

Megoldás:
Vegyük észre, hogy

$$f(x+2\pi)=\sin(3x+6\pi)+2\cos(4x+8\pi)=$$
$$=\sin 3x+2\cos 4x=f(x),$$

felhasználva, hogy a 2π periódusa a szinusz- és a koszinuszfüggvénynek is. A definíció alapján tehát f periodikus és egyik periódusa a 2π.

A számhalmazok és a számsorozatok kapcsán előkerült már a **korlátosság** fogalma. Ez a tulajdonság a függvényeknél is igen lényeges, ezért itt is megfogalmazzuk.

Definíció A valós számok valamely részhalmazán értelmezett f függvény felülről korlátos, ha létezik olyan K szám, hogy $f(x)\le K$ teljesül minden $x\in D_f$-re.

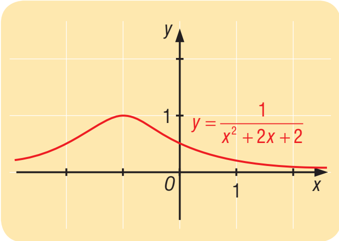
Definíció A valós számok valamely részhalmazán értelmezett f függvény alulról korlátos, ha létezik olyan k szám, hogy $f(x)\ge k$ teljesül minden $x\in D_f$-re.

Definíció A valós számok valamely részhalmazán értelmezett f függvényt korlátosnak nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

Megjegyzés:
Ha egy adott intervallumon *f* felülről korlátos, akkor a teljességi axióma miatt van legkisebb a felső korlátok között, azaz létezik a felső határ. (Hasonló állítás fogalmazható meg, ha *f* alulról korlátos.)

5. példa Korlátos-e az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}\quad \text{függvény?}$$



10.8. ábra Az 5. feladat grafikonja

Megoldás:
Mivel $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 1$, ezért

$$0<f(x)=\frac{1}{(x+1)^2+1}\leq 1,$$

ezért a függvény korlátos. Alsó korlát pl. a 0, felső korlát pl. az 1.

6. példa Korlátos-e az $f:[0;2[\,\to\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ függvény?

Megoldás:
Vegyük észre, hogy

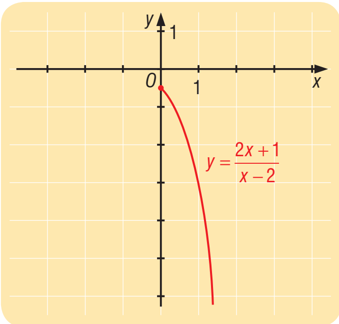
$$f(x)=\frac{2x+1}{x-2}=\frac{2(x-2)+5}{x-2}=\frac{2(x-2)}{x-2}+\frac{5}{x-2}=2-\frac{5}{2-x}.$$

Világos, hogy a függvény felülről korlátos, hiszen $x-2<0$, így $f(x)<0$. Az $f(x)$ az adott értelmezési tartományon alulról nem korlátos, ugyanis $\dfrac{5}{2-x}$ tetszőlegesen nagy lehet. A bizonyítás (feltehető, hogy $K\geq 2{,}5$):

$$\frac{5}{2-x}>K,$$

$$\frac{5}{K}>2-x,$$

$$x>2-\frac{5}{K}=x(K).$$



10.9. ábra A 6. feladat grafikonja

7. példa Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x^2+4x+5}\quad \text{függvényt!}$$

Megoldás:
Legyen $f(x)=y$! A nevező mindig pozitív. Rendezés után:

$$(1)\qquad (y-1)x^2+(4y-3)x+5y-3=0.$$

Vegyük figyelembe, hogy $y=1$ pontosan akkor teljesül, ha $x=-2$. A továbbiakban az $y\neq 1$ feltevéssel élünk. Az (1) egyenletben az y-t paraméternek tekintve pontosan akkor létezik hozzá valós x, amelyre az egyenlőség teljesül, ha az x-ben másodfokú egyenlet diszkriminánsa nemnegatív:

$$D=(4y-3)^2-4(y-1)(5y-3)=-4y^2+8y-3\geq 0.$$

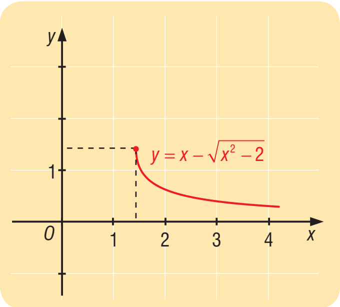
Egyenlőség esetén $y=\frac{1}{2}$, illetve $y=\frac{3}{2}$, így az egyenlőtlenség megoldása $\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{3}{2}$. Tehát a függvény korlátos, sőt az is kiderül ebből a megoldásból, hogy értékkészlete az $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ intervallum!

A korlátossággal kapcsolatos vizsgálatok során sokszor alkalmazhatók különféle becslési technikák, amelyekkel már korábbi tanulmányaink során találkozhattunk, utoljára pl. a sorozatoknál. A függvény grafikonjának valamilyen szerkesztőprogrammal való megrajzolása is alkalmas lehet arra, hogy sejtéseket fogalmazzunk meg a korlátossággal kapcsolatban, majd azokat be is bizonyítsuk.

8. példa Korlátos-e az $f:\left[\sqrt{2};\infty\right[\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sqrt{x^2-2}$ függvény?

1. megoldás:

A grafikon alapján sejthető, hogy $0<f(x)\leq\sqrt{2}$. A bizonyítások ekvivalens átalakításokkal egyszerűek.



10.10. ábra A vizsgált függvény grafikonja

Az alsó becslés:

$$0<x-\sqrt{x^2-2},$$
$$\sqrt{x^2-2}<x,$$
$$x^2-2<x^2,$$
$$-2<0.$$

A felső becslés:

$$x-\sqrt{x^2-2}\leq\sqrt{2},$$
$$x-\sqrt{2}\leq\sqrt{x^2-2},$$
$$x^2-2\sqrt{2}x+2\leq x^2-2,$$
$$\sqrt{2}\leq x.$$

2. megoldás:

Tekintsük az alábbi becsléseket:

$$0<f(x)=\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-2}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)}{x+\sqrt{x^2-2}}=\frac{2}{x+\sqrt{x^2-2}}\leq\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

A korlátossággal kapcsolatban álló nagyon fontos tulajdonság, ha a függvényértékek között van legnagyobb, illetve legkisebb, azaz a függvénynek van szélsőértéke.

MatEm_Book.indb 308 2012.07.05. 12:30:52

Definíció Azt mondjuk, hogy az f függvénynek (abszolút) maximuma van az $x_0 \in D_f$ helyen, ha bármely $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0) = M$. Az $M = \max\limits_{x \in D_f} f(x)$ számot az f (abszolút) maximumának nevezzük.

Ha létezik ilyen M szám, akkor a függvény természetesen felülről korlátos, és ilyenkor M a felső határral egyezik meg. Fordítva azonban nem feltétlenül van így: felülről korlátos függvénynek nem feltétlenül van abszolút maximuma.

(Tekintsük pl. az $f:]1; \infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt!)

Fontos lesz a későbbiekben egy másik, egy adott helyhez köthető maximumfogalom.

Definíció Azt mondjuk, hogy az f függvénynek helyi maximuma van az $x_0 \in D_f$ helyen, ha x_0-nak van olyan környezete, hogy az ebbe eső x-ekre f értelmezve van és $f(x) \leq f(x_0)$.

(A **helyi maximum** kifejezés mellett használatos a **lokális maximum** kifejezés is. A definícióban leírtak teljesülése esetén szokták azt is mondani, hogy az adott hely szigorú értelemben vett helyi maximumhely.)

A fenti definíciók mintájára adhatók meg a legkisebb értékre vonatkozó meghatározások.

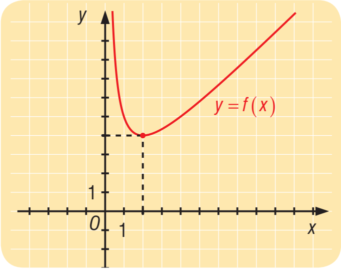
Definíció Azt mondjuk, hogy az f függvénynek (abszolút) minimuma van az $x_0 \in D_f$ helyen, ha bármely $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0) = m$. Az $m = \min\limits_{x \in D_f} f(x)$ számot az f (abszolút) minimumának nevezzük.

Ha létezik ilyen m szám, akkor a függvény természetesen alulról korlátos, és ilyenkor m az alsó határral egyezik meg.

Definíció Azt mondjuk, hogy az f függvénynek helyi minimuma van az $x_0 \in D_f$ helyen, ha x_0-nak van olyan környezete, hogy az ebbe eső x-ekre f értelmezve van és $f(x) \geq f(x_0)$.

(A **helyi minimum** kifejezés mellett használatos a **lokális minimum** kifejezés is. A definícióban leírtak teljesülése esetén szokták azt is mondani, hogy az adott hely szigorú értelemben vett helyi minimumhely.)

Egy függvény szélsőértékeinek megkeresése nagyon fontos, nemcsak elméleti, hanem gyakorlati szempontból is. Nem véletlen, hogy sokáig kerestek rá általánosan alkalmazható módszert, amelynek kidolgozása az analízis egyik kiemelkedő eredménye. Ezzel később részletesebben is megismerkedünk. Az alábbiakban bemutatunk néhány példát **elemi módszerekkel való szélsőérték-vizsgálatra**. Ezek alkalmazásához jól kell ismerni a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségeket, továbbá találékonyságot és nagy gyakorlatot igényelnek. Akárcsak a korlátosságra vonatkozó kérdésekben, itt is sokszor segít, ha a függvény grafikonját szerkesztőprogrammal megrajzoljuk.



10.11. ábra A 9. példában vizsgált függvény

9. példa Határozzuk meg az

$$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\quad f(x) = x + \frac{4}{x}$$

függvény (abszolút) minimális értékét és a minimumhelyét!

1. megoldás:
Rajzoljuk meg az $f(x)$ grafikonját a derékszögű koordinátarendszerben! A 10.11. ábra alapján könnyű megsejteni, hogy a minimumhelye 2, a minimum értéke pedig 4. Levezetéssel bizonyítunk:

$$x + \frac{4}{x} \geq 4,$$

$$x^2 + 4 \geq 4x,$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0,$$

$$(x-2)^2 \geq 0.$$

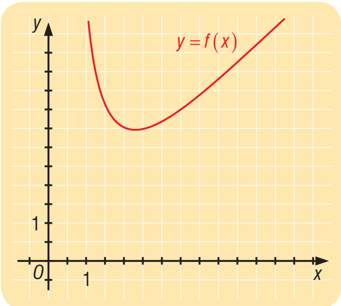
Átalakításaink mindvégig ekvivalensek voltak, így mindkét állításunkat beláttuk.

2. megoldás:
A hozzárendelési utasításban szereplő kifejezést kellene alulról becsülnünk egy számmal. Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség két változóra vonatkozó alakját:

$$\frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{4}{x}},$$

$$f(x) = x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = 2\left(\in D_f\right)$. Tehát f minimális értéke 4, a minimumhelye pedig $x = 2$.



10.12. ábra A 10. példában vizsgált függvény

10. példa Határozzuk meg az

$$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\quad f(x) = x + \frac{6}{x^2}$$

függvény (abszolút) minimális értékét és a minimumhelyét!

Megoldás:
Az előző példa 2. megoldásában látott ötlet itt nem segít, ugyanis

$$\frac{x + \frac{6}{x^2}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{6}{x^2}},$$

$$f(x) = x + \frac{6}{x^2} \geq 2\sqrt{\frac{6}{x}}$$

az $f(x)$-et csak egy másik függvénnyel becsüli meg alulról, amiből nem lehet semmire következtetni. Ügyes átalakítás után, alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség három változóra vonatkozó alakját:

$$\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{6}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{6}{x^2}},$$

$$f(x)=x+\frac{6}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\approx 3{,}434.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\frac{x}{2}=\frac{6}{x^2} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{12}\approx 2{,}29\left(\in D_f\right)$. Tehát *f* minimális értéke $3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, a minimumhelye pedig $x=\sqrt[3]{12}$. (Világos, hogy ezeket a számokat grafikonról lehetetlen leolvasni.)

11. példa Határozzuk meg az

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x+\frac{1}{x}-\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$$ függvény (abszolút) maximumát!

Megoldás:

Legyen $a=x+\frac{1}{x}$! A maximum keresése miatt feltehetjük, hogy $x>0$, ekkor $a\geq 2$ teljesül a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt. Így

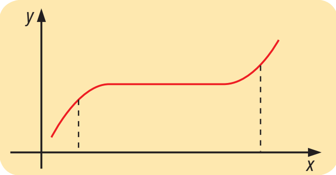
$$a-\sqrt{a^2-2}=\frac{2}{a+\sqrt{a^2-2}}\leq\frac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=2 \Leftrightarrow x=1\left(\in D_f\right)$. Tehát a feladatban szereplő függvény maximuma $2-\sqrt{2}$, amelyet csakis $x=1$ esetén vesz fel.

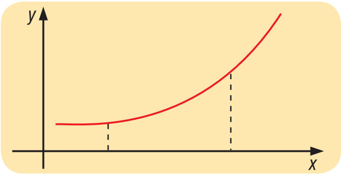
Megjegyzés:
Ha szélsőértéket becslés segítségével keresünk, akkor mindig ellenőrizni kell, hogy az egyenlőség fennáll-e, valamint az a hely, ahol igen, benne van-e a függvény értelmezési tartományában!

A korábbi tanulmányainkban találkoztunk már a függvény monotonitásának fogalmával. Most megismételjük a meghatározásokat és bemutatunk néhány elemi alkalmazást. A **monotonitás** vizsgálatára a későbbiekben látni fogunk egy általánosan alkalmazható módszert.

Definíció Az f függvény valamely $\Im\subset D_f$ intervallumon monoton növekvő, ha bármely $x_1, x_2\in\Im$, $x_1<x_2$ esetén $f(x_1)\leq f(x_2)$.

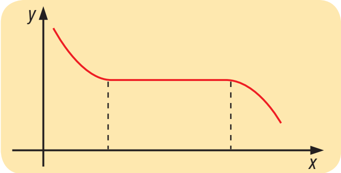


10.13. ábra Monoton növekvő függvény grafikonja



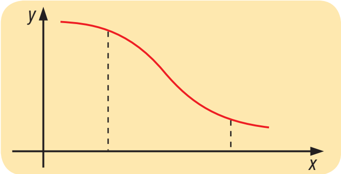
10.14. ábra Szigorúan monoton növekvő függvény grafikonja

Definíció Az f függvény valamely $\Im \subset D_f$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, ha bármely $x_1, x_2 \in \Im$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.



10.15. ábra Monoton csökkenő függvény grafikonja

Definíció Az f függvény valamely $\Im \subset D_f$ intervallumon monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in \Im$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.



10.16. ábra Szigorúan monoton csökkenő függvény grafikonja

Definíció Az f függvény valamely $\Im \subset D_f$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, ha bármely $x_1, x_2 \in \Im$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Egy adott intervallumon konstans függvény az adott intervallumon egyszerre monoton növekvő és monoton csökkenő. Érdekesség, hogy pl. a Dirichlet-függvény semmilyen intervallumon nem monoton növekvő, és nem is monoton csökkenő! (Miért?)

A monotonitással kapcsolatos vizsgálatokban is sokszor segít, ha számítógépes segítséget használunk.

12. példa Legyen $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Vizsgáljuk meg $f(x)$ monotonitását a $]-\infty; -1[$, illetve a $]-1; \infty[$ intervallumon!

Megoldás:

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}.$$

Ha $x_1 < x_2 < -1$, akkor $1 + x_1 < 1 + x_2 < 0$, ezért

$$\frac{3}{1+x_1} > \frac{3}{1+x_2} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{1+x_1} < 2 - \frac{3}{1+x_2}.$$

Tehát a $]-\infty; -1[$ intervallumon f szigorúan monoton növekvő. Ha $-1 < x_1 < x_2$, akkor $0 < 1 + x_1 < 1 + x_2$, ezért

$$\frac{3}{1+x_1} > \frac{3}{1+x_2} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{1+x_1} < 2 - \frac{3}{1+x_2}.$$

Tehát a $]-1; \infty[$ intervallumon f szintén szigorúan monoton növekvő.

13. példa Vizsgáljuk meg az $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x + \frac{4}{x}$ függvény monotonitási tulajdonságait az értelmezési tartományon!

Megoldás:
A függvény grafikonját a 9. példánál láthatjuk. Ez alapján könnyű sejtéseket megfogalmazni. Tegyük fel, hogy $0 < x_1 < x_2 < 2$! Állítjuk, hogy f a $]0;2[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, azaz

$$x_1 + \frac{4}{x_1} > x_2 + \frac{4}{x_2},$$

$$(x_1 - x_2) - \left(\frac{4}{x_2} - \frac{4}{x_1}\right) > 0,$$

$$(x_1 - x_2) - 4(x_1 - x_2)\frac{1}{x_1 x_2} > 0,$$

$$(x_1 - x_2)\left(1 - \frac{4}{x_1 x_2}\right) > 0.$$

Mivel $0 < x_1 x_2 < 4$, ezért az utolsó egyenlőtlenségben mindkét tényező negatív, tehát az egyenlőtlenség teljesül. Mivel ekvivalens egyenlőtlenségekkel dolgoztunk, ezért ezzel állításunkat igazoltuk.
Tegyük fel, hogy $2 < x_1 < x_2$! Állítjuk, hogy f a $]2;\infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, azaz

$$x_1 + \frac{4}{x_1} < x_2 + \frac{4}{x_2}.$$

Mivel ezzel ekvivalens

$$(x_1 - x_2)\left(1 - \frac{4}{x_1 x_2}\right) < 0,$$

továbbá $x_1 x_2 > 4$ miatt itt a két tényező előjele ellentétes, tehát az egyenlőtlenség teljesül, ezért állításunkat igazoltuk.

Figyeljük meg, hogy 2-től balra a függvény csökkenő, a jobb oldalán pedig növekvő, így a 2 minimumhely lesz. Ez egy igen fontos megfigyelés, amelyre vissza fogunk még térni. Elég csak az előző példa megoldására ránézni, hogy kijelenthessük: a monotonitás vizsgálata elemi úton általában igen nehézkes és hosszadalmas.

Oldjuk meg!

1. Adjunk meg olyan periodikus függvényt, amely nem korlátos!

2. Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right)$ függvény nem periodikus!

3. Korlátos-e az $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ függvény alulról, illetve felülről? Mi lesz a legkisebb felső korlát (felső határ)?

4. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ függvény maximumát, illetve minimumát!

5. Az azonos területű téglalapok közül melyiknek lesz legkisebb a kerülete?

6. Határozzuk meg az $f:[-3;5]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}$ függvény maximumát, illetve minimumát!

7. Határozzuk meg az $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-2x^3$ függvény maximális értékét és a maximumhelyét!

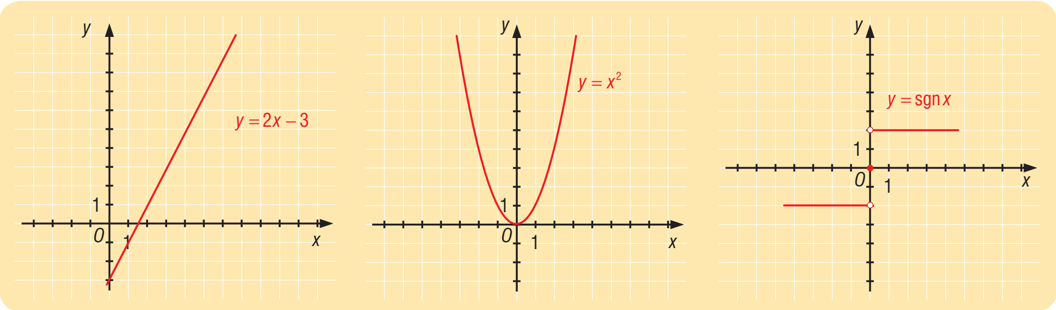
8. Vizsgáljuk meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$, b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x+2$,

c) $f:]-3;5[\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4x+7}{3x+10}$, d) $f:[-1;2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$.

11. A függvények folytonossága

Már általános iskolában ábrázoltunk függvényekhez tartozó grafikonokat, pl. $f(x)=2x-3$, $f(x)=x^2$ esetén:

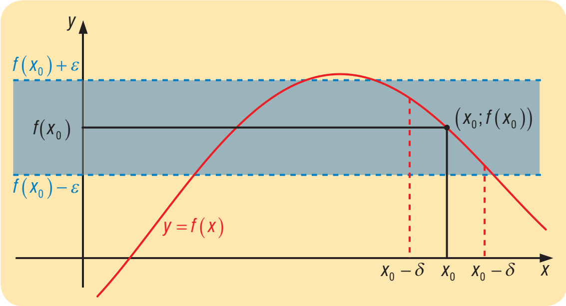


11.1. ábra Ismert grafikonok

Természetesnek vettük, hogy a grafikonok folytonos vonallal megrajzolhatók. Bár úgy érezzük, ez már ezeknél a függvényeknél sem nyilvánvaló, bonyolultabb hozzárendelések esetén pedig még kevésbé. Találkoztunk már olyan függvényekkel is, amelyek grafikonja nem rajzolható meg folytonos vonallal, pl. $f(x)=\operatorname{sgn} x$. (Az ún. előjelfüggvény.)

Még rosszabbul viselkedik pl. a Dirichlet-függvény, amelynek grafikonja a 0 és 1 értékeket felvéve „ugrál". Szemléletesen úgy tekintjük, hogy egy f függvény grafikonja az $(x_0; f(x_0))$ ponton akkor halad át folytonosan, ha $f(x)$ közel van $f(x_0)$-hoz, feltéve, hogy x kevéssé tér el x_0-tól. Precízen megfogalmazva:

Definíció Legyen f értelmezve az x_0 valamely környezetében. Az f folytonos az x_0 helyen, ha bármely $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan (általában ε-tól és x_0-tól függő) δ, hogy $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, ha $|x-x_0|<\delta$. (Ezt szokás Cauchy-féle definíciónak nevezni.)



11.2. ábra A Cauchy-féle definíció

A definíció jelentésének megértésében segít a 11.2. ábra. Fontos megérteni, hogy ha létezik a definícióban szereplő δ szám, akkor bármely $0<\delta'<\delta$ szám is megfelelő. A folytonosság pontbeli tulajdonság. Azt mondjuk, hogy az f függvény az $\mathfrak{I} \subset D_f$ nyílt intervallumon folytonos, ha annak minden pontjában folytonos.

(Zárt intervallumon való folytonossághoz definiálni kell az ún. balról, illetve jobbról való folytonosságot, de ezzel mi a továbbiakban nem foglalkozunk.)

Az alkalmazhatóság szempontjából sokszor hasznosabb a következő meghatározás:

Definíció Legyen f értelmezve az x_0 valamely környezetében. Az f folytonos az x_0 helyen, ha bármely $x_n \to x_0$ helysorozat esetén $\left(x_n \in D_f\right)$ $f\left(x_n\right) \to f\left(x_0\right)$. (Ezt szokás Heine-féle definíciónak nevezni.)

Megmutatható, hogy a két definíció ekvivalens, a bizonyítás azonban nem egyszerű.
Találkoztunk korábban az összetett függvény fogalmával.

Tétel Ha a $h=g \circ f$ összetett függvény olyan, hogy az f belső függvény folytonos az x_0 helyen, a g külső függvény pedig folytonos az $f\left(x_0\right)$ helyen, akkor h folytonos lesz az x_0 helyen.

Bizonyítás:
A folytonosság Heine-féle definíciójából a tétel állítása azonnal adódik.

1. példa Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, a valós számokon értelmezett függvények mindenütt folytonosak:
a) $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$ adott szám; b) $f(x)=x$; c) $f(x)=x^2$.

Megoldás:
Legyen x_0 egy rögzített hely, és használjuk a másodikként kimondott definíciót!
a) $f\left(x_n\right)=f\left(x_0\right)=c$ miatt az állítás nyilvánvaló;
b), c) a határérték-számításnál tanultak szerint $x_n \to x_0$ esetén

$$f\left(x_n\right)=x_n \to x_0=f\left(x_0\right), \quad f\left(x_n\right)=x_n^2 \to x_0^2=f\left(x_0\right).$$

(Természetesen a Cauchy-féle definíció segítségével is könnyen igazolható a folytonosság mindhárom esetben.)

2. példa Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sgn} x$ függvény a 0 hely kivételével mindenütt folytonos!

Megoldás:
Az 1. a) példa miatt világos, hogy ha $x_0 \neq 0$, akkor az x_0 helyen a sgn x függvény folytonos. Most igazoljuk, hogy a 0-ban nem folytonos. Ha folytonos, akkor $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez is létezik δ úgy, hogy $|x-0| < \delta$ esetén $|\operatorname{sgn} x - 0| < \frac{1}{2}$. Mivel $x \neq 0$ esetén $|\operatorname{sgn} x| = 1$, ezért ellentmondásra jutottunk.

3. példda Igazoljuk, hogy a Dirichlet-függvény egyetlen pontban sem folytonos!

Megoldás:
Legyen x_0 egy rögzített hely, és tegyük fel, hogy $x_0 \in \mathbb{Q}$! Ha a függvény folytonos az x_0 helyen, akkor $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez is létezik δ úgy, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$. Mivel bármely két valós szám között van irracionális szám, így ha $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ irracionális, akkor

$$\frac{1}{2} > |f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1,$$

ami ellentmondás, tehát a Dirichlet-függvény racionális helyen nem folytonos. Hasonlóan megy annak a bizonyítása is, hogy irracionális helyen sem folytonos.

A folytonos függvények grafikonjai „nem nagyon ugrálhatnak” egy adott pont közelében. Ezt **fokozatos változás tulajdonságnak** szokták hívni. A következő példa állításában is ez jelenik meg.

4. példa Az f függvény folytonos az x_0 helyen, és $f(x_0) > 0$. Igazoljuk, hogy ekkor x_0-nak van olyan környezete, ahol $f(x) > 0$!

11.3. ábra Folytonosság

Megoldás:

Legyen $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Innen $|a| \geq a$ miatt, ha $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$f(x) \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

A továbbiakban felsorolunk néhány tételt, amelyek folytonos függvényekre érvényesek és jól használhatók függvények folytonosságának igazolásakor. Ezeknek a bizonyítása a folytonosság Heine-féle definíciója és a konvergens sorozatokkal végzett műveletek alapján nyilvánvaló. (Feltesszük, hogy a függvények értelmezési tartományainak közös része tartalmazza az x_0 hely valamely környezetét.)

Tétel Ha f és g folytonosak x_0-ban, akkor $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ is folytonos x_0-ban, továbbá, ha $g(x_0) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.

Ezekből a tételekből azonnal következik például, hogy

Tétel a polinomfüggvények mindenütt folytonosak,

hiszen láttuk, hogy $f(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$ és $f(x)=x$ mindenütt folytonosak.

5. példa Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+4x+5}$ függvény mindenütt folytonos!

Megoldás:
Alkalmazzuk a folytonos függvényekkel végzett műveletekre vonatkozó tételeket!

Oldjuk meg!

1. Hol folytonos az $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=\left(2x^2-x-1\right)^{2010}$ függvény?

2. Hol folytonos az

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$$

függvény?

3. Hol folytonos a törtrész-függvény?

4. Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$ függvény az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos!

5. Legyen

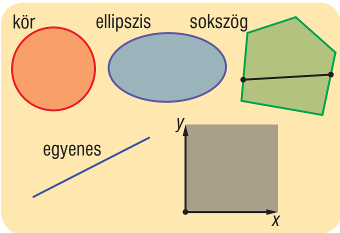
$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy f folytonos a 0 helyen, de sehol máshol nem folytonos!

12. A konvex és konkáv függvények

Geometriai tanulmányaink során találkoztunk az ún. konvex alakzat fogalmával.

Definíció Akkor mondjuk az alakzatot konvexnek, ha bármely két pontját összekötő szakasz összes pontja is hozzá tartozik az alakzathoz.

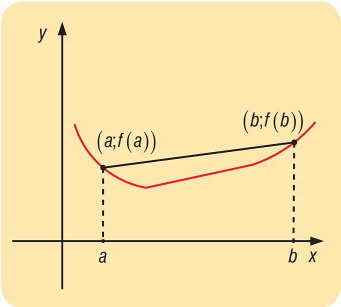


12.1. ábra Konvex ponthalmazok

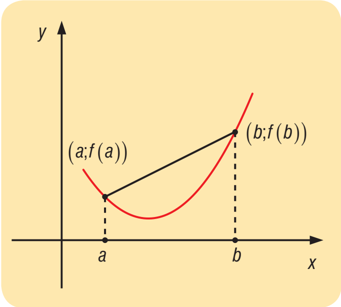
Természetesen legtöbbször valamilyen közismert síkidom kapcsán használtuk a konvex jelzőt, pl. konvex négyszög. A definíció alapján azonban könnyű látni, hogy pl. egy egyenes, vagy a koordináta-rendszer első síknegyede is konvex alakzat. Ha egy alakzat nem konvex, akkor konkáv.

Függvények esetén a konvex, illetve konkáv jelző egy adott intervallum esetén a grafikon két pontját összekötő szakasz (ezt húrnak nevezik) és a grafikon viszonyával áll kapcsolatban.

Definíció Az f függvény konvex az $\mathfrak{I}$ intervallumon, ha minden $a,b \in \mathfrak{I}$, $a<b$ esetén az $(a; f(a))$ és $(b; f(b))$ pontokat összekötő húr a grafikon fölött vagy magán a grafikonon van. Szigorúan konvexnek mondjuk, ha a húr a végpontjainak kivételével a grafikon fölött van.



12.2. ábra Konvex függvény



12.3. ábra Szigorúan konvex függvény

A konkáv függvényre vonatkozó meghatározásokat úgy kapjuk, hogy a fenti definícióban a fölött szót az alatt szóra cseréljük.

A konvex szó egyébként domborút jelent, így sokszor használják az „alulról nézve konvex” kifejezést is. Ez rámutat a geometriában megismert konvexitás fogalmával való kapcsolatra.

A definícióban leírtak bizonyítása egy adott függvény adott intervallumon való konvexitásának kimutatására általában nem könnyű. Koordináta-geometriai tanulmányainkból ismert, hogy az $(a; f(a))$ és $(b; f(b))$ pontokat összekötő húr egyenlete:

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

A konvexség teljesüléséhez tehát azt kellene igazolnunk, hogy

$$f(x)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

teljesül minden $a,b\in\mathfrak{I}$, $a<x<b$ esetén.

1. példa Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ függvény bármely intervallumon szigorúan konvex!

Megoldás:

Tegyük fel, hogy $a,b\in\mathfrak{I}$, $a<x<b$. Ekkor be kell bizonyítanunk, hogy

$$x^2<\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)+a^2.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$x^2-a^2<(b+a)\cdot(x-a),$$

$$(x-a)\cdot((x+a)-(b+a))<0,$$

$$(x-a)\cdot(x-b)<0.$$

MatEm_Book.indb 318 2012.07.05. 12:32:08

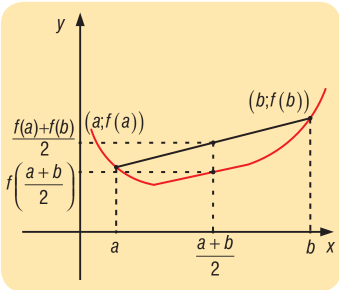
Ez $a < x < b$ miatt nyilvánvaló módon igaz, így kimondhatjuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvény szigorúan konvex.

A számolás során fellépő nehézségek bonyolultabb hozzárendelések esetén igen nagyok, ezért próbáltak olyan feltételeket keresni, amelyek biztosítják a konvexitást, ugyanakkor sokkal könnyebb velük számolni. Ezek közül az egyik nevezetes tétel a következő.

Tétel Tegyük fel, hogy az f folytonos az $\mathfrak{I}$ intervallumon. Ekkor f pontosan akkor konvex, ha tetszőleges $a, b \in \mathfrak{I}$ esetén

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

A tételt nem bizonyítjuk. (A tételben szereplő egyenlőtlenség teljesülése esetén szokás egy adott intervallumon a függvényt gyengén konvexnek, vagy **Jensen-konvex**nek nevezni.) Ha $\le$ helyett $<$ is igaz ($a \ne b$ mellett), akkor az f szigorúan konvex. A tétel szemléletes jelentése az, hogy bármely két pontot összekötő húr felezési pontja felette van a grafikonnak, vagy a grafikonra esik.



12.4. ábra Gyengén konvex függvény

2. példa Igazoljuk, hogy az $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvény az egész értelmezési tartományon szigorúan konvex!

Megoldás:
Mivel tudjuk, hogy a polinomfüggvények mindenütt folytonosak, így alkalmazhatjuk a fenti tételt. Legyen $0 < a < b$, ekkor azt kell belátnunk, hogy:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 < \frac{a^3 + b^3}{2}.$$

Azonosságok felhasználásával, ekvivalens lépéseket végezve:

$$\frac{(a+b)^3}{8} < \frac{(a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right)}{2},$$

$$0 < (a+b)\cdot\left[4a^2 - 4ab + 4b^2 - (a+b)^2\right],$$

$$0 < 3(a+b)\cdot(a-b)^2.$$

A kapott egyenlőtlenség triviálisan igaz, így a feladat állítását beláttuk.

3. példa Igazoljuk, hogy az $f:\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$ függvény az egész értelmezési tartományon szigorúan konkáv!

Megoldás:
Könnyen belátható, hogy f az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos. (Ezt feladatként tűztük ki a folytonos függvényekkel kapcsolatban.) Ezért elegendő azt belátnunk, hogy $0\leq a<b$ esetén

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}}>\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\frac{a+b}{2}>\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4},$$

$$a-2\sqrt{ab}+b>0,$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0.$$

A kapott egyenlőtlenség nyilván igaz, így a feladat állítását beláttuk.

Ha egy adott függvénygrafikont eltolunk, akkor az nem befolyásolja a grafikon alakját, így konvexitását sem. Tehát pl. az $f:\{x\in\mathbb{R}: x\geq 1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x-1}$ függvény az egész értelmezési tartományon szigorúan konkáv lesz.

Egy adott függvény valamely intervallumban meglévő konvex, illetve konkáv tulajdonsága áll számos egyenlőtlenség hátterében. Bizonyítás nélkül megemlítünk egy fontos egyenlőtlenséget, amelynek a segítségével számos nevezetes egyenlőtlenség igazolható az algebrában, illetve a geometriában.

Tétel Ha az f függvény konvex az $\mathfrak{I}$ intervallumban, akkor minden $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathfrak{I}$ esetén

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Ha f konkáv, akkor fordított irányú egyenlőtlenség érvényes. Sokszor **Jensen-egyenlőtlenség** néven is szokták említeni a tételben megfogalmazott állítást.

Oldjuk meg!

1. Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ függvény bármely $\mathfrak{I}\subset\mathbb{R}$ intervallumon konvex!

2. Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ függvény bármely $\mathfrak{I}\subset\mathbb{R}^+$ intervallumon konvex!

3. Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x+2$ függvény bármely $\mathfrak{I}\subset\mathbb{R}$ intervallumon konvex!

4. Igazoljuk a Jensen-egyenlőtlenség felhasználásával a számtani és négyzetes közepek között fennálló egyenlőtlenséget, tehát azt, hogy bármely $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}},$$

ahol n pozitív egész.

5. Az a, b, c valós számok összege 7, és egyik sem kisebb, mint 1. Igazoljuk, hogy ekkor

$$2 \le \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \le 2\sqrt{3}!$$

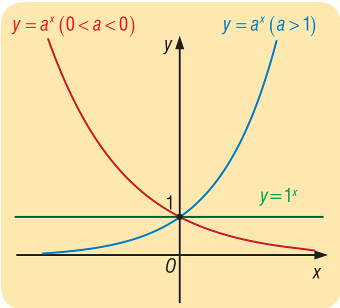
13. Az exponenciális függvény és a logaritmusfüggvény

A valós kitevős hatványozás tárgyalásánál láttuk, hogyan értelmezhető adott $a > 0$ szám esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számra a^x. Most megadjuk az exponenciális függvény definícióját, és megvizsgáljuk a függvény legfontosabb tulajdonságait.

Definíció Egy adott $a > 0$ számra az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$ függvényt a alapú exponenciális függvénynek nevezzük.

A definíció szerint az $x \mapsto 1^x$ hozzárendelés, tehát az azonosan 1 függvény is az exponenciális függvények közé tartozik. (Sok helyen ezt a függvényt nem sorolják be az exponenciális függvények közé.)

A valós kitevős hatványozás című részben szereplő 4. tétel azt mondja ki, hogy **az exponenciális függvény pozitív értékű.** Az 5. tétel szerint $\boldsymbol{a > 1}$ **esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő**, míg $\boldsymbol{0 < a < 1}$ **esetén szigorúan monoton csökkenő.**



13.1. ábra Exponenciális függvény

Ha $a > 1$, akkor a korlátos sorozatokkal foglalkozó anyagrész 6. példája alapján, ha n pozitív egész szám, akkor

$$a^n = \left[1 + (a-1)\right]^n \ge 1 + n(a-1).$$

Könnyű látni, hogy $1 + n \cdot (a-1)$ tetszőlegesen nagy értéket felvehet, ha n elég nagy, így **az exponenciális függvény felülről nem korlátos.** Ha $0 < a < 1$, akkor $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$-ra alkalmazva az előző gondolatmenetet kapjuk, hogy az exponenciális függvény ekkor sem korlátos.

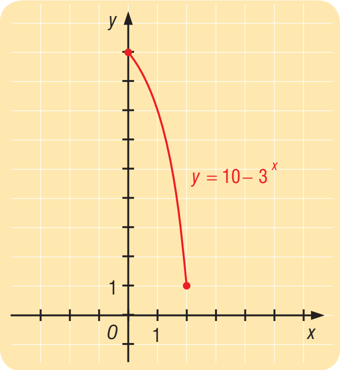
Bizonyítható, hogy ha $a > 0$ és $x_n \to x_0$, akkor $a^{x_n} \to a^{x_0}$, ez pedig azt jelenti, hogy **az exponenciális függvény mindenütt folytonos**. Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza. **Az exponenciális függvény $\boldsymbol{a \ne 1}$ esetén szigorúan konvex.**

Ennek bizonyítása a konvexitásról szóló 1. tétel alapján a következő módon lehetséges. Legyen $a > 0$, $a \neq 1$, továbbá x, $y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$a^{\frac{x+y}{2}} = \sqrt{a^x \cdot a^y} < \frac{a^x + a^y}{2}.$$

Tekintettel arra, hogy a függvény folytonos, a kapott egyenlőtlenségből következik az állítás.

1. példa a) Ábrázoljuk az $f:[0;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 10 - 3^x$ függvényt!
b) Állapítsuk meg a függvény értékkészletét!
c) Melyek azok a helyek, ahol a függvény 7-nél nagyobb értékeket vesz fel?



13.2. ábra Az 1. példában szereplő függvény

Megoldás:

Mivel $0 \leq x \leq 2$ esetén az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $1 \leq 3^x \leq 9$, így az értékkészlet: $[1;9]$.

Mivel az $x \mapsto 3^x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért

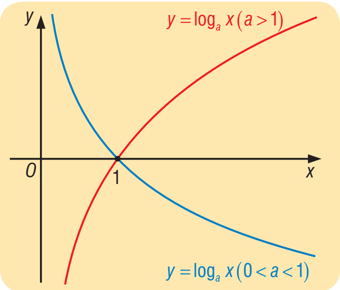
$$10 - 3^x > 7 \Leftrightarrow 3 > 3^x \Leftrightarrow 1 > x,$$

így a megfelelő helyek:

$$0 \leq x < 1.$$

Mivel $a > 0$ és $a \neq 1$ esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton és folytonos, ezért kölcsönösen egyértelmű, így létezik az inverz függvénye.

Definíció Az $a > 0$, $a \neq 1$ számra az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ exponenciális függvény inverz függvényét *a* alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük.
Jelölés: $\log_a x$.



13.3. ábra Logaritmusfüggvények grafikonjai

$\log_a x$ az az egyetlen valós szám, amelyre $a^{\log_a x} = x$. Az értelmezési tartomány a pozitív valós számok halmaza, az értékkészlet pedig a valós számok halmaza. Ha **$a > 1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő**, hiszen

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2},$$

továbbá tudjuk, hogy az exponenciális függvény $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekvő. Ha **$0 < a < 1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő**. A függvény sem felülről, sem pedig alulról nem korlátos. (Miért?) Bizonyítható, hogy a **logaritmusfüggvény mindenütt folytonos**. **A logaritmusfüggvény $a > 1$ esetén szigorúan konkáv. A logaritmusfüggvény $0 < a < 1$ esetén szigorúan konvex.**

Például a konkávság bizonyítása a konvexitásról szóló 1. tétel alapján a következő módon lehetséges. Legyen $a>1$, továbbá $0<x<y$. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő tulajdonságát, valamint a logaritmus azonosságait alkalmazva:

$$\sqrt{xy}<\frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \log_a\left(\sqrt{xy}\right)<\log_a\frac{x+y}{2},$$

$$\frac{\log_a x+\log_a y}{2}<\log_a\frac{x+y}{2}.$$

Tekintettel arra, hogy a függvény folytonos, a kapott egyenlőtlenségből következik az állítás.

A 10 alapú logaritmusfüggvényre külön jelölést vezettek be: $\lg x$.

A sorozatok kapcsán találkoztunk az e számmal: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Az e alapú logaritmusfüggvényt természetes alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük, jelölése $\ln x$ vagy $\log_e x$.

2. példa Tekintsük az

$$f(x)=\log_2\left(x^2+x-12\right)-\log_2\frac{x+4}{8}$$

kifejezést!

a) Állapítsuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, ahol a kifejezés értelmezhető!

b) Állapítsuk meg az a) részben meghatározott halmazon értelmezett $x\mapsto f(x)$ függvény zérushelyeit!

c) Ábrázoljuk a függvény grafikonját!

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt egyszerre teljesülnie kell az alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$\begin{cases} x^2+x-12>0, \\ x+4>0. \end{cases}$$

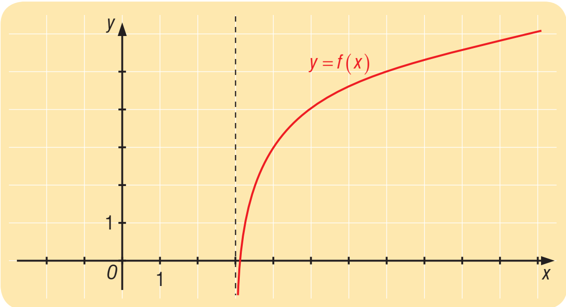
Mivel

$$x^2+x-12=(x+4)(x-3),$$

ezért

$$x^2+x-12>0 \Leftrightarrow x>3$$

vagy $x<-4$.



13.4. ábra A 2. példában vizsgált függvény

Összevetve a másik egyenlőtlenséggel, adódik a közös rész, amely a kifejezés értelmezési tartománya lesz:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x>3\}.$$

A logaritmus azonosságait alkalmazva:

$$f(x)=\log_2\left(x^2+x-12\right)-\log_2(x+4)+3=\log_2\frac{x^2+x-12}{x+4}+3=\log_2(x-3)+3.$$

Zérushely:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \log_2(x-3)=-3 \Leftrightarrow x-3=2^{-3} \Leftrightarrow x=3{,}125.$$

Az exponenciális függvény és a logaritmusfüggvény tulajdonságait leggyakrabban egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldása során szoktuk felhasználni. Ilyen feladatokkal már találkoztunk a Hatvány, gyök, logaritmus című fejezetben.

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az
$$f:[-1;3]\to 2^{-x+2}-1$$
függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény zérushelyeit!

2. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az
$$f:[-2;6[\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|2^{\frac{1}{2}x-1}-1\right|-\frac{1}{2}$$
függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény zérushelyét, és jellemezzük a függvényt monotonitás szempontjából!

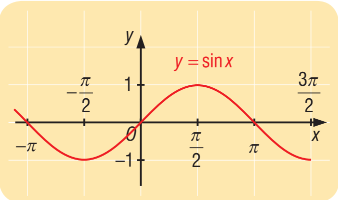
3. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az
$$f:[1;7]\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_3(x+2)-2$$
függvény grafikonját!

4. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az
$$f:[-2;-8]\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|2\log_3|x-1|-3\right|$$
függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvény zérushelyét, és jellemezzük a függvényt monotonitás szempontjából!

14. A trigonometrikus függvények

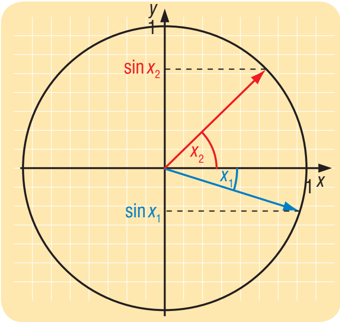
Könyvünk trigonometriával foglalkozó fejezetében találkoztunk már tetszőleges szög szinuszának, illetve koszinuszának értelmezésével. Ugyancsak szerepelt a tangens- és kotangensfüggvény meghatározása. Most a függvények legfontosabb tulajdonságait foglaljuk össze.

Az $f:\mathbb{R}\to[-1;1],\ f(x)=\sin x$ függvény **korlátos**, hiszen $-1\le\sin x\le 1$ minden valós x-re. **Páratlan függvény**, ugyanis bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén $\sin(-x)=-\sin x$. **Periodikus függvény**, hiszen $\sin(x+2\pi)=\sin x$ teljesül minden x-re. (2π a legkisebb pozitív periódus.) A függvénynek van **maximuma**, amely 1-gyel egyenlő, a **maximumhelyek**: $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. A függvénynek **van minimuma**, amely –1-gyel egyenlő, a **minimumhelyek**: $-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. A **zérushelyek** (azok a helyek, ahol $\sin x=0$): $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.



14.1. ábra A szinuszfüggvény grafikonja

A $\sin x$ függvény egységkör segítségével történő értelmezéséből könnyen kiolvasható, hogy a függvény szigorúan monoton növekvő a $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ intervallumokban, és szigorúan monoton csökkenő a $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ intervallumokban $(k \in \mathbb{Z})$. Bizonyítható, hogy a szinuszfüggvény **mindenütt folytonos**. Az értékkészlet a $[-1;1]$ intervallum. Bizonyítható, hogy a függvény a $[0;\pi]$ intervallumon szigorúan konkáv.



14.2. ábra A $\sin x$ monotonitása

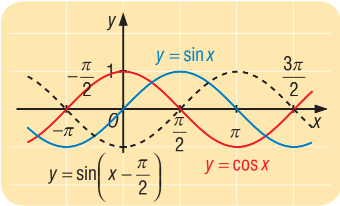
Az $f:\mathbb{R} \to [-1;1]$, $f(x) = \cos x$ függvény **korlátos**, hiszen $-1 \le \cos x \le 1$ minden valós x-re. **Páros függvény**, ugyanis bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(-x) = \cos x$. **Periodikus függvény**, hiszen $\cos(x+2\pi) = \cos x$ teljesül minden x-re. (2π a legkisebb pozitív periódus.) A függvénynek **van maximuma**, ami 1-gyel egyenlő, a **maximumhelyek**: $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A függvénynek **van minimuma**, ami -1-gyel egyenlő, a **minimumhelyek**: $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A **zérushelyek** (azok a helyek, ahol $\cos x = 0$): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mivel

$$(1)\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

ezért a függvény szigorúan monoton növekvő a $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ intervallumokban és szigorúan monoton csökkenő a $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ intervallumokban $(k \in \mathbb{Z})$. A fenti azonosságot és az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt figyelembe véve adódik, hogy a **koszinusz függvény mindenütt folytonos**. Az értékkészlet a $[-1;1]$ intervallum. A koszinuszfüggvény grafikonja az (1) azonosság miatt úgy kapható meg a szinuszfüggvény grafikonjából, hogy azt $\frac{\pi}{2}$-vel eltoljuk jobbra, majd tükrözzük az x tengelyre.

Ebből nyomban következik, hogy a $\cos x$ függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon szigorúan konkáv, míg a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon szigorúan konvex.



14.3. ábra Függvénytranszformáció

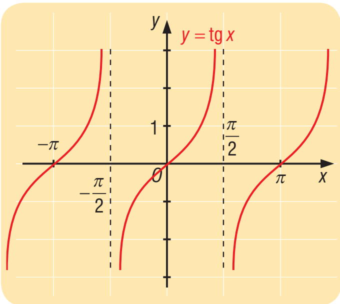
Az $f:\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény **páratlan**, hiszen

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

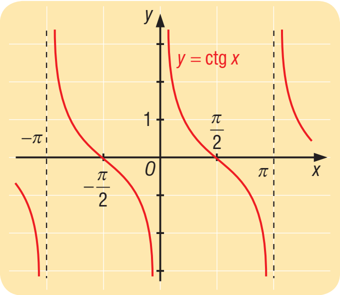
A függvény sem alulról, sem pedig felülről **nem korlátos**. Mivel

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

ezért **periodikus**. (π a legkisebb pozitív periódus.) A **zérushelyek**: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Mivel a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumban a $\sin x$ függvény szigorúan monoton növekvő, a $\cos x$ függvény pedig



14.4. ábra A tangensfüggvény grafikonja szigorúan monoton csökkenő (és az értékeik pozitívak), ezért ebben az intervallumban a tangensfüggvény szigorúan monoton növekvő. A függvény páratlanságából következik, hogy a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumban a tg x szigorúan monoton növekvő. A tangensfüggvény az értelmezési tartomány minden pontjában **folytonos**, hiszen $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, továbbá a szinusz- és a koszinuszfüggvény is folytonos. A függvény értékkészlete $\mathbb{R}$. Igazolható, hogy a tangensfüggvény a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumban szigorúan konvex.



14.5. ábra A kotangensfüggvény grafikonja

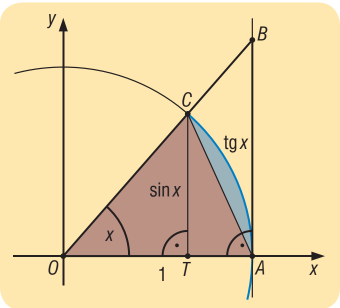
Az $f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$ függvény tulajdonságai $x \neq k\pi$ esetén a

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

összefüggés miatt visszavezethetők a tangensfüggvény tulajdonságaira, ezért ezek összefoglalását az olvasóra bízzuk.

1. példa Igazoljuk, hogy ha $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, akkor

a) $\sin x \le x$; b) $1-\cos x \le x^2$; c) $x \le \operatorname{tg} x$.



14.6. ábra Az 1. példához tartozó ábra

Megoldás:
Az egységkör segítségével dolgozunk. Nyilvánvaló, hogy az *OAC* körcikk területe az *OAC* háromszög és az *OAB* háromszög területe közé esik. A körcikkre vonatkozó területképletet alkalmazva ezért:

$$\frac{1\cdot \sin x}{2} \le \frac{x\cdot 1^2}{2} \le \frac{1\cdot \operatorname{tg} x}{2},$$

$$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x,$$

amivel az a) és c) egyenlőtlenségeket igazoltuk. Azonosságok miatt:

$$1-\cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \le \sin^2 x \le x^2,$$

felhasználva az a) pontban látott eredményt. Egyenlőség mindhárom esetben csakis akkor áll fenn, ha $x=0$.

2. példa Igazoljuk, hogy a szinuszfüggvény mindenütt folytonos!

Megoldás:
Tudjuk, hogy

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és x_0 egy tetszőleges hely. Ekkor

$$\left|\sin x - \sin x_0\right| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Az előző példa a) része alapján könnyű látni, hogy $\left|\sin\alpha\right| \le \left|\alpha\right|$, ezért

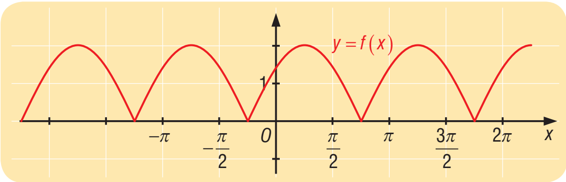
$$\left|\sin x - \sin x_0\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\frac{\left|x-x_0\right|}{2} = \left|x-x_0\right|.$$

Legyen $\delta = \varepsilon$, ekkor a folytonosság Cauchy-féle definíciója miatt készen vagyunk.

A trigonometrikus függvényekre vonatkozó ismereteinket leggyakrabban trigonometrikus egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket tartalmazó feladatok megoldásakor hasznosíthatjuk. Számos példát láthattunk erre a Vektorok, trigonometria című fejezetben.

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az
   $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 2\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$$
   függvény grafikonját!
2. Adjunk meg hozzárendelési utasítást a 14.7. ábrán látható grafikonhoz!



14.7. ábra Grafikon a 2. feladathoz

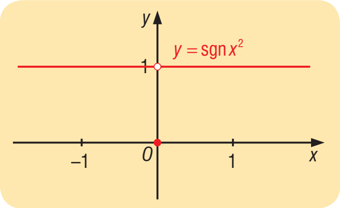
3. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az
   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \cos x$;
   b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

   függvény grafikonját! Határozzuk meg a függvények maximumát, illetve minimumát!

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: a Trigonometria című fejezet 287., 288., 297-301. feladatai

15. A függvények határértéke

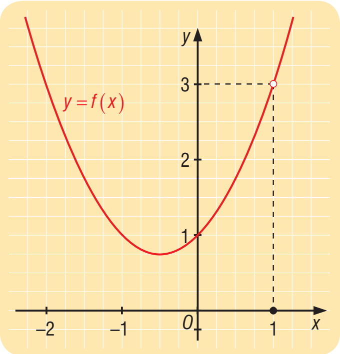
1. példa Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sgn} x^2$ függvény grafikonját! Folytonos-e a függvény a 0-ban?



15.1. ábra Az sgn x^2 függvény grafikonja

Megoldás:
Mivel $x^2 \geq 0$, így a sgn x függvény definíciója alapján könnyen adódik a grafikon. Ha $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, akkor $f(x_n) = 1$ miatt $f(x_n) \to f(0) = 0$ nem teljesül, így a 0-ban f nem folytonos.
A grafikont nézve megfigyelhetjük, hogy az $x_0 = 0$-hoz „közeli” helyeken a függvényértékek közel vannak egy adott számhoz, az 1-hez.

2. példa Ábrázoljuk az $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ függvény grafikonját!



15.2. ábra Az f(x) függvény grafikonja

Megoldás:
Tudjuk, hogy $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$, így $x \neq 1$ esetén:

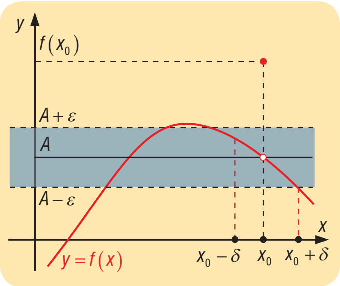
$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1.$$

Mivel

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

ezért az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából a $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ vektorral való eltolással kaphatjuk meg a grafikont.
Az f függvény az $x_0 = 1$ helyen nincs értelmezve, de jól látható, hogy az 1-hez „közeli” helyeken a függvényértékek közel vannak a 3-hoz.

Ezeknek a megfigyeléseknek nem könnyű precíz matematikai megfogalmazást találni. Végül két olyan meghatározás alakult ki, amelyek képesek leírni a fenti két példában tapasztaltakat.



15.3. ábra A Cauchy-féle definíció

Definíció Legyen az f függvény értelmezve az x_0 hely valamely környezetében, kivéve esetleg az x_0 helyen. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik a határértéke az x_0-ban, és A-val egyenlő, ha van olyan A szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. (Ezt szokás Cauchy-féle definíciónak nevezni.)
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

A definíció jelentésének megértésében segít a 15.3. ábra.

Szemléletesen arról van szó, hogy létezik olyan A szám, amelyhez tetszőlegesen keskeny 2ε széles sávot megadva létezik olyan $\delta > 0$, hogy az f grafikonjának (esetleg az $(x_0, f(x_0))$ pont kivételével) az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervallum fölötti része a megadott sávba esik.

Az alkalmazhatóság szempontjából sokszor hasznosabb a következő meghatározás:

Definíció Legyen az f függvény értelmezve az x_0 hely valamely környezetében, kivéve esetleg az x_0 helyen. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik a határértéke az x_0-ban, és A-val egyenlő, ha van olyan A szám, hogy bármely $x_n \to x_0$ $\left(x_n \neq x_0, x_n \in D_f\right)$ helysorozat esetén $f\left(x_n\right) \to A$.
(Ezt szokás Heine-féle definíciónak nevezni.)

Általában az $x_n \to x_0$ jelölés helyett csak az $x \to x_0$ jelölést szoktuk használni. Ezt azonban úgy kell érteni, hogy minden x_0-hoz konvergáló olyan számsorozatra gondolunk közben, ahol egyik tag sem egyezik meg x_0-val. Fontos emlékezni arra, hogy olyan számsorozat, amely nem korlátos, nem lehet konvergens. Ebből az következik, hogy ha a függvényértékek $f\left(x_n\right)$ sorozata nem korlátos, akkor az f-nek az x_0 helyen nincs határértéke.

Megmutatható, hogy a fenti két definíció ekvivalens, a bizonyítás azonban nem egyszerű. Akárcsak a számsorozatok esetén, a függvényekre is igaz, hogy egy adott helyen csak egy határérték lehet. **A feladatok megoldása során általában kényelmesebb a sorozatok határértékére támaszkodó definíciót használni, hiszen ekkor alkalmazhatjuk a konvergens sorozatokról korábban tanult ismereteinket.**

3. példa Mivel egyenlő:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x^2$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$?

Megoldás:

a) A Heine-féle definíció alapján világos, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x^2 = 1$.

b) Mivel $x \neq 1$ esetén:

$$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1,$$

ezért a Heine-féle definíció miatt, felhasználva a konvergens számsorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó tételt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right) = 3.$$

Ha megvizsgáljuk a pontbeli folytonosságról szóló definíciót, akkor világos, **ha egy függvény egy adott x_0 helyen folytonos, akkor ott létezik a határértéke és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$**. Nyilvánvaló, ha az x_0 helyen a függvénynek nincs határértéke, akkor ott nem lehet folytonos. (Ellenkező esetben $A = f\left(x_0\right)$ megfelelne!) Fordítva nem igaz: a határérték létezése nem vonja maga után azt, hogy az adott helyen a függvény folytonos, lásd például az 1. példában szereplő függvényt. Érvényes a következő állítás:

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 hely valamely környezetében, kivéve esetleg az x_0 helyen. Az f függvénynek létezik a határértéke az x_0-ban, ha van olyan A, hogy az

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq x_0, \\ A, & \text{ha } x = x_0 \end{cases}$$

függvény folytonos az x_0 helyen. (Tehát f folytonossá tehető az x_0 helyen.)

4. példa Legyen a adott valós szám és $f(x) = \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$. Határozzuk meg az f függvény határértékét az a helyen!

Megoldás:
Mivel $x \neq a$ esetén

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a,$$

ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$

5. példa

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = ?$$

Megoldás:
Mivel $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, ezért $x \neq -2$ esetén

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = x - 1.$$

Így akkor

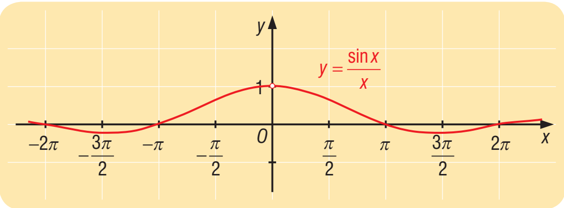
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x - 1) = -3.$$

6. példa Tekintsük az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ függvényt. Létezik-e a függvény határértéke a 0 helyen?

Megoldás:
Segít a válasz megsejtésében, ha megrajzoljuk a függvény grafikonját szerkesztőprogrammal.

A 15.4. ábra alapján sejtjük, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. A most következő gondolatmenet a Cauchy-féle definíción alapul. Először is vegyük észre, hogy f páros függvény, hiszen

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$



15.4. ábra A függvény grafikonja

Elegendő tehát az $x > 0$ számokkal foglalkoznunk. Korábban beláttuk, hogy $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ esetén $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Innen adódik, hogy akkor

$$(1)\quad 0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Tudjuk, hogy a koszinuszfüggvény 0-ban folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor van hozzá $\delta > 0$ úgy, hogy ha $0 < |x - 0| < \delta$, akkor $|\cos x - 1| < \varepsilon$. Így viszont az (1) egyenlőtlenség miatt

$$0 < \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |\cos x - 1| < \varepsilon,$$

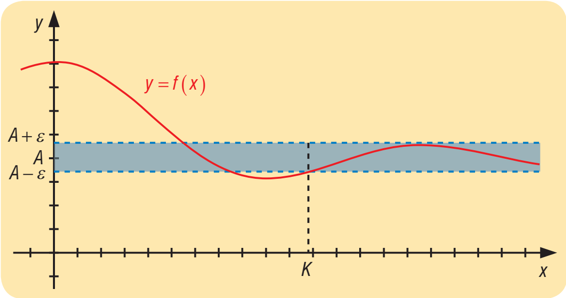
hiszen $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| = 1 - \frac{\sin x}{x}$ és $|\cos x - 1| = 1 - \cos x.$ Ezzel sejtésünket igazoltuk.

Határértéket nem csak adott helyen értelmezhetünk. Sokszor fontos tudni, hogy „nagy” x-ek esetén van-e olyan szám, amelytől az $f(x)$ függvényértékek „kevéssé” térnek el. (Ugyanez a probléma „kicsi” x-ek esetén is felvethető.) Erre szintén két, egymással ekvivalens definíciót alkottak a matematikusok.

Definíció Az $f:]a, \infty[\to \mathbb{R}$ függvénynek a ∞-ben a határértéke A, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik K, hogy ha $x > K$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon.$

A definíció jelentésének megértését szolgálja a 15.5. ábra.

Definíció Az $f:]a, \infty[\to \mathbb{R}$ függvénynek a ∞-ben a határértéke A, ha bármely $x_n \to \infty$ esetén $f(x_n) \to A.$



15.5. ábra Végtelenben vett határérték

Könnyű megfogalmazni a megfelelő definíciókat a $-\infty$-ben vett határértékre vonatkozólag. Ezt feladatként az olvasóra bízzuk. Most is igazolható, hogy a két definíció ekvivalens, valamint az, hogy csak egy határérték létezhet.

7. példa

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = ?$$

Megoldás:
Könnyű megsejteni, hogy a határérték létezik és 0-val egyenlő. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, rögzített. Olyan K számot keresünk, amelyre igaz, hogy

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon,$$

feltéve, hogy $x > K$. Mivel a fenti egyenlőtlenséggel ekvivalens ($x > 0$ feltehető)

$$\frac{1}{\varepsilon} < x,$$

ezért $K = \frac{1}{\varepsilon}$ megfelelő választás lesz. (Természetesen minden $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb K szám is jó.)

8. példa Létezik-e a ∞-ben határértéke a $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^2 - x + 5}{2x^2 + 1}$ függvénynek?

Megoldás:
Mivel

$$h(x) = \frac{x^2 - x + 5}{2x^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}},$$

továbbá $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, ezért a konvergens sorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó tételt alkalmazva:

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \frac{1}{2}.$$

A feladat megoldásában látott módszer általánosan alkalmazható a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ alakú határértékek számítására, ha $f(x)$ és $g(x)$ azonos fokszámú polinomok.

9. példa Létezik-e a ∞-ben határértéke a $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 + 1}$ függvénynek?

Megoldás:
Mivel

$$h(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 + 1} = \frac{\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^4}},$$

továbbá $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, ezért a konvergens sorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó tételt alkalmazva:

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \frac{0}{1} = 0.$$

A feladat megoldásában látott módszerrel könnyen adódik, hogy $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ha $f(x)$ és $g(x)$ olyan polinomok, melyek közül a g fokszáma a nagyobb.

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$, $a \in \mathbb{R}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$ e) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 3}{5x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x + 7}{4x^2 - x + 1}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + 7}{x^2 - x + 1}$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 718-727. feladatok

16. A differenciálszámítás

16.1. A pillanatnyi sebesség értelmezése

Az Analízis témakör bevezetőjében említettük, hogy a testek mozgásának leírása volt az egyik olyan problémakör a fizikában, amelyhez megfelelő matematikai hátteret kellett kidolgozni. Tekintsünk egy testet, amely egy egyenes mentén adott irányban mozog. Ha mozgása egyenletes (azaz egyenlő időközönként ugyanakkora utakat tesz meg), akkor általános iskolai ismereteink szerint a $v=\frac{s}{t}$, sebességnek nevezett mennyiség állandó. Itt *s* jelöli a megtett utat, *t* pedig az eltelt időt. Fizikaórán változó mozgás esetén beszéltünk a

$$v_{\text{átlag}}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

16.1. ábra Sebességmérő óra

mennyiségről, amelyet a $[t_0,t]$ időintervallumhoz tartozó átlagsebességnek hívtunk. Úgy érezzük azonban, hogy a test sebessége minden időpillanatban értelmezhető. (Gondoljunk csak arra a mindennapos tapasztalatra, amikor rápillantunk járművünk sebességmérőjére.)

Ha például $s(t)=5t^2$ és $t_0=1$, akkor

$$v_{\text{átlag}}=\frac{5t^2-5\cdot 1^2}{t-1}=\frac{5(t^2-1)}{t-1}=5(t+1).$$

Ha *t* közel van a $t_0=1$-hez, akkor az átlagsebesség a 10-hez lesz közel, így a $t_0=1$-hez a 10 értéket célszerű rendelni pillanatnyi sebességként. Ez pedig nem más, mint

$$\lim_{t\to 1}\frac{5t^2-5}{t-1}.$$

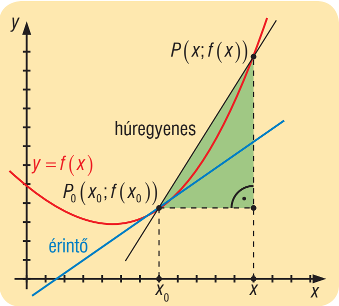
Definíció Általánosan egy adott t_0 időpillanatban a sebesség:

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

(Szándékosan tekintettünk el attól a fizikaóráról jól ismert ténytől, hogy a sebesség vektormennyiség.)

16.2. Az érintőprobléma

A függvénygrafikonok vizsgálata során alapvető fontosságú kérdés, hogyan értelmezzük a grafikon egy adott pontján áthaladó érintő egyenest. További kérdés, hogy miként számolhatjuk ki annak meredekségét. A most következő gondolatmenet során felhasználjuk a koordináta-geometriában az egyenesről tanultakat. (Célszerű átismételni az adott ponton átmenő egyenes meredekséggel felírt egyenletének alakját.)



16.2. ábra Húregyenes meredeksége

Tekintsük az f függvény $y=f(x)$ egyenletű grafikonján a $P_0(x_0, f(x_0))$ rögzített pontot! Az adott ponton átmenő, a görbe valamely $P(x, f(x))$ pontját tartalmazó húregyenes meredeksége a 16.2. ábra alapján:

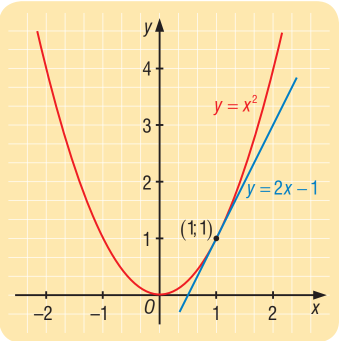
$$m(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ha a P pontot mozgatjuk a grafikonon, akkor más-más helyzethez más-más húregyenes tartozik. Ha azt tapasztaljuk, hogy x-et x_0 felé mozgatva a húr mindig egy adott helyzethez kerül közel, akkor azt a helyzetet joggal mondhatjuk érintőnek. Ennek a szemléletes leírásnak az felel meg, hogy létezik a

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

határérték. Az érintő egyenes meredekségét a határértékkel azonosítjuk.
Nézzünk egy konkrét problémát a leírt gondolatmenet alkalmazására!

1. példa Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény grafikonján lévő $(1;1)$ ponthoz tartozó érintő egyenes egyenletét!



16.3. ábra A parabola érintője

Megoldás:
Az $(1;1)$ ponton átmenő húrok meredeksége:

$$m(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,$$

ezért az érintő létezik, és meredeksége

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

Az $m=2$ meredekségű, az $(1;1)$ ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$y=2x-1.$$

Emlékezzünk (vagy lapozzunk) vissza, hogy a parabola adott pontjához tartozó érintő egyenes egyenletének meghatározására milyen módszert dolgoztunk ki koordináta-geometriában! Világos, hogy az a módszer más típusú hozzárendelésnél nem működik. További hátránya, hogy viszonylag hosszadalmas. Úgy tűnik tehát, hogy a fentebb leírt eljárással sikerült egy széles körben alkalmazható és gyors módszert találnunk az adott ponthoz tartozó érintő egyenletének felírására!

16.3. A differenciálhatóság fogalma

Az érintőprobléma megoldása lényegében egy függvény adott helyen vett határértékének meghatározására vezethető vissza. Később rájöttek arra is, hogy pl. a függvény menetének leírására jól használható a grafikon pontjaihoz tartozó érintők meredeksége. Most a témakör egyik legfontosabb fogalma következik.

Definíció Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezve. Ha az

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ún. **különbségi hányados függvény**nek létezik a határértéke az x_0 helyen, akkor az f függvényt az x_0-ban differenciálhatónak nevezzük. A

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

határértéket az f függvény x_0 pontbeli **differenciálhányados**ának (**derivált**jának) nevezzük.

Jelölés:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

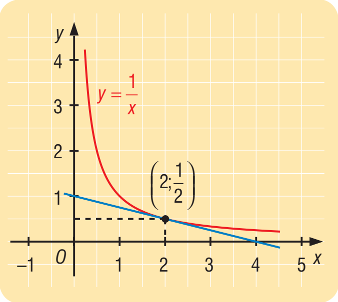
Használatosak még a következő jelölések is: $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\dot{f}(x_0)$, ebben a könyvben azonban ezeket nem fogjuk használni. Az idő mint változó szerinti derivált segítségével van értelmezve nagyon sok mennyiség a fizikában. Például: $a(t)=v'(t)$, azaz a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja; $\omega(t)=\varphi'(t)$, azaz a szögsebesség az elfordulási szög idő szerinti deriváltja; $I=Q'(t)$, azaz az áramerősség a töltésmennyiség idő szerint deriváltja stb.

A differenciálhányados segítségével, a korábban mondottakat is figyelembe véve az érintőre a következő meghatározás adható.

Definíció Legyen az f függvény differenciálható az x_0 pontban. A függvény grafikonjának az $(x_0, f(x_0))$ ponthoz tartozó érintőjén az $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ egyenletű egyenest értjük.

2. példa Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény grafikonján lévő $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ ponthoz tartozó érintő egyenletét!

Megoldás:



16.4. ábra A keresett érintő

Természetesen nem tudhatjuk előre, hogy az érintő valóban létezik. A különbségihányados-függvény $(x \neq 2)$:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\frac{2-x}{2x(x-2)}=-\frac{1}{2x}.$$

A határérték:

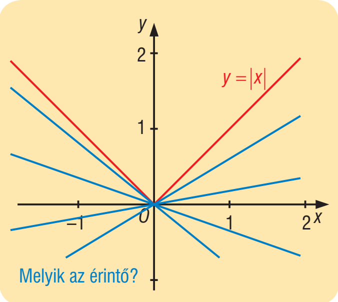
$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{4},$$

így az érintő egyenlete

$$y=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x+1.$$

Hamar felmerül az emberben a kérdés, hogy van-e olyan hely, ahol egy folytonos $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ típusú függvény nem differenciálható? Úgy érezzük, hogy ahol a grafikonon „törés” van, ott gond lehet az érintő létezésével.

3. példa Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ függvény nem differenciálható az $x_0=0$ helyen!



16.5. ábra Adott pontban folytonos, de nem differenciálható függvények

16.6. ábra Karl Weierstrass (1815–1897)

Megoldás:

A különbségihányados-függvény $(x \neq 0)$:

$$\frac{|x|-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}.$$

Legyen $x_n>0$ minden n-re, ekkor $x_n\to 0$ esetén $\frac{|x_n|}{x_n}=1\to 1.$

Legyen most $x_n<0$ minden n-re, ekkor $x_n\to 0$ esetén $\frac{|x_n|}{x_n}=-1\to -1.$ Ez ellentmond a függvény adott helyen való határértékének létezésére vonatkozó Heine-féle definíciónak! Nem létezik tehát a különbségihányados-függvény határértéke a 0 helyen, így ott az $x\mapsto |x|$ függvény nem differenciálható.

Nagyon fontos dolgot jelent ez: egy adott pontban folytonos függvény ebben a pontban nem feltétlenül differenciálható. Felmerül a kérdés, hogy van-e olyan $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ típusú függvény, amely minden pontban folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható. **Karl Weierstrass** 1861-ben konstruált egy ilyen függvényt, általános megdöbbenést váltva ki a kor matematikusai körében. (Weierstrass igen nagy szerepet játszott a modern analízis megalapozásában. Pályafutása kezdetén középiskolai tanárként dolgozott.) Azóta számos ilyen függvényt találtak, ilyen tulajdonságú függvénnyel állnak kapcsolatban például a Koch-féle hópehely kerületét leíró görbék.

A differenciálhatóság és folytonosság közötti viszonyra mutat rá a következő tétel is.

1. tétel Ha az f függvény differenciálható az x_0-ban, akkor f folytonos is x_0-ban.

Bizonyítás:
A konvergens sorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó tétel és a határérték Heine-féle definíciója miatt:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$
$$=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, vagyis f folytonos az x_0-ban.

Csak érdekességként említjük meg, hogy van olyan $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény is, amely csak egy pontban (a 0-ban) differenciálható:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,}\\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális.}\end{cases}$$

A differenciálhatóság pontbeli tulajdonság. Azt mondjuk, hogy az f függvény az $\mathfrak{I}\subset D_f$ nyílt intervallumon differenciálható, ha annak minden pontjában differenciálható.

Definíció Az f függvény deriváltfügvényének (differenciálhányados-függvényének) nevezzük azt az f' függvényt, amely értelmezve van azokon az x_0 helyeken, ahol f differenciálható, és ott az értéke $f'(x_0)$.

2. tétel A konstans függvény differenciálhányadosa mindenütt 0.

Bizonyítás:
Mivel a különbségihányados-függvény (az adott hely kivételével) mindenütt 0 értéket vesz fel, így a tétel állítása nyilvánvaló. (Röviden: $c'=0.$)

3. tétel Ha n tetszőleges pozitív egész szám, akkor az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ függvény mindenütt differenciálható és $f'(x)=nx^{n-1}$. (Röviden: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$.)

Bizonyítás:
Tudjuk, hogy $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$. Ha x_0 tetszőleges hely, akkor

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+xx_0^{n-1}+x_0^{n-1}\right)=nx_0^{n-1}.$$

Felhasználtuk a konvergens sorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó tételt és a határérték Heine-féle definícióját.

A most következő tétel állítása tananyag, a bizonyítása azonban nem.

4. tétel Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$ függvény mindenütt differenciálható és $f'(x)=\cos x$.

(Röviden: $(\sin x)'=\cos x$.)

Bizonyítás:
Tudjuk, hogy

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

A különbségihányados-függvény:

$$\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}.$$

Tudjuk, hogy a koszinuszfüggvény mindenütt folytonos, ezért $\lim\limits_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos x_0$. A függvények határértéke kapcsán igazoltuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Így

$$(\sin x_0)'=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=1\cdot\cos x_0=\cos x_0.$$

Tegyük fel, hogy például egy polinomfüggvény kapcsán arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi a deriváltfüggvénye. Jó lenne, ha olyan egyszerű számítási szabályokat használhatnánk, mint amilyeneket a határérték-számítás során találtunk. Szerencsére ez így is van.

5. tétel Ha f differenciálható x_0-ban, akkor cf is differenciálható x_0-ban és $(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$.

(Röviden: $(cf)'=cf'$.)

Bizonyítás:
A különbségihányados-függvényt felírva cf-re:

$$\frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0}=c\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ebből a tétel állítása nyilvánvaló.

6. tétel Ha f és g differenciálható x_0-ban, akkor $f+g$ is differenciálható x_0-ban és $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.
(Röviden: $(f+g)'=f'+g'$.)

Bizonyítás:
A különbségihányados-függvényt felírva $(f+g)$-re:

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

A bizonyítandó állítás a konvergens sorozatok összegére vonatkozó tétel alapján adódik.

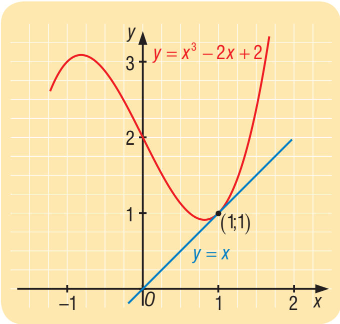
4. példa Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-2x+2$ függvény grafikonján lévő $(1;1)$ ponton átmenő érintő egyenletét!

Megoldás:
A 2., 3., 5. és 6. tételek eredményeit alkalmazva:

$f'(x)=\left(x^3-2x+2\right)'=\left(x^3\right)'+(-2x)'+2'=3x^2-2.$

Így akkor $f'(1)=1$, ezért az érintő egyenes egyenlete:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=x-1+1=x.$$



16.7. ábra A keresett érintő

A továbbiakban felsorolunk néhány nevezetes tételt, amelyek bizonyításait azok összetettebb jellege miatt nem részletezzük. A tételekben szereplő eredményeket a későbbiekben használni fogjuk.

7. tétel Ha f és g x_0-ban differenciálható függvények, akkor fg is differenciálható x_0-ban és $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
(Röviden: $(fg)'=f'g+fg'$.)

5. példa Határozzuk meg az $f(x)=x\sin x$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:
Alkalmazzuk a függvények szorzatára vonatkozó tétel eredményét! Kapjuk, hogy

$$f'(x)=(x\sin x)'=x'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x.$$

8. tétel Ha f és g x_0-ban differenciálható függvények és $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható x_0-ban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(Röviden: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.)

6. példa Határozzuk meg az

a) $\frac{1}{x}$; b) x^{-n}, (n pozitív egész) függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Ha $f(x)$ az azonosan 1 függvény, akkor $f'(x_0) = 1' = 0$ miatt a hányadosra vonatkozó eredmény a következő alakban írható:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Végezzük el a $g(x) = x$ helyettesítést, így megkapjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Mivel $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, ezért

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Ebből az látszik, hogy a 3. tétel állítása negatív egész kitevőre is érvényes.

9. tétel (Láncszabály) Ha a g függvény differenciálható x_0-ban és az f függvény differenciálható $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható x_0-ban, és

$$\left(f\left(g(x_0)\right)\right)' = f'\left(g(x_0)\right) \cdot g'(x_0).$$

7. példa Határozzuk meg a $\cos x$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Tudjuk, hogy $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ezért $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$ és $f(x) = \sin x$ helyettesítéssel:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \sin'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(0-1) = -\sin x.$$

8. példa Határozzuk meg a tg x függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Alkalmazva a 8. tételt, valamint azt, hogy $(\sin x)' = \cos x$ és $(\cos x)' = -\sin x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Végül szintén bizonyítás nélkül megemlítünk két nagyon fontos eredményt, amelyek segítségével megadhatók a hatványfüggvények, az exponenciális függvények és a logaritmusfüggvények differenciálhányados-függvényei.

10. tétel a) Az e^x függvény mindenütt differenciálható és $(e^x)' = e^x$.

b) Az $\ln x$ függvény minden $x > 0$ pontban differenciálható és $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg a ctg x függvény deriváltfüggvényét!

2. A különbségihányados-függvény felírásának segítségével igazoljuk, hogy

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}!$$

3. Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényeit!

a) $2x^5 - x^3 - 5$, b) $x^2 - \sin 2x$, c) $\frac{2x+1}{x^2+3}$, d) $\sin\left(x^2 + x\right)$

4. Tekintsük az $f(x) = x^3 - x^2$ és $g(x) = x^2 - 2x + 4$ függvények grafikonjait!

Igazoljuk, hogy a grafikonoknak pontosan egy közös pontjuk van, és határozzuk meg ezt a pontot!

Határozzuk meg a grafikonok metszéspontján átmenő érintők egyenletét!

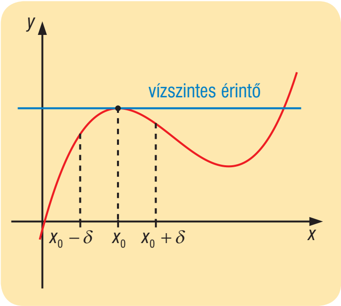
További feladatok:

Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 733-747. feladatok

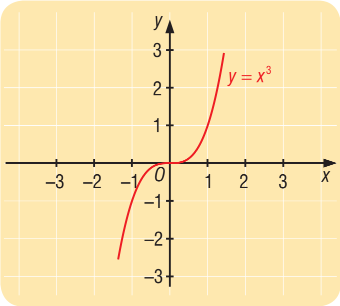
MatEm_Book.indb 341 2012.07.05. 12:34:40

17. A differenciálszámítás alkalmazásai

17.1. Differenciálható függvények vizsgálata



17.1. ábra Van helyi maximum



17.2. ábra Nincs helyi maximum

A derivált alkalmas arra, hogy egy tetszőleges differenciálható függvény helyi (lokális) szélsőértékeit megkeressük. Ennek a célnak az eléréséhez több lépésen át vezet az út. Emlékeztetőül újra közöljük a helyi maximum meghatározását.

Definíció Azt mondjuk, hogy az f függvénynek helyi maximuma van az $x_0 \in D_f$ helyen, ha megadható x_0-nak olyan környezete, hogy az ebbe eső x-ekre f értelmezve van és $f(x) \le f(x_0)$.

Függvénygrafikonokat nézegetve fontos dologra figyelhetünk fel. Ha egy függvénynek helyi maximuma (vagy minimuma) van az x_0 helyen, valamint ott differenciálható, akkor a grafikon $(x_0, f(x_0))$ pontján átmenő érintő vízszintes, azaz $f'(x_0) = 0$.

Tétel Ha az f függvény differenciálható az $]a,b[$ nyílt intervallumban, továbbá f-nek az $a < x_0 < b$ helyen helyi maximuma (minimuma) van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás:
A helyi maximumra végezzük a bizonyítást, a minimumra hasonlóan megy. Jelölje δ a környezet sugarát. Tegyük fel, hogy $x_0 - \delta < x_n < x_0$ minden n-re, továbbá $x_n \to x_0$. Mivel $f(x_n) \le f(x_0)$, ezért

$$(1)\quad \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \ge 0 \Rightarrow \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0) \ge 0.$$

Tegyük fel, hogy $x_0 < x_n < x_0 + \delta$ minden n-re, továbbá $x_n \to x_0$. Mivel $f(x_n) \le f(x_0)$, így

$$(2)\quad \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \le 0 \Rightarrow \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0) \le 0.$$

Az (1) és (2) összefüggések miatt $f'(x_0) = 0$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Nagyon fontos megérteni, hogy a tétel állítása **szükséges feltételt** fogalmaz meg a helyi **szélsőérték létezésére**. Tehát a tételben szereplő feltételek mellett csak ott létezhet lokális szélsőérték, ahol $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$. Ám abból, hogy $f'(x_0) = 0$, csak annyi következik, hogy az x_0 helyen az f függvénynek szélsőértéke lehet. Például az $f(x) = x^3$ függvényre $f'(x) = 3x^2$ miatt $f'(0) = 0$, mégsincs a 0-ban helyi szélsőértéke.

Most egy fontos tétellel ismerkedünk meg, amely **Lagrange**-tól származik.

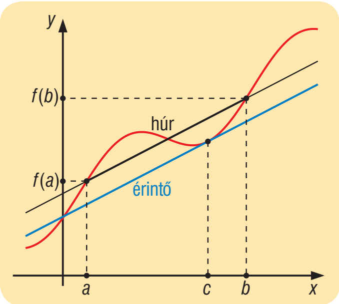
(Lagrange Euler kortársa volt, alapvető tételek sokaságát fedezte fel és igazolta a matematikában és a fizikában. A valaha élt legnagyobb matematikusok között tartják számon.)

17.3. ábra Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

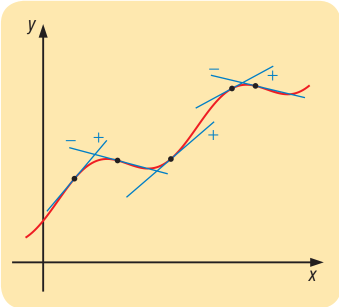
Lagrange-tétel Ha az f függvény differenciálható az $\Im$ nyílt intervallumban és $[a,b] \subset \Im$, akkor van olyan $a < c < b$ pont, ahol

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A tétel bizonyítását nem részletezzük. Szemléletes jelentése: az a és b között van olyan hely, amelyhez tartozó grafikonponton át húzható érintő párhuzamos az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húrral.



17.4. ábra A Lagrange-tétel szemléltetése



17.5. ábra A függvény menete és az érintő meredeksége

A Lagrange-tételnek több fontos következménye van. Tekintsünk egy adott intervallumban differenciálható függvényt. Vezessünk végig a grafikonján balról jobbra haladva egy pontot, és tekintsük különböző helyzetében a rajta átmenő érintőket! Azt vehetjük észre, hogy amikor az érintők meredeksége pozitív, akkor növekvő, amikor pedig negatív, akkor csökkenő részén járunk a grafikonnak.

Ezt a megfigyelést a következő tétel fogalmazza meg.

Tétel Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az $]a,b[$ nyílt intervallumban.

a) Ha $f'(x) > 0$ minden $a < x < b$ esetén, akkor f szigorúan monoton növekvő $]a,b[$-ben.

b) Ha $f'(x) < 0$ minden $a < x < b$ esetén, akkor f szigorúan monoton csökkenő $]a,b[$-ben.

Bizonyítás:

a) Legyen $a < x_1 < x_2 < b$. A Lagrange-tétel szerint van olyan $x_1 < c < x_2$ hely, hogy

$$f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1).$$

Mivel $f'(c)>0$ és $x_2-x_1>0$, ezért a bal oldalon pozitív szám áll, így $f(x_1)<f(x_2)$. Ez pedig azt jelenti, hogy f szigorúan monoton növekvő $]a,b[$ -ben.

Teljesen hasonló módon adódik a bizonyítás a b) pontban szereplő állításra. (Nem használtuk ki sehol sem azt, hogy *a*, illetve *b* véges számok, így pl. $]a,\infty[$ típusú intervallumra is érvényesek a tételben lévő állítások.)

Abban az esetben, ha csak annyit tudunk, hogy $f'(x)\geq 0$ minden $a<x<b$ esetén, akkor *f*-ről csak annyit állíthatunk, hogy ott monoton növekvő. A tételben szereplő állítások nem fordíthatók meg. Pl. az $f(x)=x^3$ függvény szigorúan monoton növekvő a $]-1,1[$ intervallumon, mégis $f'(x)=3x^2$ miatt $f'(0)=0$. Elemien végeztünk már monotonitással kapcsolatos vizsgálatokat. Most az ott látott példákban szereplő függvényekre alkalmazzuk a differenciálszámítást (deriválást)!

1. példa Legyen $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Vizsgáljuk meg *f*-et monotonitás szempontjából!

Megoldás:
Deriválva *f*-et:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'\cdot(x+1)-(2x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}>0.$$

A 3. tétel alapján akkor *f* a $]-\infty;-1[$ intervallumon és a $]-1;\infty[$ intervallumon is szigorúan monoton növekvő.

2. példa Vizsgáljuk meg az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ függvény monotonitási tulajdonságait az értelmezési tartományon!

Megoldás:
Deriválva *f*-et:

$$f'(x)=1+4\left(\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}.$$

Innen a 3. tétel felhasználásával könnyen kiolvashatjuk, hogy a $]0,2[$ intervallumban *f* szigorúan monoton csökkenő, míg a $]2,\infty[$ intervallumban szigorúan monoton növekvő.
A megoldásból az is látszik, hogy a függvénynek az $x=2$ helyen abszolút minimuma van.
A következő tétel elegséges feltételt ad a helyi szélsőérték létezésére.

Tétel

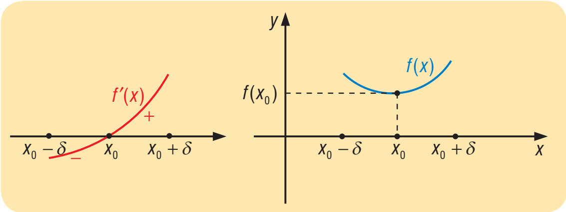
a) Ha az f függvény differenciálható az x_0 valamely $\delta > 0$ sugarú környezetében, és $x_0 - \delta < x < x_0$ esetén $f'(x) < 0$, illetve $x_0 < x < x_0 + \delta$ esetén $f'(x) > 0$, valamint $f'(x_0) = 0$, akkor az x_0 pont az f-nek helyi minimumhelye.

b) Ha az f függvény differenciálható az x_0 valamely $\delta > 0$ sugarú környezetében, és $x_0 - \delta < x < x_0$ esetén $f'(x) > 0$, illetve $x_0 < x < x_0 + \delta$ esetén $f'(x) < 0$, valamint $f'(x_0) = 0$, akkor az x_0 pont az f-nek helyi maximumhelye.

Röviden azt is szoktuk mondani, hogy ha $f'(x_0) = 0$, valamint f' előjelet vált x_0-ban, akkor f-nek az x_0-ban helyi szélsőértéke van.

Bizonyítás:

a) Az előző tétel b) pontja alapján f szigorúan monoton csökkenő az $]x_0 - \delta, x_0[$ intervallumban, ezért itt $f(x) > f(x_0)$. Az előző tétel a) pontja alapján f szigorúan monoton növekvő az $]x_0, x_0 + \delta[$ intervallumban, ezért itt $f(x_0) < f(x)$. Mindezekből a tétel állítása leolvasható. A 17.6. ábra segít a bizonyításban leírtak megértésében.



17.6. ábra A bizonyítást segítő ábra

Hasonló módon adódik a bizonyítás a b) pontban szereplő állításra.

A középiskolában elénk kerülő függvények többsége rendelkezik azzal a jó tulajdonsággal, hogy nemcsak f, hanem f' is deriválható x_0-ban, azaz létezik

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Ennek neve: az f függvény x_0-beli **második differenciálhányadosa** (második deriváltja). Létezése esetén azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható x_0-ban. (Beszélhetünk az ún. második deriváltfüggvényről is.)

Tétel

a) Legyen az f függvény kétszer differenciálható x_0-ban. Ha $f'(x_0) = 0$, valamint $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek az x_0-ban helyi minimuma van.

b) Legyen az f függvény kétszer differenciálható x_0-ban. Ha $f'(x_0) = 0$, valamint $f''(x_0) < 0$, akkor f-nek az x_0-ban helyi maximuma van.

Most **szélsőérték-feladatok**at oldunk meg **differenciálszámítás segítségével**. A feladatok egy része szerepelt már az elemi módszerekkel való szélsőérték-meghatározás kapcsán.

3. példa Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-4x$ függvény helyi (lokális) szélsőértékeit!

Megoldás:
Könnyű látni, hogy f mindenütt differenciálható kétszer, továbbá $f'(x)=3x^2-4$ és $f''(x)=\left(3x^2-4\right)'=6x$. Helyi szélsőérték csak ott lehet, ahol $f'(x)=0$ teljesül:

$$3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ vagy } x=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Mivel $f''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)>0$, ezért f-nek a $\frac{2}{\sqrt{3}}$ helyen helyi minimuma van. A minimum értéke $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{16}{3\sqrt{3}}\approx-3{,}08$. Mivel $f''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)<0$, ezért f-nek a $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ helyen helyi maximuma van. A maximum értéke $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{16}{3\sqrt{3}}\approx 3{,}08$.

4. példa Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\frac{6}{x^2}$ függvény (abszolút) minimális értékét és a minimumhelyét!

Megoldás:
Az f-et deriválva:

$$f'(x)=\left(x+6x^{-2}\right)'=1-12x^{-3}=1-\frac{12}{x^3},$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{12}.$$

Könnyű látni, hogy $0<x<\sqrt[3]{12}$ esetén $f'(x)<0$, így ezen az intervallumon f szigorúan monoton csökken. Az is világos, hogy $\sqrt[3]{12}<x$ esetén $f'(x)>0$, így a $\left]\sqrt[3]{12},\infty\right[$ intervallumon f szigorúan monoton nő. Ebből az következik, hogy az $x=\sqrt[3]{12}$ helyen az f-nek abszolút minimuma van, melynek értéke: $f\left(\sqrt[3]{12}\right)=3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\approx 3{,}434$.

Felmerülhet a kérdés, hogy miért nem az utolsó tételt használtuk fel a megoldásban? Szeretnénk hangsúlyozni, hogy az abszolút szélsőérték nem feltétlenül helyi szélsőérték! Gondoljunk pl. az $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x$ függvényre. Ennek abszolút minimuma és maximuma is van (a 0, illetve az 1), de nincs olyan hely, ahol helyi szélsőértéke lenne. A helyi szélsőérték sem feltétlenül abszolút szélsőérték, sőt az sem igaz, hogy pl. az abszolút maximum helye a helyi maximumhelyek valamelyike. Erre jó példa a 3. feladatban szereplő $f(x)=x^3-4x$ függvény, amelynek nincs abszolút maximuma, hiszen felülről nem is korlátos. (Miért?)

5. példa Határozzuk meg az $f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-2x^3$ függvény maximális értékét és a maximumhelyét!

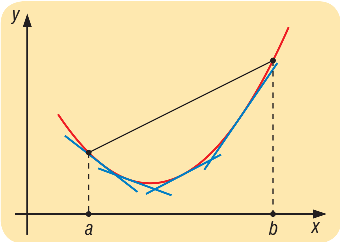
Megoldás:
Ha egy feladat szövegéből nem derül ki, hogy helyi vagy abszolút szélsőérték meghatározására gondolnak-e benne, akkor mindig az abszolút szélsőértéket keressük. Tegyük fel, hogy $x\in\,]0;1[$, azaz $0<x<1$. Ezen az intervallumon *f* differenciálható és

$$f'(x)=4x-6x^2=2x(2-3x).$$

Ebből következik, hogy $0<x<\frac{2}{3}$ esetén $f'(x)>0$, így ezen az intervallumon *f* szigorúan monoton nő. Ha pedig $\frac{2}{3}<x<1$, akkor $f'(x)<0$, így ezen az intervallumon *f* szigorúan monoton csökken. Ezek alapján kijelentjük, hogy a $]0;1[$ intervallumban az $x=\frac{2}{3}$ helyen az *f* függvénynek abszolút maximuma van, melynek értéke $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}$. Vajon teljes-e ez a megoldás? Nem! A függvény mindkét végén zárt intervallumon van értelmezve. Nem lehetünk biztosak benne, hogy a végpontokban felvett értékek közül valamelyik nem nagyobb-e $f\left(\frac{2}{3}\right)$-nál. Kiszámítva őket: $f(0)=0,\ f(1)=0$ azt látjuk, hogy ezek kisebbek $f\left(\frac{2}{3}\right)$-nál, így most már kimondhatjuk, hogy a megadott értelmezési tartományon a függvény maximális értéke $\frac{8}{27}$, melyet az $x=\frac{2}{3}$ helyen vesz fel.

17.2. Konvex és konkáv függvények, inflexiós pont

Tekintsünk egy $]a,b[$ intervallumon differenciálható, konvex függvényt. Ha balról jobbra haladva vezetünk egy pontot a grafikonon, és különböző helyzetében figyeljük a rajta átmenő érintőket, akkor azt láthatjuk, hogy az érintők meredeksége monoton nő. Szigorúan konvex függvény esetén az érintők meredekségének szigorúan monoton növekedését tapasztaljuk. Konkáv függvény esetén pedig az érintők meredeksége monoton csökken. Ezzel a megfigyeléssel áll kapcsolatban a következő tétel.



17.7. ábra Szigorúan konvex függvény

Tétel Legyen az *f* függvény differenciálható az $]a,b[$ intervallumban. Az *f* pontosan akkor (szigorúan) konvex az $]a,b[$-ben, ha f' (szigorúan) monoton növekedő $]a,b[$-ben.

A tétel bizonyítását nem részletezzük. Könnyű megfogalmazni a tétel konkáv függvényre vonatkozó változatát, amit az olvasóra bízunk. A korábbi tételek alapján nyerhetünk sokszor egyszerűbben használható feltételt a grafikon alakjának eldöntéséhez.

Tétel Legyen az f függvény kétszer differenciálható az $]a,b[$ intervallumban. Az f pontosan akkor konvex (konkáv) az $]a,b[$ -ben, ha $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ teljesül minden $x \in]a,b[$ esetén.

A 17.7. ábra azt sejteti, hogy egy adott intervallumon szigorúan konvex függvény grafikonjának bármely pontjában húzott érintő a grafikon alatt van. Ezt is be lehet bizonyítani.

6. példa Határozzuk meg, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 4x$ függvény hol konvex és hol konkáv!

Megoldás:
Könnyű látni, hogy f mindenütt kétszer differenciálható, továbbá $f'(x) = 3x^2 - 4$ és $f''(x) = (3x^2 - 4)' = 6x$. Így akkor a $]-\infty;0[$ intervallumon f konkáv, míg a $]0,\infty[$ intervallumon f konvex.

A 0-ban az f konkávból konvexbe megy át. Az ilyen helynek külön nevet is adtak.

Definíció Az x_0 pont az f függvény inflexiós pontja, ha ott a függvény konkávból konvexbe, vagy konvexből konkávba megy át.

7. példa Igazoljuk, hogy minden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú harmadfokú polinomfüggvénynek van inflexiós pontja!

Megoldás:
Tekintsük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ függvényt. Deriválva:

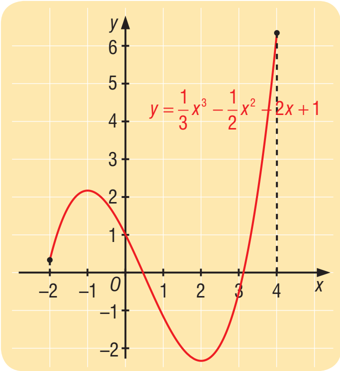
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$f''(x) = 6ax + 2b.$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}.$$

Mivel $f''(x) = 6ax + 2b = 6a\left(x + \frac{b}{3a}\right)$, az $x_0 = -\frac{b}{3a}$ -ban előjelet vált, ezért az x_0 inflexiós pont.

17.3. Függvényvizsgálat

A most következő feladatok megoldásához felhasználjuk az eddigi ismereteinket.

> **8. példa** Vizsgáljuk az
> $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$$
> függvényt a $[-2;4]$ intervallumban monotonitás, szélsőértékek és konvexitás szempontjából!



17.8. ábra A vizsgált függvény grafikonja

Megoldás:
Az f mindenütt differenciálható kétszer:

$$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)\cdot(x-2),$$
$$f''(x)=2x-1.$$

Ha $x<-1$, akkor $f'(x)>0$, így a $[-2;-1]$ intervallumban f szigorúan monoton növekvő. Ha $-1<x<2$, akkor $f'(x)<0$, így a $[-1;2]$ intervallumban f szigorúan monoton csökken. Ha $2<x$, akkor $f'(x)>0$, így a $[2;4]$ intervallumban f szigorúan monoton növekvő. Ezekből következik, hogy a –1-ben az f-nek helyi maximuma, míg a 2-ben helyi minimuma van. Mivel $f(-2)>f(2)$, ezért a 2-ben az adott intervallumon abszolút minimuma van f-nek. Mivel $f(-1)<f(4)$, ezért a 4-ben az adott intervallumon abszolút maximuma van f-nek.
Ha $x<\frac{1}{2}$, akkor $f''(x)<0$, így a $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ intervallumban f (szigorúan) konkáv. Ha $x>\frac{1}{2}$, akkor $f''(x)>0$, így az $\left[\frac{1}{2};4\right]$ intervallumban f (szigorúan) konvex. Ezekből adódik, hogy az $x=\frac{1}{2}$-ben f-nek inflexiós pontja van. Érdemes táblázatos formában is összefoglalni a kapott eredményeket!

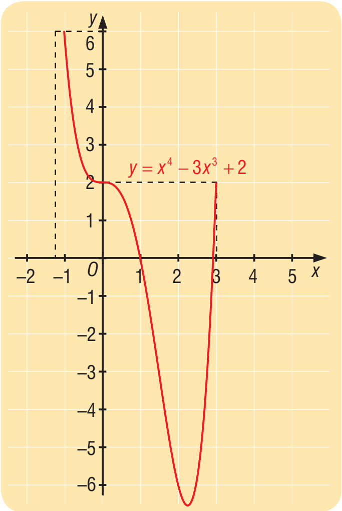
x	-2	$]-2;-1[$	-1	$\left]-1;\frac{1}{2}\right[$	$\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2};2\right[$	2	$]2;4[$	4
$f'(x)$	+	+	0	–	–	–	0	+	+
$f''(x)$	–	–	–	–	0	+	+	+	+
$f(x)$	↗		helyi max.	↘			min.	↗	
	konkáv				inf. pont	konvex			

(↗ a szigorúan monoton növekedést, ↘ pedig a szigorúan monoton csökkenést jelenti.)

> **9. példa** Vizsgáljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-3x^3+2$ függvényt a $[-1;3]$ intervallumban monotonitás, szélsőértékek és konvexitás szempontjából!

Megoldás:
Az f mindenütt differenciálható kétszer:

$$f'(x)=4x^3-9x^2=x^2(4x-9),$$
$$f''(x)=12x^2-18x=6x(2x-3).$$



17.9. ábra A vizsgált függvény grafikonja

Ha $x < \frac{9}{4}$, akkor $f'(x) < 0$, így a $\left[-1; \frac{9}{4}\right]$ intervallumban f szigorúan monoton csökken. Ha $x > \frac{9}{4}$, akkor $f'(x) > 0$, így a $\left[\frac{9}{4}; 3\right]$ intervallumban f szigorúan monoton növekvő. Ebből következik, hogy $x = \frac{9}{4}$-ben f-nek abszolút minimuma van, ami egyben helyi minimum is. Mivel $f(-1) = 6$ és $f(3) = 2$, ezért az is adódik, hogy az adott intervallumban f abszolút maximuma 6. Ha $x < 0$, akkor $f''(x) > 0$, így a $[-1; 0]$ intervallumban f (szigorúan) konvex. Ha $0 < x < \frac{3}{2}$, akkor $f''(x) < 0$, így a $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ intervallumban f (szigorúan) konkáv. Ha $\frac{3}{2} < x$, akkor $f''(x) > 0$, így a $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$ intervallumban f (szigorúan) konvex. Az is megállapítható, hogy az $x = 0$-ban és $x = \frac{3}{2}$-ben f-nek inflexiós pontja van. Célszerű most is táblázatos formában összefoglalni eredményeinket:

x	-1	$]-1; 0[$	0	$\left]0; \frac{3}{2}\right[$	$\frac{3}{2}$	$\left]\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right[$	$\frac{9}{4}$	$\left]\frac{9}{4}; 3\right[$	3
$f'(x)$	–	–	0	–	–	–	0	+	+
$f''(x)$	+	+	0	–	0	+	+	+	+
$f(x)$	↘			↘		↘	min.	↗	
	konvex		inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex			

Oldjuk meg!

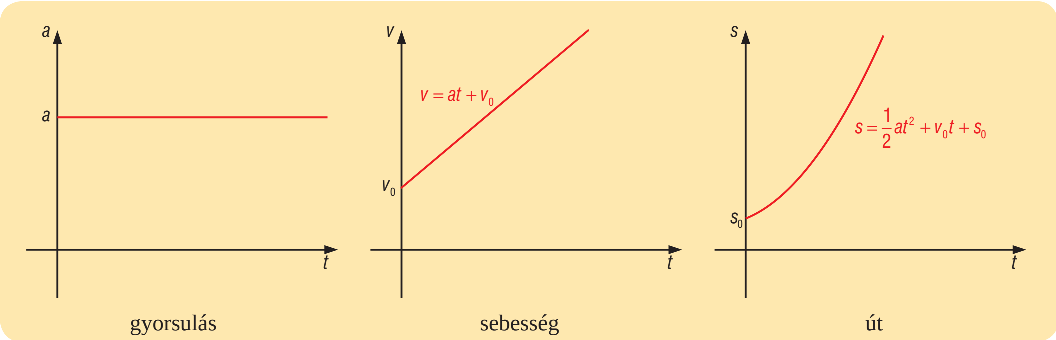
1. Jellemezzük differenciálszámítással az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ másodfokú polinomfüggvényeket monotonitás, szélsőértékek és konvexitás szempontjából!
2. Jellemezzük differenciálszámítással az $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvényt monotonitás, szélsőértékek és konvexitás szempontjából!
3. Vizsgáljuk az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 1$ függvényt a $[-1; 2]$ intervallumban monotonitás, szélsőértékek és konvexitás szempontjából!
4. Vizsgáljuk az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^4 + 4x + 2$ függvényt a $[-1; 2]$ intervallumban monotonitás, szélsőértékek és konvexitás szempontjából!

18. Integrálszámítás: a határozatlan integrál

1. példa Egy test egyenes vonalban mozog, gyorsulása időben állandó: $a(t)=a$. Írjuk fel a $v=v(t)$ sebesség–idő függvényt, illetve az $s=s(t)$ út–idő függvényt!

18.1. ábra Gyorsuló vonat

Megoldás:
A differenciálszámítás kapcsán láttuk, hogy $a(t)=v'(t)$. Olyan $v(t)$ függvényt kell tehát keresnünk, amelynek deriváltfüggvénye a (konstans). Könnyű ilyet találni: $v(t)=at$. Ne felejtsük el, hogy a konstans függvény deriváltja 0, ezért $v(t)=at+v_0$ is megfelel, ahol v_0 konstans. Felmerül a kérdés, hogy vannak-e más megfelelő függvények. Egyelőre ezzel ne foglalkozzunk. Tudjuk, hogy $v(t)=s'(t)$, így olyan $s(t)$ függvényt kell találnunk, melyre $s'(t)=at+v_0$.



18.2. ábra Az egyenletesen gyorsuló mozgás grafikonjai

Könnyű látni, hogy $s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$ megfelel, ahol s_0 konstans. Ezzel „levezettük” a fizikaórákról jól ismert ún. négyzetes úttörvényt.
A probléma általánosan a következő. Ismerjük az $f(x)$ függvényt és tudjuk, hogy az $F(x)$ függvény differenciálható az $\mathfrak{I}$ intervallumon, továbbá $f(x)=F'(x)$ minden $x\in\mathfrak{I}$ esetén. Meg kell keresnünk az összes megfelelő $F(x)$ függvényt.

Definíció A fenti tulajdonságú $F(x)$ függvényt a $f(x)$ függvény primitív függvényének hívjuk.

Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek $F(x)$ és $G(x)$ is primitív függvénye, tehát

$$f(x)=F'(x)=G'(x).$$

Ekkor

$$F'(x)-G'(x)=0 \Leftrightarrow \left[F(x)-G(x)\right]'=0$$

minden x-re. Vajon igaz-e, hogy ha a nyílt $\mathfrak{I}$ intervallumon egy függvény differenciálható, és az $[a,b]\subset\mathfrak{I}$ intervallumon a differenciálhányados függvény azonosan 0, akkor a függvény konstans az $[a,b]$ intervallumon?

Tétel Ha f az $\mathfrak{I}$ nyílt intervallumban differenciálható függvény, és az $[a,b]\subset\mathfrak{I}$ intervallumban $f'(x)=0$, akkor az f konstans az $[a,b]$-ben.

Bizonyítás:
Legyen $a<x_0\le b.$ A Lagrange-tétel szerint az x_0-hoz létezik olyan $a<c<b$ pont, ahol

$$f'(c)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}.$$

Mivel $f'(c)=0,$ ezért $f(x_0)=f(a).$ Az x_0 tetszőleges volt, ezért $f(x)=f(a),$ ha $x\in[a,b].$

E tétel következményeként kapjuk az alábbi eredményt, amelyet sokszor az integrálszámítás alaptételének neveznek.

Tétel Ha F primitív függvénye f-nek, akkor $f(x)$ összes primitív függvénye $F(x)+c$ alakú, ahol $c\in\mathbb{R}$ konstans.

Bizonyítás:
Az előző tétel, valamint az előtte tett megjegyzések miatt a tétel állítása igaz.

Definíció Az f függvény primitív függvényeinek összességét (halmazát) $\int f(x)\,dx$-szel jelöljük, és f **határozatlan integráljának** nevezzük. Tehát

$$F\in\int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x).$$

Az f primitív függvényeinek halmazára sokszor a rövidebb $\int f$ jelölést használjuk. Gyakran láthatunk $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ típusú felírást, pl. $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+c.$ Ilyenkor ezt úgy értjük, hogy a bal oldalon álló halmaz összes eleme a jobb oldalon látható formában írható fel. A határozatlan integrálás (azaz a primitívfüggvény-keresés) a differenciálás megfordításaként fogható fel. Ebből következik, hogy amíg nem vagyunk tisztában az elemi függvények deriváltfüggvényeivel, illetve az alapvető differenciálási szabályokkal, addig esélyünk sincs a határozatlan integrálás elsajátítására.
Fontos kérdés, hogy van-e minden függvénynek primitív függvénye.

2. példa

Igazoljuk, hogy az $f(x)=\begin{cases}1, \text{ ha } x>0,\\ 0, \text{ ha } x\le 0\end{cases}$ függvénynek nincs primitív függvénye, azaz nem létezik olyan F függvény, amelyre $F'(x)=f(x)$ minden x-re!

Megoldás:

Tegyük fel, hogy létezik F primitív függvénye f-nek. Ha $x>0$, akkor $F(x)=x+c$, ahol c konstans. Ha $x<0$, akkor $F(x)=d$, ahol d konstans. Mivel F differenciálható a 0-ban, ezért ott folytonos, így $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x>0}}(x+c)=c=F(0)=d.$ Mivel

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}}\frac{x+c-c}{x}=1\ne\lim_{\substack{x\to 0,\\ x<0}}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0,\\ x<0}}\frac{c-c}{x}=0,$$

ezért F nem differenciálható a 0-ban. Ellentmondásra jutottunk.

Be lehet bizonyítani, hogy ha f folytonos az $\mathfrak{I}$ intervallumban, akkor ott f-nek van primitív függvénye.

A tananyaghoz tartozó legfontosabb integrálok a következők:

Tétel

a) $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\in\mathbb{Z}, n\ne -1;$

b) $\int \cos x\,dx=\sin x+c;$

c) $\int \sin x\,dx=-\cos x+c;$

d) $\int \sqrt{x}\,dx=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+c.$

Bizonyítás:

Az a), b) és c) állításokat a differenciálszámítás felépítése során igazoltuk. A d) állítás igazolásához használjuk fel a deriválási szabályokat:

$$\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c\right)'=\frac{2}{3}\left(x\sqrt{x}\right)'=\frac{2}{3}\left(1\cdot\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}=\sqrt{x}.$$

(Természetesen $x>0$ mellett értve minden lépést.)

Tétel Ha az f és g függvényeknek van primitív függvénye az $\mathfrak{I}$ intervallumon, akkor az $f+g$ és cf $(c\in\mathbb{R})$ függvényeknek is van, és

$$\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx \quad \text{és} \quad \int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx.$$

Bizonyítás:

Az állítások a Differenciálszámítás című fejezet 5. és 6. tétele alapján azonnal adódnak.

3. példa Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

a) $\int\left(x^2+2x-3\right)dx$ b) $\int\left(2x^3-\sin x+5\cos x\right)dx$ c) $\int\left(3x^4-x^2+5x-1\right)dx$

Megoldás:
A tételeket alkalmazva:

a) $\int\left(x^2+2x-3\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x+c$

b) $\int\left(2x^3-\sin x+5\cos x\right)dx=\dfrac{x^4}{2}+\cos x+5\sin x+c$

c) $\int\left(3x^4-x^2+5x-1\right)dx=\dfrac{3x^5}{5}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{5x^2}{2}-x+c$

Az eredmények helyességéről deriválással győződhetünk meg.

Tétel

Ha $F'(x)=f(x)$, akkor $\int f(ax+b)\,dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+c,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

Bizonyítás:
Az összetett függvény differenciálására vonatkozó ún. „láncszabály” alapján az állítás azonnal adódik.

4. példa Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

a) $\int\cos 2x\,dx$ b) $\int(2x+1)^3dx$ c) $\int\cos^2 x\,dx$ d) $\int\sin^2 x\,dx$ e) $\int\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)dx$

Megoldás:
Alkalmazzuk az előző tételt, illetve a $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ azonosságot!

a) $\int\cos 2x\,dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x+c$

b) $\int(2x+1)^3\,dx=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x+1)^4}{4}+c=\dfrac{(2x+1)^4}{8}+c$

c) $\int\cos^2 x\,dx=\int\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\int\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x+c$

d) $\int\sin^2 x\,dx=\int\left(1-\cos^2 x\right)dx=x-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x\right)+c=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+c$

e) $\int\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)dx=-\dfrac{1}{3}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)+c$

Oldjuk meg!

1. Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

a) $\int \left(2x^5 - \cos 3x\right) dx$ b) $\int \sin x \cos x dx$ c) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

d) $\int (3x-2)^{2010} \, dx$ e) $\int \frac{(x-2)^2}{x^4} dx$

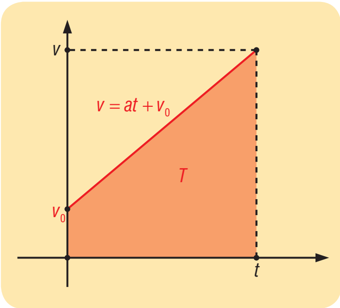
2. Van-e primitív függvénye az $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvénynek?

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 759-773. feladatok

19. Integrálszámítás: a határozott integrál

Fizikaórán azt tanultuk, hogy a megtett út kiszámítható a sebesség–idő grafikon alatti területként. Ezt ott általánosan nem bizonyították be. Egyelőre mi sem tesszük, de érdemes megvizsgálni egy konkrét példát.

1. példa Tekintsünk egy testet, amely egyenes vonalban mozog, és a gyorsulása időben állandó: $a(t) = a.$ Tudjuk, hogy ekkor a sebessége: $v(t) = at + v_0.$ Határozzuk meg a $[0,t]$ intervallumon a grafikon és az x tengely közötti területet!



19.1. ábra A grafikon alatti terület

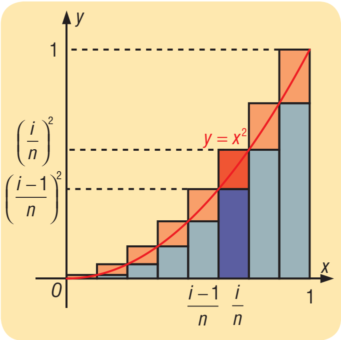
Megoldás:
Az ábrán látható trapéz területe az ismert területképletet alkalmazva:

$$T = \frac{v_0 + at + v_0}{2} \cdot t = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t.$$

Vegyük észre, hogy ez a $v(t)$ függvény (egyik) primitív függvénye! Úgy tűnik, hogy kapcsolat van egy függvény primitív függvényei (határozatlan integrálja), valamint egy adott intervallumon a függvény grafikonja alatti terület között. Ennek a sejtésnek a vizsgálata vezet majd el bennünket a matematika egyik legfontosabb képletéig. Segítségével számos, a fizikában, illetve a matematikában felmerülő problémát oldhatunk meg.

A következőkben (természetesen mai jelölésekkel) először egy olyan eljárást ismertetünk, amelyet Arkhimédész dolgozott ki a parabolaszelet területének meghatározására. Ezt hívják **kétoldali közelítés** módszerének. Az egyszerűség kedvéért csak az $y = x^2$ egyenletű parabola grafikonja alatti terület kiszámításával foglalkozunk a $[0;1]$ intervallumon. (Feltételezzük, hogy a terület létezik.)

2. példa Számítsuk ki az $y = x^2$ egyenletű parabola grafikonja alatti területet a $[0;1]$ intervallumon!



19.2. ábra A grafikon alatti terület kétoldali közelítése

Megoldás:
Osszuk fel a $[0;1]$ intervallumot n egyenlő részre! A görbe alatti terület az i-edik intervallumon alulról, illetve felülről becsülhető egy-egy téglalap területével.
A téglalapok területe az ábra alapján:

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{(i-1)^2}{n^3},\ \text{illetve}\ \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{i^2}{n^3},$$

így a grafikon alatti terület a $[0;1]$ intervallumon alulról és felülről is egyszerre becsülve:

$$(1)\quad \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right) < T < \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right).$$

Korábban teljes indukcióval igazoltuk, hogy

$$1^2+2^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)\cdot(2k+1)}{6}.$$

Ennek segítségével az (1) becslés:

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} < T < \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3},$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6n}\right) < T < \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\right).$$

A határértékről tanultak szerint $\frac{1}{n}\to 0$, így az egyenlőtlenség két oldalán álló sorozatoknak $\frac{1}{3}$ a határértéke, ez pedig azt jelenti, hogy csakis $T = \frac{1}{3}$ lehetséges.

Felmerül a kérdés, hogy más típusú hozzárendelés esetén működik-e az előbb látott eljárás. Van, amikor igen, de nem mindig. Nehéz például elképzelni, hogy az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény esetén végig tudnánk vinni. A célunk olyan elmélet megalkotása, amely a függvények igen széles körére lehetővé teszi pl. a grafikon alatti terület kiszámítását. Hangsúlyozzuk, hogy bár az elmélet kiépítése kapcsolatban van a 2. példában látott téglalapokkal, de a használt módszer annál jóval általánosabb lesz.

Tekintsük az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvényt. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n (nem feltétlenül egyenlő) részre: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, ahol az x_i-k az ún. osztáspontok. Ezzel az $[a,b]$ intervallum egy ún. beosztásához jutunk. Jelölje m_i a függvény legnagyobb alsó korlátját az i-edik intervallumon: $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$. Jelölje M_i a függvény legkisebb felső korlátját az i-edik intervallumon: $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$.

Definíció Az adott beosztáshoz tartozó **alsó összeg**nek hívjuk az

$$s = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

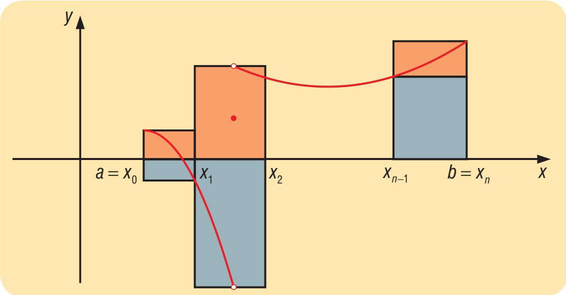
összeget.

Az adott beosztáshoz tartozó **felső összeg**nek hívjuk az

$$S = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

összeget.

Hangsúlyozni kell, hogy az összegekben szereplő tagok nem feltétlenül pozitív számok, így ezeknek területjelentést tulajdonítani csak úgy szabad, ha ún. előjeles területekként tekintünk rájuk. Ez azt jelenti, hogy az x tengely alatti téglalapok területét negatív előjellel vesszük figyelembe.



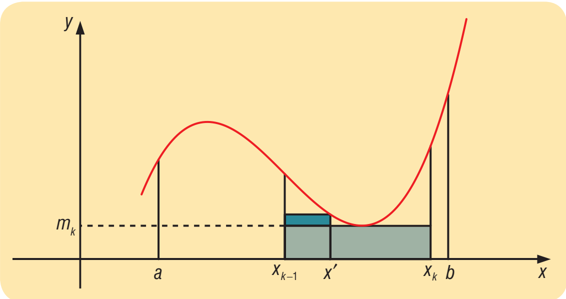
19.3. ábra Az alsó és felső összeg néhány eleme

Mivel a függvény az $[a, b]$ intervallumon korlátos, így minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumon is az. Ezért a teljességi axióma biztosítja az m_i, illetve M_i számok létezését. Világos, hogy ugyanazon beosztás mellett $s \le S$, hiszen $m_i \le M_i$ teljesül minden i-re, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$. Vizsgáljuk meg, hogy mi történik az összegekkel, ha új beosztást készítünk oly módon, hogy egy új osztáspontot veszünk fel az eddigiekhez!

1. tétel Ha egy adott beosztáshoz egy új osztáspontot veszünk hozzá, majd képezzük az alsó, illetve felső összegeket, akkor az alsó összeg nem csökkenhet, a felső összeg pedig nem növekedhet.

Bizonyítás:
Csak az alsó összegre végezzük el a bizonyítást, mivel a felső összegre teljesen hasonló gondolatmenet érvényes. Tegyük fel, hogy az új osztáspont: $x_{k-1} < x' < x_k$.

Legyen $m_k' = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x'\}$ és $m_k'' = \inf\{f(x) : x' \le x \le x_k\}$, az új alsó összeg pedig s'.



19.4. ábra Új osztáspont

Ez csak az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumhoz kapcsolódó $m_k'(x'-x_{k-1})+m_k''(x_k-x')$ tagokban tér el az eredeti s alsó összegtől. Elegendő ezért igazolnunk, hogy

$$m_k'(x'-x_{k-1})+m_k''(x_k-x')\geq m_k(x_k-x_{k-1}).$$

Világos, hogy $m_k'\geq m_k$ és $m_k''\geq m_k$, ezért

$$m_k'(x'-x_{k-1})+m_k''(x_k-x')\geq m_k\left(x'-x_{k-1}\right)+m_k(x_k-x')=m_k(x_k-x_{k-1}).$$

Ezt akartuk igazolni.

Definíció Azt mondjuk, hogy a B' beosztás finomítása a B beosztásnak, ha B minden osztáspontja a B'-nek is osztáspontja.

2. tétel Egy beosztás finomításakor az alsó összegek nem csökkennek, a felső összegek pedig nem növekednek.

Bizonyítás:
Ha a finomítás során az új osztáspontokat egyesével vesszük hozzá az eredetiekhez, akkor az 1. tétel szerint az alsó összegek nem csökkennek, a felső összegek pedig nem növekednek. Ebből adódik a 2. tétel állítása.

3. tétel Egy $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény esetén bármely beosztáshoz tartozó alsó összeg legfeljebb akkora, mint bármely beosztáshoz tartozó felső összeg.

Bizonyítás:
Jelölje s_1 az egyik beosztáshoz tartozó valamely alsó összeget, míg S_2 valamely másik beosztáshoz tartozó felső összeget. Egyesítsük a két beosztást! Ez nyilván mindkét beosztás finomítása. Ha az egyesítéssel kapott új beosztáshoz tartozó alsó összeg s, felső összeg pedig S, akkor a 2. tételt felhasználva:

$$s_1\leq s\leq S\leq S_2\Rightarrow s_1\leq S_2,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Tekintsük most az adott $[a,b]$ intervallumhoz tartozó összes alsó összeg értékeinek, illetve összes felső összeg értékeinek halmazát. A fenti tétel szerint az alsó összegek felső határa (legkisebb felső korlátja) nem lehet nagyobb a felső összegek alsó határánál (legnagyobb alsó korlátjánál).

Definíció Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény esetén az alsó összegek felső határát (legkisebb felső korlátját) az *f* **alsó integrál**jának nevezzük. **Jelölés:** $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény esetén a felső összegek alsó határát (legnagyobb alsó korlátját) az *f* **felső integrál**jának nevezzük. **Jelölés:** $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

4. tétel Tetszőleges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény esetén

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Bizonyítás:
A 3. tétel és a definíciók következményeként nyomban adódik.
A tétel fontos következménye, hogy létezik olyan szám, amely az összes alsó és felső összeg közé esik.

Definíció Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvényt az $[a,b]$ intervallumon **Riemann-integrálható**nak (röviden integrálhatónak) nevezzük, ha

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Jelölés: $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

(Riemann [1826–1866] kiváló német matematikus, nevéhez fűződik többek között a máig eldöntetlen ún. Riemann-hipotézis, amely a matematika talán leghíresebb megoldatlan problémája.)

Azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)\,dx$ szám az *f* függvény **határozott integrál**ja az $[a,b]$ intervallumban. Az *a* és *b* számokat az integrálás határainak nevezzük.

$\int_a^b f(x)\,dx$ szavakkal elmondva: „integrál az *a*-tól *b*-ig ef iksz dé iksz”.

19.5. ábra Bernhard Riemann (1826–1866)

f korlátos, de nem integrálható $[a,b]$-n:

$$s_1 \qquad \underline{\int_a^b} f \qquad \overline{\int_a^b} f \qquad S_2$$

f korlátos és integrálható $[a,b]$-n:

$$s_1 \qquad \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f \qquad S_2$$

19.6. ábra Integrálható – nem integrálható

Nagyon fontos megérteni a következőt. Pontosan akkor létezik egy és csak egy olyan szám, amely az összes alsó és felső összeg közé esik, ha a függvény (az adott intervallumon) Riemann-integrálható. Az elmondottak megértésében segít a 19.6. ábra.

3. példa Igazoljuk, hogy $f(x) = x^2$ integrálható a $[0;1]$ intervallumban, továbbá

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}!$$

Megoldás:

Ha tekintjük a $[0;1]$ intervallum n egyenlő részre való beosztását, valamint s_n, illetve S_n jelöli egy adott n-re a beosztáshoz tartozó alsó, illetve felső összegeket, akkor a 2. példa alapján: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$. Így akkor

$$\frac{1}{3} \le \underline{\int_0^1} x^2 dx \le \overline{\int_0^1} x^2 dx \le \frac{1}{3},$$

amiből a határozott integrál definíciójának felhasználásával mindkét állítás leolvasható.

4. példa Igazoljuk, hogy ha $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ (konstans függvény), akkor f integrálható $[a,b]$-n és

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Megoldás:

Mivel tetszőleges beosztás esetén $m_i = M_i = c$, ezért $s = S = c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$, amiből mindkét állítás adódik a definíció alapján.

Vajon tudunk-e példát mutatni olyan korlátos függvényre, amely nem integrálható?

5. példa Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \text{ racionális,} \\ 0, \text{ ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

ún. Dirichlet-függvény semmilyen $[a,b]$ intervallumban sem integrálható!

Megoldás:
Igazoltuk, hogy bármely két valós szám között van irracionális, illetve racionális szám is, ezért az $[a,b]$ intervallum bármely beosztása esetén $m_i = 0$ és $M_i = 1$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Így tetszőleges beosztás mellett $s = 0$ és $S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$, de akkor $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$ és $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a > 0$, tehát a definíció szerint f nem integrálható.

A definíció alapján általában igen nehéz eldönteni, hogy egy adott intervallumban valamely függvény integrálható-e, és ha igen, akkor az integrál mivel egyenlő. Az alábbiakban bizonyítás nélkül közlünk néhány olyan tételt, amelyek alapján egy adott $[a,b]$ intervallumon korlátos függvényről el lehet dönteni, hogy integrálható-e.

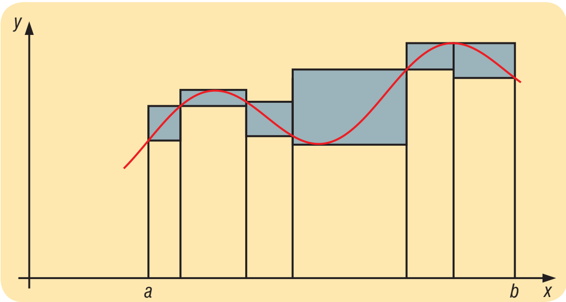
5. tétel Az $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor integrálható, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan beosztás, amelyre $S - s < \varepsilon$.

A tétel szemléletes jelentése a következő. Egy függvény pontosan akkor integrálható, ha tetszőlegesen közel van egymáshoz az alsó és felső összege. Mivel

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

ez úgy is mondható, hogy a 19.7. ábrán látható színezett téglalapok területének összege tetszőlegesen kicsivé tehető megfelelő beosztás választásával.

A tétel fontos alkalmazása az alábbi eredmény. (Egyenlő részekre való osztással egyébként nem túl nehéz igazolni.)



19.7. ábra Az alsó és felső összegek különbsége

6. tétel Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon monoton, akkor ott integrálható.

A következő tétel alapvetőnek számít, bizonyítása azonban igen nehéz.

7. tétel Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos, akkor ott integrálható.

Most már ismerünk jól használható feltételeket arra vonatkozóan, hogy egy adott intervallumon értelmezett függvényről eldöntsük, hogy ott integrálható-e. Még mindig nincs azonban a kezünkben olyan módszer, amelynek felhasználásával az integrált könnyen ki tudnánk számolni. A határozott integrál kiszámítására leggyakrabban az alábbi tételt szoktuk alkalmazni. Felfedezése óriási lökést adott a természettudományok fejlődésének.

8. tétel (Newton–Leibniz-formula)

Legyen *f* integrálható $[a,b]$-ben. Ha *f*-nek létezik az *F* primitív függvénye az $\Im$ nyílt intervallumban, továbbá $[a,b] \subset \Im$ esetén $F'(x) = f(x)$ minden $a < x < b$-re, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás:
(A bizonyítás nem érettségi követelmény, de a tétel fontossága miatt mégis ismertetjük.)
Legyen $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ az $[a,b]$ intervallum valamely beosztása. A differenciálszámítás kapcsán megismert Lagrange-tétel szerint minden *i*-re van olyan $x_{i-1} < c_i < x_i$ pont, amelyre

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Mivel $F'(c_i) = f(c_i)$, ezért

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Összegezzük az egyenleteket minden $i = 1, 2, .., n$-re! Kapjuk, hogy:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Tekintettel arra, hogy $m_i \le f(c_i) \le M_i$, adódik, hogy

$$s \le F(b) - F(a) \le S.$$

Ez azt jelenti, hogy az $F(b) - F(a)$ szám minden beosztásra a beosztáshoz tartozó alsó és felső összeg közé esik. Mivel *f* integrálható, ezért csak egyetlen ilyen szám van: $\int_a^b f(x)\,dx$, ebből pedig kapjuk a tétel állítását.

Szokás használni az $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ jelölést is, amivel felírva a formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

Fontos megérteni, hogy a Newton–Leibniz-formula már feltételezi az integrálhatóságot. Megadható olyan függvény is, amely integrálható az $[a,b]$ intervallumon, mégsem használható rá a formula, mert pl. az adott intervallumon a függvénynek nincs primitív függvénye. (Lásd a 3. kitűzött feladatot!)

6. példa Igazoljuk, hogy $f(x) = x^2$ integrálható a $[0;1]$ intervallumban, továbbá

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}!$$

Megoldás:
Az f függvény $\mathbb{R}$-en differenciálható, így folytonos, ezért a $[0;1]$ intervallumban integrálható. Világos, hogy $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, ezért $F(x) = \frac{x^3}{3}$ primitív függvény, így a Newton–Leibniz-formula szerint:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

7. példa

Számítsuk ki a $\int_0^\pi \sin x dx$ integrál értékét!

Megoldás:
Az integrál nyilván létezik, hiszen a szinuszfüggvény mindenütt folytonos. Tudjuk, hogy $\int \sin x dx = -\cos x + c$, ezért a Newton–Leibniz-formula szerint:

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

(Elég meglepő eredmény!)

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálok értékét (amennyiben az integrálok léteznek)!

a) $\int_0^\pi \cos x dx$ b) $\int_0^1 x^3 dx$ c) $\int_2^4 \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx$

2. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálok értékét (amennyiben az integrálok léteznek)!

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$ c) $\int_{-1}^1 2x^5 dx$ d) $\int_0^2 \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx$

3. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 0, \\ 2, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy f integrálható a $[-1;1]$ intervallumon, és számítsuk ki $\int_{-1}^1 f(x) dx$ értékét!

20. A határozott integrál és a műveletek

Most megvizsgáljuk, hogy integrálható függvényekre alkalmazva bizonyos műveleteket, hogyan számolható ki az integrál értéke. Először az integrálási határokra vonatkozó néhány megjegyzés következik.

Definíció Ha f értelmezve van az a pontban, akkor legyen $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Definíció Ha $a < b$ és f integrálható az $[a,b]$-n, akkor $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

(Az integrálási határokat felcserélve, az integrál a (-1)-szeresére változik.)

Tétel Ha $a < b < c$, és f integrálható az $[a,b]$ és a $[b,c]$ intervallumokon, akkor f integrálható az $[a,c]$-n is, és

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

A tétel bizonyítását mellőzzük. A következő tételek a számolásokban tudnak hasznos segítséget nyújtani. (A bizonyításokat elhagyjuk.)

Tétel Ha f integrálható az $[a,b]$ intervallumban és $c \in \mathbb{R}$, akkor cf is integrálható, és

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tétel Ha f és g integrálható az $[a,b]$ intervallumban, akkor $f+g$ is integrálható ott, és

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Tétel Ha f és g integrálható az $[a,b]$ intervallumban és $f(x) \ge g(x)$ minden $x \in [a,b]$-re, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx.$$

Oldjuk meg!

1. a) $\int_1^3 (x^2 - \sin x + 2)\,dx = ?$ b) $\int_{-3}^2 (x^2 - |x|)\,dx = ?$ c) $\int_{-1}^2 \left(3x^2 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{|x|}\right)dx = ?$

d) $\int_{1}^{4}(x-4)(3x+1)\,dx=?$ e) $\int_{-2}^{-1}\frac{2x-1}{x^3}\,dx=?$ f) $\int_{-1}^{1}\frac{(2x+1)(x-3)}{x^4}\,dx=?$

2. Legyen $f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x\le 0,\\ \sin x, & \text{ha } 0<x<\frac{\pi}{2}.\\ \frac{2}{\pi}x, & \text{ha } \frac{\pi}{2}\le x.\end{cases}$ Számítsuk ki: $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=?$

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 774-778. feladatok

21. A határozott integrál alkalmazásai

21.1. Területszámítás

Könyvünk területszámítással foglalkozó részében szó volt arról, mikor mondjuk, hogy egy síkidomnak van területe. Idézzük ezt most fel! Tételezzük fel, hogy a síkidom korlátos, tehát lefedhető pl. egy négyzettel. Tekintsük a síkidomon belülre írt összes sokszöget! Ezeknek létezik területe, a mérőszámok $\{t_1,t_2,t_3,...\}$ halmaza pedig felülről korlátos, hiszen a síkidomot fedő négyzet területe nyilvánvalóan felső korlát. Tekintsük a síkidomon kívülre írt sokszögeket, ezeknek létezik területe, és a mérőszámok $\{T_1,T_2,T_3,...\}$ halmaza alulról korlátos, hiszen bármely belülre írt sokszög területe alsó korlát. Axióma rögzíti (teljességi axióma, a számok valósak), hogy felülről korlátos nemüres számhalmaznak van legkisebb felső korlátja. Ugyancsak érvényes, hogy alulról korlátos nemüres számhalmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja. Akkor mondjuk, hogy a síkidomnak van területe, ha a $\{t_1,t_2,t_3,...\}$ halmaz *t* legkisebb felső korlátja egyenlő a $\{T_1,T_2,T_3,...\}$ halmaz *T* legnagyobb alsó korlátjával. A síkidom területének mérőszáma ekkor a $t=T$ szám.

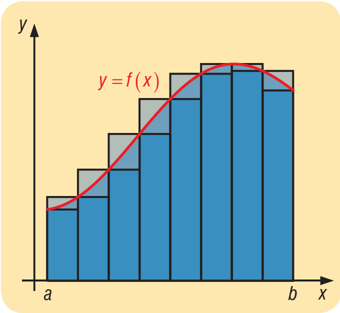
Tegyük fel, hogy az $[a,b]$ intervallumban az f függvény folytonos, továbbá $f(x)\ge 0$. Most azt kérdezzük, hogy mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az *f* függvény grafikonja, az *x* tengely, valamint az $x=a$, illetve $x=b$ egyenesek határolnak. Az *f* integrálható az $[a,b]$-n, ezért mivel

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le t \le T \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

így

$$t=T=\int_a^b f(x)\,dx.$$

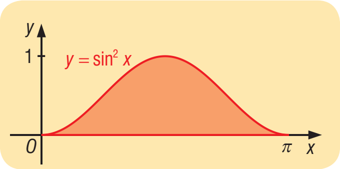
A grafikon alatti terület ebben az esetben tehát azonosítható a határozott integrál értékével.



21.1. ábra Alsó és felső összegek

1. példa Határozzuk meg az $f(x)=\sin^2 x$ függvény grafikonja alatti területet a $[0,\pi]$ intervallumon!

Megoldás:



21.2. ábra Terület

A határozatlan integrállal foglalkozó rész 4. d) példája szerint

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

A Newton–Leibniz-formula miatt:

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

A síkidom területe tehát $\frac{\pi}{2}$ területegység.

Nagyon gyakran van arra szükség, hogy kiszámítsuk két függvény grafikonja közé eső síkidom területét.

Tétel Tegyük fel, hogy az f és g függvények folytonosak az $[a,b]$ intervallumban, továbbá $f(x) \geq g(x)$, ha $a \leq x \leq b$. Ekkor a két grafikon, valamint az $x=a$, illetve $x=b$ egyenesek által határolt síkidom területe:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

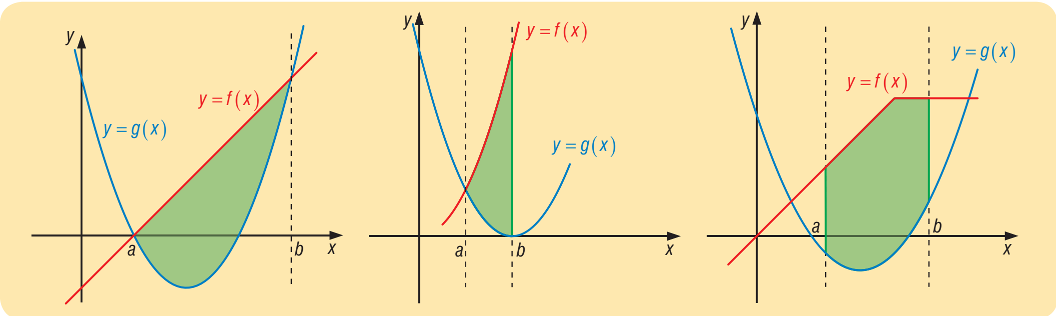
(A képlet akkor is érvényes, ha valamelyik, vagy akár mindkét egyenes helyett $x=a$, illetve $x=b$ a két grafikon közös pontjának első koordinátája, tehát a grafikonok akár „teljesen körbeveszik" a síkidomot.)

Bizonyítás:

Toljuk el az y tengellyel párhuzamosan mindkét grafikont úgy, hogy az $[a,b]$ intervallumon $g(x) \geq 0$ teljesüljön. Az eltolás a síkidom területét nem változtatja meg. Ha $c>0$-val emeltük meg a grafikonokat, akkor a keresett terület:

$$\int_a^b (f(x)+c)dx - \int_a^b (g(x)+c)dx = \int_a^b (f(x)+c-g(x)-c)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

Ezt akartuk igazolni.



21.3. ábra A grafikonok által körbezárt területek

A következő feladat 2009-ben az emelt szintű matematika írásbeli érettségin szerepelt.

2. példa Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{ha } x\le -1\\ 2x+1, & \text{ha } -1<x<0\\ 1, & \text{ha } x\ge 0\end{cases} \quad \text{és} \quad g(x)=x^2-2.$$

a) Ábrázolja ugyanabban a derékszögű koordináta-rendszerben mindkét függvény grafikonját! Adja meg az $f(x)=g(x)$ egyenlet valós megoldásait!
b) Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét!

Megoldás:
a) A függvények grafikonjai:
Ha $x\le -1$, akkor az $f(x)=g(x)$ egyenlet:

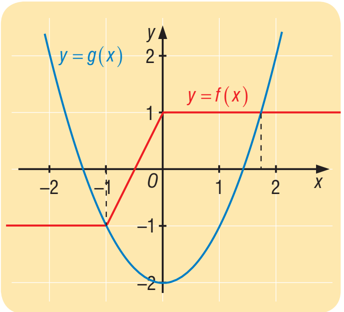
$$-1=x^2-2,$$
$$1=x^2 \Leftrightarrow -1=x.$$

Ha $-1<x<0$, akkor

$$2x+1=x^2-2,$$
$$0=x^2-2x-3,$$

ennek az adott intervallumon nincs megoldása.
Ha $x\ge 0$, akkor

$$1=x^2-2,$$
$$3=x^2 \Leftrightarrow \sqrt{3}=x.$$



21.4. ábra A két függvény grafikonja

Az egyenlet megoldásai tehát $x=-1$ és $x=\sqrt{3}$.
b) A közrefogott terület a tétel alapján:

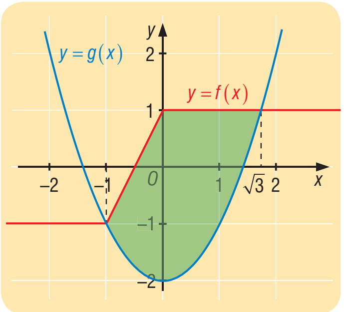
$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

A két részt külön-külön számoljuk ki. A $[-1;0]$ intervallumon:

$$\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(2x+1-x^2+2\right)dx=$$
$$=\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{3}.$$

A $\left[0;\sqrt{3}\right]$ intervallumon:

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(1-x^2+2\right)dx=$$
$$=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(-x^2+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{0}^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

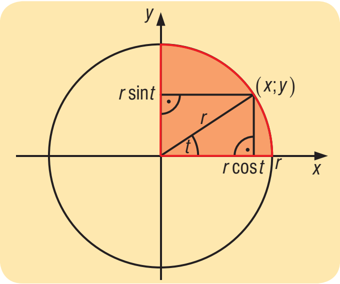


21.5. ábra A grafikonok által körbezárt terület

A keresett terület ezért $\frac{5}{3}+2\sqrt{3}\approx 5{,}13$ területegység.

21.2. A kör területe (Olvasmány)

Már általános iskolában tanították, hogy az r sugarú kör területe πr^2. Ennek az igazolása azonban nem egyszerű feladat.



21.6. ábra A kör területe

Tekintsük az $x^2+y^2=r^2$ egyenletű kört! Elegendő az első síknegyedbe eső részének a területét kiszámolnunk, hiszen a kör területe ennek a 4-szerese. A feladat az

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

integrál kiszámítása.

Az összetett függvény differenciálási szabálya, valamint a Newton–Leibniz-formula segítségével igazolható az alábbi tétel:

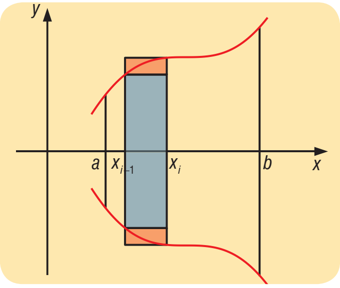
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx=\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Itt f folytonos a $[g(a),g(b)]$ intervallumon, g differenciálható, g' pedig folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Legyen $x=r\cos t\ (=g(t))$, ahol $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Ekkor $\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2(1-\cos^2 t)}=$ $=r\sin t$ és $(r\cos t)'=-r\sin t$, így az előbbi tétel miatt:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\sin t(-r\sin t)\,dt=-r^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{r^2\pi}{4},$$

felhasználva az 1. példát. Ezzel a kör területére vonatkozó eredmény adódik.

21.3. A forgástestek térfogata



21.7. ábra Forgástest térfogata

Ha egy síkidomot egy tengely körül megforgatunk, akkor ún. forgástestet kapunk. Célunk a forgástestek térfogatára vonatkozó képlet megtalálása.

Tegyük fel, hogy az $[a,b]$ intervallumban az f függvény folytonos, továbbá $f(x)\ge 0$. Tekintsük azt a síkidomot, amelyet az f függvény grafikonja, az x tengely, valamint az $x=a$, illetve $x=b$ egyenesek határolnak. Forgassuk meg ezt az x tengely körül, ekkor egy forgástesthez jutunk. Vegyük az $[a,b]$ intervallum valamely beosztását, és legyen $[x_{i-1},x_i]$ az i-edik részintervallum. A fölötte lévő m_i magasságú belülre írt téglalap megforgatásával a testen belülre írt m_i sugarú, x_i-x_{i-1} magasságú körhengert kapunk. Hasonló módon adódik a testen kívülre írt M_i sugarú és x_i-x_{i-1} magasságú körhenger. A belülre írt hengerek térfogatainak összege:

$$\pi m_1^2(x_1-x_0)+\pi m_2^2(x_2-x_1)+\ldots+\pi m_n^2(x_n-x_{n-1}).$$

A kívülre írt hengerek térfogatainak összege:

$$\pi M_1^2\left(x_1-x_0\right)+\pi M_2^2\left(x_2-x_1\right)+\ldots+\pi M_n^2\left(x_n-x_{n-1}\right).$$

Ezek az $[a,b]$ intervallumon a πf^2 függvényhez tartozó alsó, illetve felső összegek! Mivel f folytonos, ezért πf^2 is az, következésképpen integrálható. Mint tudjuk, ez azt jelenti, hogy egyetlen olyan szám van, amely bármely alsó és felső összeg közé esik: $\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$. A forgástest térfogatára vonatkozó képlet tehát:

Tétel

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Tétel

Az r sugarú gömb térfogata $V=\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

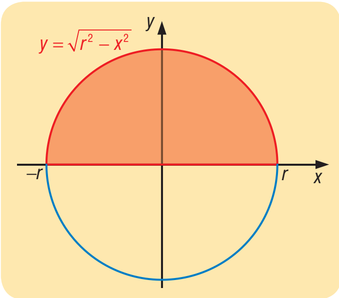
Bizonyítás:

Tekintsük az $f:[-r,r]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ függvényt! Ennek a grafikonja az origó középpontú, r sugarú félkör. Ha a grafikon és az x tengely által határolt félkörlapot megforgatjuk az x tengely körül, akkor egy origó középpontú, r sugarú gömböt kapunk. Alkalmazva a forgástestek térfogatára vonatkozó eredményt:

$$V_{\text{gömb}}=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=$$

$$=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

Ezt akartuk igazolni.



21.8. ábra A gömb térfogata

Oldjuk meg!

1. Mekkora területű síkidomot fog közre az $f(x)=x^2-5$ és a $g(x)=-x^2+4x+1$ függvény grafikonja?
2. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y=2-x-x^2$ egyenletű parabola és a tengelypontján áthaladó, 2 iránytangensű egyenes fog közre?
3. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amelyet az $y=x^3+8$ egyenletű görbe és a két koordinátatengely által határolt síkidom x tengely körüli forgatásával kapunk?

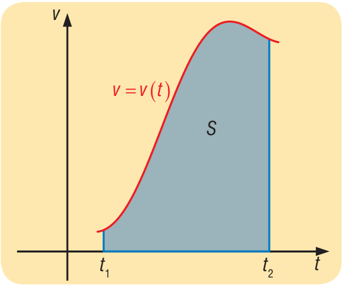
4. Tekintsük az $y = x^2$ parabola $(0;0)$, illetve $(a;a^2)$ pontja által kijelölt szelőt $(a > 0)$! Húzzunk a szelővel párhuzamos érintőt a parabolához! Mutassuk meg, hogy a parabolaszelet területe $\frac{4}{3}$-szorosa a szelővégpontok, valamint az érintési pont által kijelölt háromszög területének! (Arkhimédész)

További feladatok:
Ruff János – Schultz János: *Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12.* Maxim Könyvkiadó.: 779-784. feladatok

22. Fizikai alkalmazások (Kiegészítő lecke)

22.1. Az út

Eddigi ismereteink birtokában (legalábbis egyenes vonalú mozgás esetén) igazolni tudjuk azt az állítást, hogy a megtett út a sebesség–idő grafikon alatti területtel egyenlő. Tekintsünk egy tömegpontot, amelynek a sebességét a $[t_1, t_2]$ időintervallumban a $v = v(t)$ sebesség–idő függvény írja le. Természetesnek érezzük, hogy a függvény folytonos. Mivel $v(t) = s'(t)$, ezért a Newton–Leibniz-formula szerint:



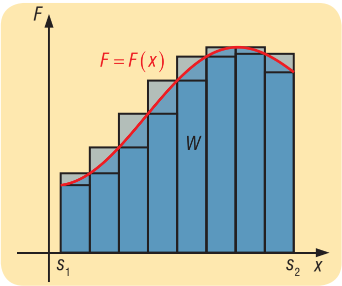
22.1. ábra Az út

Tétel

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = [s(t)]_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1) = s.$$

A terület értelmezéséről mondottak miatt készen vagyunk.

22.2. A munka



22.2. ábra A munka

Tételezzük fel, hogy egy tömegpontra ható erő hatására az elmozdul, és egy egyenes mentén mozog. (Az egyszerűség kedvéért legyen ez az x tengely. Ekkor az elmozdulás nagysága megegyezik a megtett úttal.) Legyen F az erőnek az elmozdulás irányába eső komponense. A fizikában alapvető kérdés az, hogy mekkora munkát végez az F erő a testen adott s úton?

Ha F állandó, akkor definíció szerint a munka:

$$W = F \cdot s.$$

Ha nem állandó, akkor kis részekre bontva fel az utat, az egy-egy szakaszhoz tartozó ún. elemi munkák összegzésével kapjuk a munkát. Az elemi munka becsülhető:

$$m_i\left(x_i - x_{i-i}\right) \le W_i \le M_i\left(x_i - x_{i-1}\right),$$

ezért

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) \le W \le \sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Ha az F folytonos függvénye az x-nek, akkor a határozott integrálról tudottak miatt:

Tétel

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(x)\,dx.$$

1. példa Egy test sebessége a megfigyelés kezdete óta eltelt időtől a $v = 2\cos(10\pi t)$ függvény szerint változik. Mekkora utat tesz meg $t = 0{,}05$ másodperc alatt?

Megoldás:

A Newton–Leibniz-formulát alkalmazva:

$$s = \int_0^{0,05} 2\cos(10\pi t)\,dt = \left[\frac{2}{10\pi}\sin(10\pi t)\right]_0^{0,05} = \frac{5}{\pi} \approx 1{,}59 \text{ m}.$$

2. példa Mekkora munkát kell végezni az m tömegű testen, amíg az M tömegű testtől mért a távolságról b távolságba $(a < b)$ visszük állandó sebességgel? (Feltehetjük, hogy a testek pontszerűek.)

Megoldás:

Az ún. gravitációs erőtörvény szerint az M tömegű ponttól x távolságra lévő m tömegű testre ható gravitációs erő nagysága: $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$, ahol γ az ún. gravitációs állandó. Ezzel az erővel mindvégig egyenlő nagyságú (csak ellentétes irányú) erővel kell az m tömegű testet mozgatnunk. A végzett munka:

$$W = \int_a^b \gamma \frac{mM}{x^2}\,dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \gamma mM\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \gamma mM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Számos további példát is hozhatnánk (rezgőmozgás, potenciális energia, mozgási energia stb.), ezekkel a fizikatanulmányok során ismerkedhetünk meg.

23. Két érdekes alkalmazás (Olvasmány)

1. példa Igazoljuk, hogy létezik olyan pozitív egész n szám, amelyre

$$2010 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2011.$$

Megoldás:

Tekintsük az $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ egyenletű függvénygrafikont az $[1; n]$ intervallumon! Ha az $[1; n]$ intervallumot $n-1$ egyenlő részre bontjuk, akkor a grafikon alatti területre a belülre, illetve a kívülre írt téglalapok segítségével adódnak a következő becslések:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{n} - 1,$$

valamint

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Ezekből adódik, hogy

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Könnyű látni, hogy $n = 1006^2$ választással teljesül a feladatban szereplő egyenlőtlenség.

(Felhasználtuk, hogy $\left(2\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, valamint a Newton–Leibniz-formulát.)

2. példa Legyen

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Igazoljuk, hogy $0 < c_n \le 1$ minden pozitív egész n esetén!

Megoldás:

Tekintsük az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű függvénygrafikont az $[1; n]$ intervallumon! Ha az $[1; n]$ intervallumot $n-1$ egyenlő részre bontjuk, akkor a grafikon alatti területre a belülre, illetve a kívülre írt téglalapok segítségével adódnak a következő becslések:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n,$$

valamint

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1) > \ln n.$$

Ezekből az állítás leolvasható.

(Felhasználtuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, valamint a Newton–Leibniz-formulát.)

IX. fejezet
Halmazok és logika

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	...
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	...
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	...
$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	...
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	...
$\frac{9}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{9}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Véges vagy végtelen?

1. Halmazok számossága

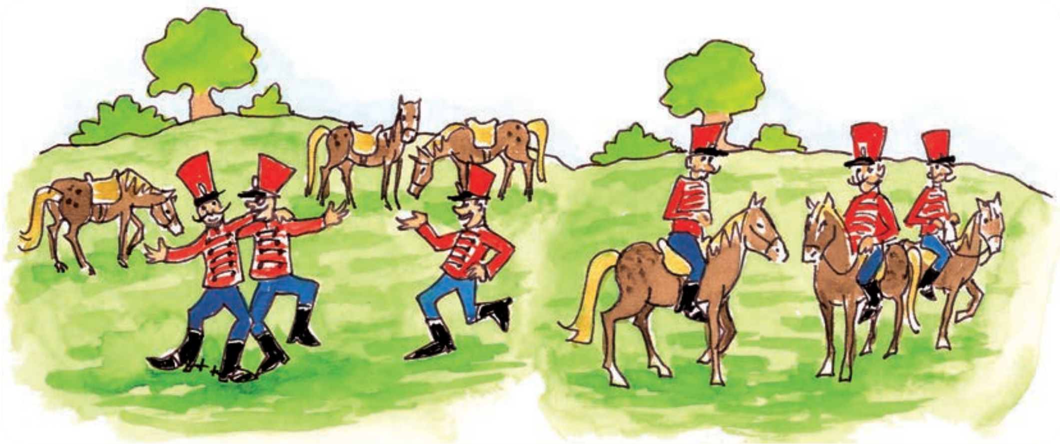
1.1. ábra Injekció

A 9. osztályban megismerkedtünk a **függvény (leképezés)** fogalmával. A speciális függvények közül **a kölcsönösen egyértelmű** függvény (**injekció**) is szerepelt a kilencedikeseknek íródott tankönyvben.

Definíció Az $f\colon\ A \to B$ függvény **ráképezés (szürjekció)**, ha $R_f = B$.

Tehát egy függvény ráképezés, ha **képhalmaza** és **értékkészlete** egyenlő.

Definíció Egy függvény **bijekció**, ha kölcsönösen egyértelmű és ráképezés.



1.2. ábra Bijekció

1. példa Döntsük el, hogy a következő függvények közül melyik bijekció, olyan ráképezés, amely nem bijekció, olyan kölcsönösen egyértelmű függvény, amely nem ráképezés és olyan függvény, amely nem szürjekció és nem injekció!

a) $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = |x|$ b) $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|$

c) $h\colon\ \mathbb{N} \to \{0, 2, 4, ..., 2k, ...\},\ k \in \mathbb{N},\ h(x) = 2x$

d) $i\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+,\ i(x) = x + 1$ e) $j\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ j(x) = 3x + 1$

Megoldás:

a) Minden természetes szám egyenlő az abszolút értékével, így minden természetes számhoz önmagát rendeljük, ezért nyilvánvaló, hogy *f* bijekció.

b) Valós számok abszolút értéke nemnegatív, így *g* nem szürjekció. Bármely valós számnak és ellentettjének abszolút értéke egyenlő, így *g* nem injekció.

c) A *h* bijekció, hiszen különböző természetes számoknak a kétszeresük is különböző, és minden páros természetes számot a feléhez rendeli a *h* függvény.

d) Az *i* bijekció.

e) A *j* injekció, de nem szürjekció.

2. példa Lehet-e $A \to B$ bijekciót megadni az alábbi esetekben?

a) $A = \{$mákos tészta; paradicsomos káposzta; gyros$\}$, $B = \{1;2;3\}$

b) $A = \{$Lengyelország; Csehország, Ukrajna; Románia$\}$, $B = \{$Varsó; Budapest$\}$

c) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}^+$

d) $A = \{$egy egyenes pontjai$\}$, $B = \mathbb{R}$

e) $A = \{$egy sík pontjai$\}$, $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (a rendezett valós számpárok halmaza)

f) $A = [0; 2\pi[$, $B = \{$egy kör pontjai$\}$

Megoldás:

a) A következő hozzárendelés $A \to B$ bijekció:
mákos tészta $\mapsto 1$
paradicsomos káposzta $\mapsto 2$
gyros $\mapsto 3$.

b) $A \to B$ bijekció nem létezik. Bármelyik várost is rendeljük Lengyelországhoz és Csehországhoz, Ukrajnához, Romániához már nem lehet rendelni semmit.

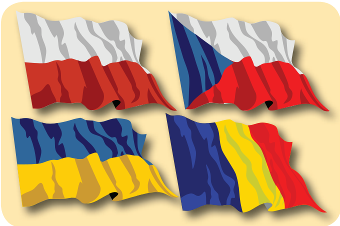
c) Az előző példa *i* függvénye $A \to B$ bijekció.

d) Vegyük észre, hogy a valós számok számegyenesen való ábrázolása $A \to B$ bijekció!

e) A sík pontjainak koordinátázása $A \to B$ bijekció.

f) Legyen a kör középpontja *O*, egy adott pontja *Q*! Bármely $x \in [0; 2\pi[$-re $x \mapsto P(x)$ úgy, hogy $P(x)$ azon pontja a körnek, melyre $P(x)OQ\angle = x$. Minden $[0; 2\pi[$-beli x számhoz rendeltünk egy körön levő pontot. (Azt, amelynek az irányszöge x.) Különböző $[0; 2\pi[$-beli elemekhez különböző pontokat rendeltünk. Minden körre illeszkedő pontot rendeltük egy $[0; 2\pi[$-beli számhoz (az irányszögéhez). Ebből következően a most megadott függvény $A \to B$ bijekció.

1.3. ábra Gyros



1.4. ábra Zászlók

1.5. ábra Bertrand Russel (1872–1970)

Vegyük észre, hogy vannak olyan halmazpárok, melyek között megadható bijekció, és vannak olyanok is, amelyek között nem.

Ha létezik $A \to B$ bijekció, azt így jelölhetjük: $A \rightleftarrows B$. Ha az A és B halmaz között nem adható meg bijekció, azt így jelöljük: $A \not\rightleftarrows B$. (Megjegyezzük, hogy ezek a jelölések nem általánosan elfogadottak, csak itt használjuk őket.)

A korábbi ismereteink alapján azt is mondhatnánk, hogy a $\rightleftarrows$ egy halmazok közötti reláció (mint például az egész számok halmazán az oszthatóság vagy a síkbeli ponthalmazok halmazán az egybevágóság). Ezt nem tehetjük, mert a relációk csak egy halmaz elemei között értelmezettek, ahhoz, hogy $\rightleftarrows$ reláció legyen, ahhoz az „összes halmazok halmazának” kéteznie kéne, de ez nincs így. Aki erről a témáról bővebbet szeretne megtudni, nézze meg a következő weboldalt: http://hu.wikipedia.org/wiki/Russell-paradoxon.

A $\rightleftarrows$ tulajdonságairól szól a következő tétel:

Tétel Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor
$A \rightleftarrows A$; („**reflexivitás**”).
Ha $A \rightleftarrows B$, akkor $B \rightleftarrows A$ („**szimmetrikusság**”).
Ha $A \rightleftarrows B$ és $B \rightleftarrows C$, akkor $A \rightleftarrows C$ („**tranzitivitás**”).

(A zárójelekben levő kifejezéseket azért tettük idézőjelbe, mert azok relációtulajdonságok, és – mint már említettük – a $\rightleftarrows$ nem reláció.)

Bizonyítás:

a) Ha az A minden eleméhez önmagát rendeljük, akkor ez a függvény nyilvánvalóan bijekció.

b) Mivel $A \rightleftarrows B$, létezik $f\colon A \to B$ bijekció. Ennek a függvénynek az **inverze** f^{-1} nyilvánvalóan $B \to A$ bijekció, így az állítást bebizonyítottuk. (Az **inverz függvény** fogalma a 9. osztályból már ismert.)

c) Mivel $A \rightleftarrows B$ és $B \rightleftarrows C$, léteznek $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ bijekciók. Tekintsük a következő hozzárendelési szabállyal megadott, az A halmazon értelmezett h függvényt: $h(x) = g(f(x))$ (**összetett függvény**). Bármely $x \in A$-ra $f(x) \in B$, ebből következően $h(x) = g(f(x)) \in C$, azaz a h **értékkészlete**, $R_h \subseteq C$.

Ha $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ és $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$, hiszen f bijekció. Ekkor $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, hiszen g bijekció. Kaptuk, hogy $h(x_1) \neq h(x_2)$, azaz h **kölcsönösen egyértelmű** függvény.

Legyen z tetszőleges eleme a C halmaznak! Mivel g bijekció, létezik olyan t eleme a B halmaznak, melyre $z = g(t)$. Mivel f bijekció, létezik olyan r eleme az A halmaznak, melyre $t = f(r)$, azaz $z = g(t) = g(f(r)) = h(r)$. Kaptuk, hogy a h **ráképezés**.

Bebizonyítottuk, hogy $h: A \to C$ kölcsönösen egyértelmű ráképezés, tehát bijekció, azaz $A \rightleftarrows C$.

Megjegyzés:
Az a reláció, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív, **ekvivalenciareláció**. Ezért aztán az $A \rightleftarrows B$-t szokás – nem teljesen precízen – úgy mondani, hogy „A ekvivalens B”. A korábbi példáink alapján:

a) $\mathbb{N} \rightleftarrows \{0, 2, 4, ..., 2k, ...\}, k \in \mathbb{N}$

b) $\mathbb{N} \rightleftarrows \mathbb{Z}^+$

c) {mákos tészta, paradicsomos káposzta, gyros} $\rightleftarrows \{1, 2, 3\}$

d) {Lengyelország, Csehország, Ukrajna, Románia} $\not\rightleftarrows$ {Varsó, Budapest}

e) {egy egyenes pontjai} $\rightleftarrows \mathbb{R}$

f) {egy sík pontjai} $\rightleftarrows \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

g) $[0; 2\pi[\rightleftarrows$ {egy kör pontjai}

1.6. ábra Országok a térképen

3. példa Döntsük el, hogy az alábbi halmazpárok között létezik-e bijekció!

a) $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z}^+$ és $\mathbb{Q}^+$

c) $[0;1[$ és $[a;b[$, ahol $a < b$, a és b tetszőleges valós számok

d) $[0;1[$ és $]0;1[$

e) $\mathbb{Z}^+$ és $\mathbb{Q}$

f) {egy nyitott félegyenes pontjai} és $]0;1[$

g) $[0;1[$ és $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

h) $]0;1[$ és $\mathbb{R}$

Megoldás:
a) Legyen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ függvény hozzárendelési szabálya a következő:

ha $x = 2k$, ahol k természetes szám, akkor $f(x) = \frac{x}{2}$;

ha $x = 2k + 1$, ahol k természetes szám, akkor $f(x) = -\frac{x+1}{2}$.

Az így megadott f függvény bijekció, azaz $\mathbb{N} \rightleftarrows \mathbb{Z}$.

b) Tekintsük a következő táblázatot!

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	...
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	...
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	...
$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	...
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	...
$\frac{9}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{9}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Ebben minden pozitív racionális szám szerepel (többször is). Megadunk e táblázaton egy „bejárást”, amelyet piros vonallal szemléltetünk.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	...
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	...
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	...
$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	...
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	...
$\frac{9}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{9}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

MatEm_Book.indb 378 2012.07.05. 12:39:10

Ennek segítségével adunk meg egy $f\colon\ \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}^+$ függvényt:

$1 \mapsto \frac{1}{1} = 1 \qquad 2 \mapsto \frac{1}{2} \qquad 3 \mapsto \frac{2}{1} = 2 \qquad 4 \mapsto \frac{3}{1} = 3 \qquad 5 \mapsto \frac{1}{3}$

(A $\frac{2}{2} = 1$ kimaradt, mert korábban már szerepelt.)

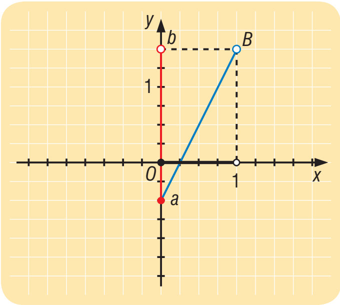
$6 \mapsto \frac{1}{4} \qquad 7 \mapsto \frac{2}{3} \qquad 8 \mapsto \frac{3}{2} \qquad 9 \mapsto \frac{4}{1} = 4 \qquad 10 \mapsto \frac{5}{1} = 5 \qquad 11 \mapsto \frac{1}{5}$

(A $\frac{4}{2} = 2$, a $\frac{3}{3} = 1$ és a $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ kimaradtak, mert már korábban szerepeltek.)

$12 \mapsto \frac{1}{6}$ És így tovább…

Könnyen belátható, hogy f bijekció, azaz $\mathbb{Z}^+ \rightleftarrows \mathbb{Q}^+$.

c) Legyen f a $[0;1[$-en értelmezett $f(x) = (b-a)x + a$ hozzárendelési szabállyal megadott (lineáris) függvény! A kilencedikes függvénytani ismereteinkből tudjuk, az ilyen függvény kölcsönösen egyértelmű, értékkészlete $[a;b[$. Ebből következően: $[0;1[\rightleftarrows [a;b[$ (1.7. ábra)



1.7. ábra $[0;1[\rightleftarrows [a;b[$ bijekció

d) Legyen f a $[0;1[$-en értelmezett függvény a következő hozzárendelési szabállyal megadva: $0 \mapsto \frac{1}{2}$,

ha $x = \frac{1}{n+1}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor $f(x) = \frac{1}{n+2}$;

ha $x \neq \frac{1}{n+1}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor $f(x) = x$.

Ezzel a hozzárendeléssel a $\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n+1}; \ldots\}$ és a $\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{n+2}; \ldots\}$ halmazokat kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltettük egymásnak. A fennmaradó elemek önmaguknak felelnek meg, így $[0;1[\rightleftarrows]0;1[$.

e) A b) pontban megadtunk egy $g\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}^+$ bijekciót. Legyen az f a $\mathbb{Z}^+$-n értelmezett függvény a következő hozzárendelési szabállyal értelmezve: $1 \mapsto 0$,

ha $x = 2k$, ahol k pozitív egész szám, akkor

$$f(x) = g\left(\frac{x}{2}\right);$$

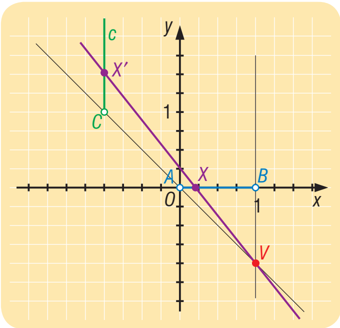
ha $x = 2k+1$, ahol k pozitív egész szám, akkor

$$f(x) = -g\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Megmutatható, hogy $f\colon\ \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$ bijekció, így $\mathbb{Z}^+ \rightleftarrows \mathbb{Q}$.

f) Tekintsük meg az 1.8. ábrát!

A $]0;1[= AB$ és a C kezdőpontú c nyílt félegyenes közötti bijekciót V pontból történő vetítés adja. Ebből következően $]0;1[\rightleftarrows c$.



1.8. ábra $]0;1[\rightleftarrows c$ bijekció

g) Koordináta-geometriai tanulmányainkból tudjuk, hogy $\mathbb{R}^+ \rightleftarrows \{\text{egy nyitott félegyenes pontjai}\}$. Az f) és a „tranzitivitás” miatt $\mathbb{R}^+ \rightleftarrows \left]0;1\right[$. Ha a 0-nak önmagát feleltetjük meg, akkor bijekciót adtunk meg $\left[0;1\right[$ és $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ között, azaz $\left[0;1\right[\rightleftarrows \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

h) A c) pont szerint: $\left[0;1\right[\rightleftarrows \left[\frac{1}{2};1\right[$, a g)-ből következően $\left[0;1\right[\rightleftarrows \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Alkalmazva a „tranzitív” tulajdonságot, $\left[\frac{1}{2};1\right[\rightleftarrows \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, azaz létezik g: $\left[\frac{1}{2};1\right[\rightleftarrows \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bijekció:

Legyen h: $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ $h(x) = 2x$ függvény. Megmutatható, hogy ez $\left]0;\frac{1}{2}\right[\to \left]0;1\right[$ bijekció. A f)-ből következően $\mathbb{Q}^- \rightleftarrows \left]0;1\right[$, a tranzitivitás miatt $\left]0;\frac{1}{2}\right[\rightleftarrows \mathbb{Q}^-$. Ebből már következik az állítás.

Az eddigiek alapján:

a) $\mathbb{Z}^+ \rightleftarrows \mathbb{N} \rightleftarrows \mathbb{Z} \rightleftarrows \mathbb{Q}^+ \rightleftarrows \mathbb{Q} \rightleftarrows \{0, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$, $k \in \mathbb{N}$

b) $\left]0;1\right[\rightleftarrows \left[0;1\right[\rightleftarrows \left[a;b\right[\rightleftarrows \{\text{nyílt félegyenes pontjai}\} \rightleftarrows \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightleftarrows \mathbb{R} \rightleftarrows \{\text{egy kör pontjai}\}$

c) $\{\text{egy sík pontjai}\} \rightleftarrows \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1.9. ábra Végtelen

Látható, hogy van olyan halmaz, amely és egy valódi részhalmaza között bijekció adható meg. Például: $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}^+ \rightleftarrows \mathbb{N}$. Vannak olyan halmazok is, amelyek és bármelyik valódi részhalmazuk között nem hozható létre bijekció.

Definíció Az A halmaz végtelen, ha van olyan B valódi részhalmaza, melyre $A \rightleftarrows B$.

Definíció Az A halmaz véges, ha nem végtelen.

1.10. ábra Véges vagy végtelen?

Véges halmaz és egyetlen valódi részhalmaza között nem adható meg bijekció.

Az eddig szereplő halmazok közül végtelen halmazok például: $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^+$, $\{0, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\left]0;1\right[$, $\left[0;1\right[$, $\left[a;b\right[$, $\{\text{nyílt félegyenes pontjai}\}$, $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$, $\{\text{egy kör pontjai}\}$.

Felvetődhet a kérdés, hogy az előzőekben az a) pontban felsorolt halmazok valamelyike és a b) pontban szereplő halmazok valamelyike között megadható-e bijekció.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{Z}^+ \rightleftarrows \left[0;1\right[$! Ekkor létezik f: $\mathbb{Z}^+ \to \left[0;1\right[$ bijekció. Ennek hozzárendelési szabálya:

$$
\begin{aligned}
1 &\mapsto y_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots\\
2 &\mapsto y_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots\\
3 &\mapsto y_3 = 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots\\
&\vdots\\
n &\mapsto y_n = 0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A bal oldalon a pozitív egész számok, a jobb oldalon az *f* által a $[0;1[$-ból hozzájuk rendelt számok tizedes tört alakja szerepel $\left(a_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}\right)$. A véges tizedes törtek két alakban is megadhatók, például $0,13 = 0,1300\ldots = 0,13\dot{0} = 0,1299\ldots = 0,12\dot{9}$. Állapodjunk meg abban, hogy az ilyen számokat az első formában (a $\dot{0}$ szakasszal) szerepeltetjük!

Tekintettel arra, hogy *f* bijekció, a függvényértékek között a $[0;1[$ összes eleme megjelenik. Legyen most $y = 0,b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$ úgy, hogy $b_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, és

$$
\begin{aligned}
&b_1 \neq a_{11} \text{ és } b_1 \neq 9\\
&b_2 \neq a_{22} \text{ és } b_2 \neq 9\\
&b_3 \neq a_{33} \text{ és } b_3 \neq 9\\
&\vdots\\
&b_n \neq a_{nn} \text{ és } b_n \neq 9\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(A második feltétel azért szükséges, hogy az *y* tizedes tört alakja ne tartalmazzon $\dot{9}$ szakaszt.)

$$
\begin{aligned}
&y \neq y_1, \text{ hiszen } b_1 \neq a_{11},\\
&y \neq y_2, \text{ hiszen } b_2 \neq a_{22},\\
&y \neq y_3, \text{ hiszen } b_3 \neq a_{33},\\
&\vdots\\
&y \neq y_n, \text{ hiszen } b_n \neq a_{nn},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ugyanakkor $y \in [0;1[$. Megadtunk egy olyan elemet a $[0;1[$-ban amelyet az *f* bijekció egyik pozitív egész számhoz sem rendelt hozzá, ez pedig ellentmondás.

Indirekt módszerrel bebizonyítottuk a következő tételt:

Tétel $\mathbb{Z}^+ \not\rightleftarrows [0;1[$.

Az alkalmazott bizonyítási módot Cantor-féle átlós módszernek hívjuk.

Vegyük észre, hogy a tétel érdekessége az, hogy két végtelen halmaz között nem mindig lehet megadni bijekciót.

Legyen tetszőleges halmaz *A*! Rendeljünk hozzá egy **számosságot**! $A \mapsto |A|$. Teljesüljön a következő feltétel: $|A| = |B| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A \rightleftarrows B$! (Két halmaz számossága akkor és csak akkor egyenlő, ha létezik közöttük bijekció.)

1.11. ábra Georg Cantor (1845–1918)

1.12. ábra A „három” kialakulása

Legyen

$$|\{\}| = 0,$$
$$|\{0\}| = 1,$$
$$|\{0;1\}| = 2,$$
$$|\{0;1;2\}| = 3,$$
$$\vdots$$
$$|\{0;1;2;\ldots;n\}| = n+1,$$
$$\vdots$$

Valószínűleg ez játszódhatott le az emberiség történetének kezdetén, amikor az ember környezetében megjelentek véges halmazok, és absztrakció során közülük az egyenlő számosságú halmazokhoz ugyanazt a természetes számot rendelte.

Nyilvánvaló, hogy bármely $n \in \mathbb{Z}^+$ esetében $\{0;1;2;\ldots;n\} \not\sim \mathbb{Z}^+$, így a $\mathbb{Z}^+$ számossága nem természetes szám.

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י	כּ	ל
alef	*bet*	*gimel*	*dalet*	*hé*	*vau*	*zajim*	*chet*	*tet*	*jod*	*kaf*	*lamed*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30
ם	נ	ס	ע	פ	צ	ק	ר	שׁ	ת		
mem	*nun*	*szank*	*ajim*	*pe*	*cade*	*gof*	*res*	*szim*	*tav*		
40	50	60	70	80	90	100	200	300	400		

1.13. ábra A héber ábécé: a betűk számokat is jelölnek

Legyen $|\mathbb{Z}^+| = \aleph_0$ („alef null”). (A héber ábécé első betűje az alef.) Az $\aleph_0$ neve: **megszámlálhatóan végtelen számosság**.

A korábbiak alapján **megszámlálhatóan végtelen halmazok**:

$$\mathbb{Z}^+,\ \mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{Q},\ \{0,2,4,\ldots,2k,\ldots\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Ha egy halmaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor **megszámlálható halmaz**.

Be lehet bizonyítani a következőt:

Tétel Ha A végtelen halmaz és B megszámlálható halmaz, akkor $|A \cup B| = |A|$.

E tétel következményei például a 3. példa a) és d) részei.

Láttuk, hogy $\mathbb{Z}^+ \not\sim [0;1[$, és azt is, hogy a $[0;1[$ végtelen halmaz, így a $[0;1[$ számossága nem természetes szám és nem $\aleph_0$.

Legyen $|[0;1[| = \aleph_1$. A neve **kontinuum számosság**.

A korábbiak alapján **kontinuum számosságú halmazok**:

$$]0;1[,\ [0;1[,\ [a;b[,\ \{\text{nyílt félegyenes pontjai}\},\ \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ \mathbb{R},\ \{\text{egy kör pontjai}\}.$$

Amint láttuk, minden halmazhoz hozzárendeltünk egy számosságot. Azt gondolhatnánk, hogy függvényt adtunk meg. A probléma a korábbi: az összes halmaz nem eleme egy halmaznak, így a számosság-„függvénynek” nem lenne értelmezési tartománya. Ezért inkább számosság**operáció**ról beszélünk.

Az emelt szintű érettségi tananyaga csak igen kis részét tartalmazza a számosságok elméletének. A számosságok között műveleteket (összeadás, szorzás és hatványozás) szoktak értelmezni. Rendezést is lehet értelmezni közöttük, és be lehet bizonyítani, hogy létezik minden számosságnál nagyobb számosság. Ezeknek az ismereteknek részletes tárgyalásával a felsőoktatásban fogunk majd találkozni.

1.14. ábra Az óceán – véges vagy végtelen?

Oldjuk meg!

1. Adjuk meg egy zárt félkör pontjai halmazának számosságát!
2. Adjuk meg a $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ halmaz számosságát!
3. Adjuk meg a $(0;0), (0;1), (1;1)$ és $(1;0)$ pontok által meghatározott nyitott egységnégyzet pontjainak számosságát!
4. Adjuk meg a legfeljebb ötödfokú, pozitív egész együtthatós polinomok számosságát!
5. Adjuk meg a sík pontjainak számosságát!

2. Matematikai logika

2.1. Ítéletkalkulus

Eddigi tanulmányaink során többször előfordult, hogy a való életben tapasztaltak elvonatkoztatásával matematikai modellt alkottunk, és e modell vizsgálata során jutottunk el egy komoly matematikai elmélethez (lásd Valószínűség-számítás).

Az emberi tevékenység megkönnyítése sok tudományág kialakulásának kiindulópontja volt. Miután az ember fizikai munkáját segítő eszközök már létrejöttek, fokozatosan került az érdeklődés középpontjába az emberi gondolkodás. Ahhoz, hogy ez matematikai módszerekkel vizsgálható legyen, szükség volt ezt leíró matematikai modellek megalkotására, melyek vizsgálata során jött létre a matematika egy új ága, a **matematikai logika**. A következőkben ennek legegyszerűbb ágába, az **ítéletkalkulus**ba pillantunk bele.

2.1. ábra Rodin: A gondolkodó

2.2. ábra Kék ég, zöld fű

Az emberi gondolkodás legegyszerűbb elemei az olyan kijelentő mondatok, melyekről egyértelműen eldönthetők, hogy igazak-e vagy hamisak. Például: Kék az ég. Zöld a fű.

Így az ítéletkalkulus alapfogalmai az **ítélet**, a **logikai értékek (i, h)**, és egy az ítéletek halmazán értelmezett **függvény**, amelynek képhalmaza a logikai értékek halmaza. (Ez a függvény minden ítélethez egyértelmű módon rendel egy logikai értéket.)

A korábban említett kijelentő mondatokat tagadószóval látjuk el vagy kötőszavakkal kapcsoljuk össze őket. Így jönnek létre a **logikai művelet**ek, amelyeket **igazságtáblázat**tal adunk meg. Az igazságtáblázat a benne szereplő ítéletekhez rendelt igazságértékek ismeretében adja meg a művelet eredményének igazságértékét.

- A „Nem kék az ég." mondat akkor és csak akkor igaz, ha a „Kék az ég." mondat hamis.

Definíció **Negáció** (tagadás: „nem *A*"):

A	$\neg A$
i	h
h	i

Könnyű végiggondolni, hogy egy ítélet tagadásának tagadása az eredeti ítélet. (Ezt szokták a **kettős tagadás** törvényének nevezni.)

- A „Kék az ég, és zöld a fű." mondat akkor és csak akkor igaz, ha a „Kék az ég." és a „Zöld a fű." mondatok mindegyike igaz.

- A „Kék az ég vagy zöld a fű." mondat akkor és csak akkor hamis, ha a „Kék az ég." és a „Zöld a fű." mondatok mindegyike hamis.

Definíció
Konjukció („*A* és *B*"):

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Definíció
Diszjunkció („*A* vagy *B*"):

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

- A „Ha kék az ég, akkor zöld a fű." mondat akkor és csak akkor hamis, ha a „Kék az ég." mondat igaz és a „Zöld a fű." mondat hamis.

- Az „Akkor és csak akkor kék az ég, ha zöld a fű." mondat akkor és csak akkor igaz, ha a „Kék az ég." és a „Zöld a fű." mondatok mindegyike hamis, vagy mindegyike igaz.

Definíció

Implikáció („ha A, akkor B”):

A	B	$A \rightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Definíció

Ekvivalencia („akkor és csak akkor A, ha B):

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

1. példa Készítsük el a következő összetett műveletek igazságtáblázatát!

a) $(\neg A) \vee B$ b) $(\neg A) \vee (\neg B)$ c) $\neg(A \vee B)$

d) $(\neg A) \wedge B$ e) $(\neg A) \wedge (\neg B)$ f) $\neg(A \wedge B)$

Megoldás:

a)

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
i	i	h	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	h	i	i

b)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
i	i	h	h	h
i	h	h	i	i
h	i	i	h	i
h	h	i	i	i

c)

A	B	$A \vee B$	$\neg (A \vee B)$
i	i	i	h
i	h	i	h
h	i	i	h
h	h	h	i

d)

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \wedge B$
i	i	h	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	h	i	h

e)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
i	i	h	h	h
i	h	h	i	h
h	i	i	h	h
h	h	i	i	i

f)

A	B	$A \wedge B$	$\neg (A \wedge B)$
i	i	i	h
i	h	h	i
h	i	h	i
h	h	h	i

MatEm_Book.indb 385 2012.07.05. 12:40:01

Ha figyelmesen tanulmányozzuk a b) és f), illetve c) és e) igazságtáblázatokat, akkor két fontos megfigyelést is tehetünk, amelyeket az ítéletkalkulus **De Morgan-azonosságai**nak hívnak.

2.3. ábra Augustus de Morgan

Tétel $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$,
$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Az implikáció igazságtáblázatával összevetve az a)-t, azt is leolvashatjuk, hogy tetszőleges A, illetve B ítéletekre érvényes:

Tétel $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$.

2. példa Tekintsük a következő ítéleteket:
A = n osztható 5-tel. B = n osztható 3-mal. C = n osztható 15-tel.
Fogalmazzuk meg a következő kijelentéseket szavakkal:
a) $C \rightarrow A$, b) $C \leftrightarrow (A \wedge B)$, c) $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C$, d) $\neg C \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Megoldás:
a) Ha n osztható 15-tel, akkor osztható 5-tel.
b) Az n pontosan akkor osztható 15-tel, ha osztható 5-tel és 3-mal is.
c) Ha n osztható 5-tel és nem osztható 3-mal, akkor nem osztható 15-tel.
d) Ha n nem osztható 15-tel, akkor nem osztható 5-tel vagy nem osztható 3-mal.

3. példa Tekintsük a következő ítéleteket:
A = Esik az eső. B = Rossz a kedvem.
Írjuk fel a $\neg$, $\wedge$, $\vee$ logikai műveletek segítségével a következő kijelentéseket:
a) Nem esik az eső.
b) Esik az eső és rossz a kedvem.
c) Nem esik az eső, mégis rossz a kedvem.
d) Nem rossz a kedvem és nem esik az eső.
e) Esik az eső, mégsem rossz a kedvem.
f) Esik az eső vagy rossz a kedvem.
g) Nem esik az eső vagy rossz a kedvem.

Megoldás:
a) $\neg A$, b) $A \wedge B$, c) $(\neg A) \wedge B$, d) $(\neg B) \wedge (\neg A)$, e) $A \wedge (\neg B)$, f) $A \vee B$, g) $(\neg A) \vee B$.

MatEm_Book.indb 386 2012.07.05. 12:40:12

2.2. Halmazműveletek és logikai műveletek kapcsolata

Ha felidézzük 9. osztályos tanulmányainkból a halmazok között értelmezett műveleteket, illetve e műveletek tulajdonságait (lásd a 9. osztályos tankönyvben), akkor számos hasonlóságot fedezhetünk fel az ítéletkalkulusban látott logikai műveletekkel. Ezek közül a fontosabbak a következők:

komplementerképzés ⇔ negáció

metszetképzés ⇔ konjunkció

unióképzés ⇔ diszjunkció

De Morgan-azonosságok

Az ítéletkalkulus a matematikai logika egyik ága. Ez a matematikai tudományág foglalkozik például a matematikában alkalmazható bizonyítási módszerekkel, a matematikai tételekben szereplő szükséges és elégséges feltételekkel, és a „létezik” és a „bármely” **kvantor**okat tartalmazó állításokkal is. Ezekkel a témákkal a korábbi matematikatanulmányaink során már találkoztunk.

Oldjuk meg!

1. A konjunkció és a diszjunkció művelete közül melyik kommutatív, melyik asszociatív, és melyik melyikre nézve disztributív?

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges *A*, illetve *B* ítéletekre: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

3. A 3. példában szereplő állítások tagadását (negációját) írjuk fel logikai műveletek segítségével a lehető legegyszerűbben, majd fogalmazzuk meg a kapottakat szavakkal!

4. Könyvünk utolsó feladatának szerzője Lewis Carroll (1832–1898) angol író, matematikus, az Alice Csodaországban című világhírű meseregény írója.
Tekintsük az alábbi kijelentéseket:
1. Aki nem kötéltáncos és zsemlét sem eszik, az öreg.
2. A szédülős malacokkal tisztelettel bánnak.
3. Okos léghajós esernyőt visz magával.
4. Nem ebédelhet nyilvános helyen, aki nevetségesen néz ki és zsemlét eszik.
5. A fiatal léghajósok szédülősek.
6. Aki nevetségesen néz ki és kövér, az ebédelhet nyilvános helyen, ha nem kötéltáncos.
7. Aki okos, az nem megy kötéltáncosnak, ha szédülős.
8. Egy malac esernyővel nevetségesen néz ki.
9. Mindenki kövér, akivel tisztelettel bánnak és nem kötéltáncos.

Következik-e mindebből, hogy okos, fiatal malac nem megy léghajósnak?

2.4. ábra Nevetséges: malac esernyővel

Eredmények

I. Hatvány, gyök, logaritmus

1. A racionális kitevős hatvány

1. 58.
2. 531 433.
3. $\frac{1}{11}$.
4. Az első szám a nagyobb.
5. $a^{\frac{28}{15}}$.
6. $a^{-\frac{1}{12}}$.

3. A logaritmus

1. $-\frac{1}{12}$.
2. 0.
3. A két szám egyenlő.
4. 256.
5. $9^{\frac{432}{5}}$.
6. −2.
7. 47,25.

4. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

1. a) $x=1$. b) $x=\frac{1}{2}$.
   c) $x=4$. d) $x=4$.
   e) $x=-16$. f) $x=9$.
2. a) $x_1=0 \Rightarrow y_1=1,\ x_2=-2 \Rightarrow y_2=-1,$
   $x_3=1 \Rightarrow y_3=2,\ x_4=-3 \Rightarrow y_4=-2.$
   b) $x_1=-3 \Rightarrow y_1=9,\ x_2=-4 \Rightarrow y_2=10,$
   $x_3=5 \Rightarrow y_3=1.$
3. a) $-4<x<-1$.
   b) $3<x<\frac{7}{2}$.

II. Vektorok és trigonometria

1. Vektorok

1. $\vec{0}$.
2. $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$.
3. $-\vec{a}$.
5. $\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$.

2. A vektorok koordinátái

1. a) $\overrightarrow{AB}(-2;2)$. b) $\overrightarrow{BD}(2;-4)$.
   c) $\overrightarrow{AC}(-2;0)$. d) $\overrightarrow{BC}(0;-2)$.
2. a) $\overrightarrow{SC}(-1;-1)$. b) $\overrightarrow{BA}(1;-1)$.
   c) $\overrightarrow{AC}(-2;-1)$. d) $\overrightarrow{BC}(-1;-2)$.

3. Szinusz és koszinusz

1. a) $\overrightarrow{e_{60^\circ}}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. b) $\overrightarrow{e_{-\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   c) $\overrightarrow{e_{135^\circ}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. d) $\overrightarrow{e_{180^\circ}}(-1;0)$.
   e) $\overrightarrow{e_{\frac{7\pi}{3}}}=\overrightarrow{e_{\frac{\pi}{3}}}=\overrightarrow{e_{60^\circ}}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   f) $\overrightarrow{e_{-\frac{5\pi}{6}}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$.
2. a) $\sin 1954^\circ \approx 0,4384,\ \cos 1954^\circ \approx -0,8988.$
   b) $\sin\frac{\pi}{17} \approx 0,1837,\quad \cos\frac{\pi}{17} \approx 0,9830.$

c) $\sin(-10°12') \approx -0{,}1771$,

$\cos(-10°12') \approx 0{,}9842$.

d) $\sin 1222{,}22° \approx 0{,}6126$,

$\cos 1222{,}22° \approx -0{,}7904$.

e) $\sin\left(-\frac{7\pi}{11}\right) \approx -0{,}9096$,

$\cos\left(-\frac{7\pi}{11}\right) \approx -0{,}4154$.

3. A k tetszőleges egész szám.
   a) $-0{,}1674 + 2k\pi$, $3{,}3090 + 2k\pi$.
   b) Nincs ilyen valós szám.
   c) $0{,}4478 + 2k\pi$, $2{,}6938 + 2k\pi$.
   d) $0{,}1967 + 2k\pi$, $2{,}9449 + 2k\pi$.
   e) $-0{,}1498 + 2k\pi$, $3{,}2914 + 2k\pi$.
4. a) $\pm 1{,}7382 + 2k\pi$.
   b) Nincs ilyen valós szám.
   c) $\pm 1{,}1230 + 2k\pi$. d) $\pm 1{,}3741 + 2k\pi$.
   e) $\pm 1{,}7206 + 2k\pi$.

4. Tangens és kotangens

1. a) $\mathrm{tg}\,1954° \approx -0{,}4877$,
   $\mathrm{ctg}\,1954° \approx -2{,}0503$.
   b) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{17} \approx 0{,}1869$, $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{17} \approx 5{,}3495$.
   c) $\mathrm{tg}(-10°12') \approx -0{,}1799$,
   $\mathrm{ctg}(-10°12') \approx -5{,}5578$.
   d) $\mathrm{tg}\,1222{,}22° \approx -0{,}7751$,
   $\mathrm{ctg}\,1222{,}22° \approx -1{,}2901$.
   e) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{11}\right) \approx 2{,}1897$,
   $\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{11}\right) \approx 0{,}4567$.
2. a) $-0{,}1651 + k\pi$.
   b) $0{,}8411 + k\pi$.
   c) $0{,}4086 + k\pi$.
   d) $1{,}5703 + k\pi$.
   e) $-01481 + k\pi$.
3. a) $-1{,}4056 + k\pi$. b) $0{,}7297 + k\pi$.
   c) $1{,}1622 + k\pi$. d) $0{,}0005 + k\pi$.
   e) $-1{,}4227 + k\pi$.

4. $\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$.
5. $\left]-\infty; -2\sqrt{6}\right] \cup \left[2\sqrt{6}; \infty\right[$.
6. $\left]0; \frac{1}{4}\right]$.

5. A szinusztétel

1. Nincs ilyen háromszög.
2. $\gamma = 75°$, $a = 26{,}6$ egység, $b = 18{,}3$ e.,
   $c = 28{,}1$ e.
3. $\alpha = 50{,}1°$, $\gamma = 71{,}0°$, $a = 8{,}1$ e., $b = 9{,}1$ e.
4. $\left]0, \frac{ab}{2}\right]$.
5. $\alpha = 50{,}4°$, $\gamma = 70{,}6°$, $a = 8{,}2$ e., $b = 9{,}1$ e.
6. $\alpha = 52{,}5°$, $\beta = 127{,}5°$, $a = 3{,}1$ e., $b = 76{,}2$ e.
7. $\alpha = 50{,}9°$, $\beta = 129{,}1°$, $a = 18{,}3$ e.
8. $a = 1{,}8$ e., $b = 7{,}8$ e., $t = 14{,}0$ terület-egység.

6. A vektorok skaláris szorzata

1. $90°$.
2. A tetraéder lapjai egybevágó háromszögek.
3. $(3{,}9; 9{,}2)$, $(7{,}8; 6{,}3)$.
4. $(8; -6)$, $(-8; 6)$.
5. $\left\{-\frac{20}{3}\right\}$.
6. $10{,}0°$.
8. $a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7. A koszinusztétel

1. $\alpha_1 \approx 36{,}9°$, $\alpha_2 \approx 19{,}4°$, $\beta_1 = 90°$,
   $\beta_2 \approx 33{,}7°$, $\gamma_1 \approx 53{,}1°$, $\gamma_2 \approx 126{,}9°$,
   $c_1 = 4$ egység, $c_2 = 2\sqrt{13}$ e.
2. 4,0 e.
3. $14{,}3°$.
4. 1,4 e.
5. $a = \frac{2\sqrt{139}}{3}$ e., $b = \frac{2\sqrt{91}}{3}$ e., $c = \frac{\sqrt{76}}{3}$ e.,
   $\alpha \approx 110{,}41°$, $\beta \approx 49{,}32°$, $\gamma \approx 20{,}27°$.

6. 0,10 h és 0,51 h.
7. 61°, 45°, 74°.
8. 114,5 m.

8. Addíciós tételek

1. $c \approx 3{,}3$ egység, $\alpha \approx 35{,}3°$, $\beta \approx 105{,}8°$, $\gamma \approx 38{,}9°$.
2. $\frac{25}{4}$.
3. Megszerkeszthető.
4. Az egyenlő szárú háromszögé.
5. Nincs ilyen háromszög.
6. $\left[-2\sqrt{1964554}; 2\sqrt{1964554}\right]$.
7. $\frac{1}{8}$.
8. $\frac{1}{3}$.

9. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

1. a) $x_1 = k\frac{2\pi}{7}$, $x_2 = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   b) $x_1 \approx 1{,}93 + 2k\pi$, $x_2 \approx -1{,}93 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   c) $x_1 = k\pi$, $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   d) $x_1 = k\pi$, $x_2 \approx -1{,}1 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   e) $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. a) $\frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} < x < \frac{31\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   b) $45° + k \cdot 90° \le x \le 75° + k \cdot 90°$, $k \in \mathbb{Z}$.
   c) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(1; 2k\pi)$, $(-1; (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

III. Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek

1. Nevezetes közepek és egyenlőtlenségek

2. $A_{max} = 14{,}5\ \text{dm}^2$, az élek hossza: 2,5 dm, 2 dm és 0,5 dm.
4. $A_{min} = 3\sqrt[3]{2}\pi\ \text{dm}^2$. Az alapkör átmérője megegyezik a henger magasságával (egyenlő oldalú henger).

IV. Koordináta-geometria

1. Mi a koordináta-geometria?

1. $\vec{0}$.
2. $\frac{3}{4}$.
3. $\left(2; \frac{1}{3}\right)$.
4. $\left(2; \frac{1}{3}\right)$.
5. Paralelogrammát.
6. $\overrightarrow{RS}\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right)$, $\overrightarrow{EA}\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$.

2. A sík egyeneseinek koordináta-geometriai jellemzése

1. a) $M\left(\frac{47}{17}; \frac{32}{17}\right)$. b) $O\left(\frac{55}{34}; -\frac{15}{34}\right)$. c) 0.
2. Harmadolja.
3. Kb. 4,65 egység.
4. $O\left(\frac{55}{34}; -\frac{15}{34}\right)$.
5. a) Elválasztja.
   b) $B(3{,}4; 2{,}8)$, $C(8{,}6; -2{,}8)$.
6. $\frac{43}{5}$.

3. A kör koordináta-geometriai jellemzése

1. a) $\left(x-\frac{149}{68}\right)^2+\left(y-\frac{49}{68}\right)^2=\frac{12505}{2312}$.

b) $P(3,6;-1,2)$.

2. Hatványvonal: $7x-6y=44$.

3. a) Nem kör.

b) $(3;2)$, $\sqrt{13}$.

c) $(3;5)$, $2\sqrt{497}$.

d) Nem kör.

4. a) $x+2y=22{,}18$, $x+2y=-0{,}18$.

b) $2x-y=-9{,}18$, $2x-y=13{,}18$.

5. Kör, a középpont: $\left(-\frac{129}{16};-\frac{7}{16}\right)$,

a sugár: $\sqrt{\frac{9255}{128}}$.

6. a) $(2,7;9,0)$ és $(1,6;-0,8)$.

b) $(6;8)$ és $(7;7)$.

7. Nincs ilyen pont.

4. A parabola koordináta-geometriai jellemzése

1. $x=\frac{17}{10}y^2-\frac{39}{10}y-\frac{43}{5}$.

2. a) $1,24x+2y=-7,71$ és $-3,24x+2y=5,71$.

b) $(-3;-2)$. c) $90°$.

3. a) $3x-2y=-\frac{11}{2}$. b) $2x+3y=-\frac{37}{3}$.

6. $y=-\frac{1}{4}x^2+5$, $\left(-2+2\sqrt{2};2+2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2-2\sqrt{2};2-2\sqrt{2}\right)$.

V. Kombinatorika és gráfok

1. A skatulyaelv

1. 34.
2. 25.
5. Igen.

3. A véges halmazok részhalmazai

3. 66.
4. 190.
5. 126.
6. 16.
7. 20.

4. A binomiális tétel és a Pascal-háromszög

4. 52 500 000.

5. A gráf fogalma, fokszámtétel, teljes gráf, körmérkőzések

4. a) Nincs. b) Van. c) Van. d) Nincs.
5. a) 12. b) 66.
6. 18.
7. 4-szer.

6. Összefüggő gráf, út, kör, részgráf, fa

7. Igen.

VI. Valószínűség-számítás és statisztika

2. Valószínűség-számítás

1. $1-\frac{\binom{86}{5}}{\binom{90}{5}}\approx 0,21$.

2. a) $\frac{1}{3^{14}}$. b) $\frac{2}{3^{14}}$. c) $\frac{26}{3^{13}}$.

3. $\frac{11}{30}$.

4. a) $\frac{253}{899}$. b) $\frac{1319}{3596}$. c) $\frac{351}{3596}$.
d) $\frac{757}{7192}$. e) $\frac{639}{28\,768}$.

5. $\frac{863}{46\,656}$.

6. $\frac{219}{280}$.

7. 5.

8. a) $\frac{1}{6}$. b) $\frac{25}{216}$. c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$.

3. A geometriai valószínűségi mező

1. 0.

2. $\frac{11}{36}$.

3. $\frac{13}{18}$.

4. $\frac{4\pi}{375}$.

5. $\frac{1}{2}$.

6. $\frac{7}{12}$.

7. $\frac{31}{170\,000}$.

8. a) $\frac{1}{4}$. b) 0. c) $\frac{3}{4}$.

4. A feltételes valószínűség

1. a) $\frac{35}{816}$. b) $\frac{35}{972}$.

2. $\frac{63\pi^3}{200\,000}$.

3. a) $\frac{3}{10}$. b) $\frac{1}{3}$.

4. a) $\frac{13}{42}$. b) $\frac{11}{34}$.

5. a) $\frac{2}{25}$.
b) Lehel: $\frac{135}{322}$, Norbert: $\frac{95}{322}$, Róbert: $\frac{2}{7}$.

6. a) $\frac{26\,896\,177}{27\,000\,000}$. b) $\frac{16\,194\,277}{27\,000\,000}$.

7. $\frac{78}{253}$.

8. a) $\frac{1}{3}$. b) $\frac{1}{3}$.

5. Az események függetlensége

1. a) Kb. 0,50001. b) Kb. 0,49999.

2. 11.

3. 0.

4. $p_k=\binom{5}{k}\left(\frac{11}{36}\right)^k\left(1-\frac{11}{36}\right)^{5-k}$, ahol
$k\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

5. $\frac{1}{324}$.

6. Nem igaz.

7. $p_k=\binom{5}{k}\left(\frac{9}{625}\right)^k\left(1-\frac{9}{625}\right)^{5-k}$, ahol
$k\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

8. $p_k=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-k}$, ahol
$k\in\{0;1;2;3;4\}$.

9. $\frac{1}{2^n}$.

6. Valószínűségi változók, várható érték

1. $\frac{35}{18}$.

2. $\frac{5}{18}$.

3. $\frac{3}{2}$.

4. $\frac{3}{2}$.

5. 2.

6. $\frac{107\,470}{66\,273}$.

7. $\frac{13\,768}{99}$.

8. 4.

7. A valószínűségi változók szórása

1. $\frac{\sqrt{665}}{18}$.
2. $\frac{85\sqrt{89}}{1602}$.
3. $\frac{3\sqrt{403}}{62}$.
4. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
5. 1.
6. 1,76.
7. $\frac{2\sqrt{6839}}{9}$.
8. 2.

8. Speciális valószínűségi változók

1. $M \approx 265{,}0$, $D \approx 10{,}9$.
2. $M \approx 148{,}1$, $D \approx 11{,}4$.
3. $M \approx 5{,}1$, $D \approx 2{,}2$.
4. $M \approx 620{,}9$, $D \approx 17{,}6$.
5. a) 215,3. b) 4,2. c) $[203; 228]$. d) 270.
6. 6,7.
7. 652.
8. $[264; 367]$.

VII. Térgeometria

1. Bevezetés

1. 20-at.
2. a) 45°. b) 60°. c) 60°.
4. 36,87°.
7. Igen.

2. Alkalmazások: mértani helyek, a tetraéder néhány nevezetes pontja

3. A szakasz felezési pontja köré írt, a szakasz hosszának felével egyenlő sugarú gömbfelület pontjainak halmaza, a szakasz végpontjainak kivételével. A gömb neve: Thálesz-gömb.

3. A mértani testek

4. 24 cm.
5. 70,53°.
6. 8 cm.
7. 60°, 40,9°.
8. a) $5\sqrt{3}$ cm. b) $5\sqrt{5}$ cm.
   c) $104{,}48°$.
9. Nem.
12. Ha *n* páros: $n \geq 6$. Ha páratlan: $n \geq 9$.

4. Néhány további test

1. a) 60°. b) 38,94°.
2. Kb. 12,93 cm.
3. 11 cm.

5. A terület és felszín kiszámítása

4. $T \approx 456\ \text{cm}^2$.
5. a) 2 cm.
   b) $T = 20\ \text{cm}^2$.
6. 31,25%-a.

6. Egyéb síkidomok területe

2. 24 egység.
3. A színezett területek összege nagyobb a színezetlen területek összegénél.

7. A poliéderek felszíne

1. $A = 1035\ \text{cm}^2$.
2. Kocka esetén lesz a testátló a legkisebb.
3. $A \approx 260\ \text{cm}^2$.
4. $A \approx 1385{,}1\ \text{cm}^2$.
5. $A \approx 473{,}2\ \text{cm}^2$.

8. Néhány egyéb test felszíne

1. Kb. 9,73 cm.
2. $A \approx 204{,}2\ \text{cm}^2$, 45,24°.
3. a) $A \approx 141{,}37\ \text{cm}^2$, 28,96°.

b) $A \approx 339{,}29\ \text{cm}^2,\ 60°.$

c) $A \approx 201{,}06\ \text{cm}^2,\ 38{,}94°.$

4. $A \approx 603{,}19\ \text{cm}^2.$

5. $\frac{49\pi}{72}$-szöröse.

6. 3-szorosa.

7. a) $A = \frac{3720\pi}{29}\ \text{cm}^2.$

b) $A = 168\pi\ \text{cm}^2.$

8. A kockáé.

9. A testek térfogatának kiszámítása

1. $V = 49392\ \text{cm}^3.$
2. $V \approx 4536\ \text{cm}^3.$
3. Kb. 64,14 cm.
4. Kb. $9{,}33\ \text{m}^3.$
5. $A \approx 202{,}6\ \text{cm}^2.$
6. A maximális térfogatú téglatest kocka. $V_{\max} = 3000\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$

10. Néhány egyéb test térfogata

1. a) $A = 96\ \text{cm}^2.$
   b) $V = 48\ \text{cm}^3.$
2. Kb. $3{,}86\ \text{m}^2.$
3. a) 7 141 500 tonna.
   b) 3571.
   c) 86 945 m^2.
4. a) $V = 1944\ \text{cm}^3.$ b) $A = 648\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$
5. a) $V = 208\ \text{cm}^3.$ b) $A = 256\ \text{cm}^2.$

11. További testek térfogata

1. a) Kb. 0,134 cm. b) Kb. 4,67-szeresére.
2. a) 7 cm. b) $A = 224\pi\ \text{cm}^2.$
3. a) 5 km. b) $V \approx 50{,}27\ \text{km}^3.$
   c) $P \approx 62{,}83\ \text{km}^2.$
4. b) $V \approx 66\ \text{m}^3.$ c) $P \approx 67{,}5\ \text{m}^2.$
5. a) $\frac{25}{29}.$
   b) $V_1 \approx 520\ \text{cm}^3$ és $V_2 \approx 603{,}19\ \text{cm}^3.$
6. Belefér.
7. A $\frac{2}{\sqrt{3}}$ dm magasságú körhengeré és
   $V_{\max} = \pi\frac{2}{3\sqrt{3}}\ \text{dm}^3.$

12. Egymásba írt testek

1. a) 45,24°. b) $V = 100\pi\ \text{cm}^3.$
   c) $P = 65\pi\ \text{cm}^2.$
2. a) $A = 360\ \text{cm}^2.$ b) $V = 400\ \text{cm}^3.$
   c) Kb. 3,33 cm.
3. a) $V = 200\ \text{cm}^3.$ b) Kb. 2,64 cm.
   c) Kb. 7,04 cm.
4. a) Kb. 3,33 cm. b) Kb. 7,04 cm.
5. a) Kocka. b) Kocka.

VIII. Analízis

1. Analízis

4. Nem.
5. $\sup A = 3,\ \inf A = \frac{5}{2}.$
6. $\inf B = 0,\ \sup B = 1.$

2. A számsorozatok

1. $a_n < \frac{3}{2},\ \sup a_n = \frac{3}{2}.$
2. $a_n = \frac{5^n - 1}{4}.$
3. a) A sorozat felülről nem korlátos.
   b) A sorozat korlátos.
4. Nem.
6. Igen.

3. A monoton sorozatok

1. a) A sorozat szigorúan monoton csökkenő.
   b) A sorozat szigorúan monoton csökkenő.

2. a) A sorozat monoton csökkenő.

b) Ha $q=0$, akkor a sorozat egyszerre monoton növekvő, illetve monoton csökkenő. Ha $q>1$, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő, ha pedig $0<q<1$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ha $q<0$, akkor se nem növekvő, se nem csökkenő.

4. A számsorozatok határértéke

1. Nem igaz, pl. $a_n=(-2)^n$.
2. Legyen pl. az (a_n) sorozat a következő:

$$a_{3k+3}=a+\frac{1}{3k+3},\ a_{3k+1}=b+\frac{1}{3k+1},\ a_{3k+2}=$$
$$=c+\frac{1}{3k+2},\text{ ahol } k=0,1,2,\ldots\,.$$

3. Nem igaz, pl. $a_n=\frac{1}{n}$.
4. a) $\frac{2}{3}$.

b) 0.

c) Nem korlátos, így nem konvergens.

d) 2.

e) −1.

5. A határérték kiszámítása

1. a) $\frac{1}{3}$.

b) A sorozat a ∞-be divergál.

c) 0.

d) $\frac{1}{5}$.

e) 1.

f) Tudjuk, hogy q^n pontosan akkor korlátos, ha $|q|\le 1$, így csak ekkor lehet konvergens. Ha $q=1$, akkor a határérték 1. Ha $q=-1$, akkor a sorozat divergens. Végül $|q|<1$ esetén a sorozat határértéke 0.

2. a) e.

b) $\frac{1}{e}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{A}$.

6. Nevezetes sorozatok

1. 1.
3. Nem.
5. $a_n=2^n+3\cdot(-1)^n$.

7. Kamatszámítás, járadékszámítás

1. 1,312-szerese.
2. Kb. 2 050 000 Ft.
3. 480 000 Ft.

8. Néhány szó a végtelen sorokról

2. a) $\frac{20}{7}$.

b) $\frac{3}{10}$.

9. Függvények (valós függvények)

1. a) $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

b) $g^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ g^{-1}(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

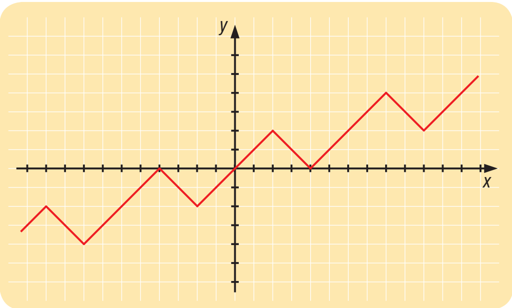
2. Pl.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ és

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2x+1$ esetén

$(g\circ f)(x)=2x^2+1$ és

$(f\circ g)(x)=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$.

3. $D_h=[-1;1]$. $R_h=[0;1]$.
4. $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ és $x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.
5. Egy megfelelő függvény grafikonjának részlete látható az ábrán:



Függelék 1. ábra A függvény grafikonrészlete

10. A valós függvények nevezetes tulajdonságai

1. Például: $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg} x$.
3. A függvény alulról nem korlátos. A függvény felülről korlátos és $\sup f(x) = 1$.
4. $x_{\max} = 1$, $f_{\max} = 1$,
   $x_{\min} = -1$, $f_{\min} = -1$.
5. A négyzeté.
6. $x_{\max} = 1$, $f_{\max} = 4$, $x_{\min} = -3$ vagy $x_{\min} = 5$, $f_{\min} = 2\sqrt{2}$.
7. $x_{\max} = \frac{2}{3}$, $f_{\max} = \frac{8}{27}$.
8. a) A függvény szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en, sem alulról, sem pedig felülről nem korlátos.
   b) A függvény alulról korlátos, $-\frac{1}{4}$ a legnagyobb alsó korlátja. A függvény felülről nem korlátos. $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $\left[\frac{3}{2}; \infty\right[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.
   c) A függvény az adott értelmezési tartományon alulról és felülről is korlátos, tehát korlátos, továbbá szigorúan monoton növekvő.
   d) A függvény korlátos. A $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, az $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

11. A függvények folytonossága

1. A függvény mindenütt folytonos.
2. Ha $x_0 \neq 0$, akkor a függvény folytonos, a 0-ban pedig nem folytonos.
3. Egész helyeken a törtrész-függvény nem folytonos, minden más helyen folytonos.

14. A trigonometrikus függvények

2. Pl: $f(x) = 2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

15. A függvények határértéke

1. a) $x \neq a$ esetén $3a^2$.
   b) $x \geq 0$, $x \neq 1$ esetén $\frac{1}{2}$.
   c) $x \neq 1$, $x \neq 3$ esetén $\frac{1}{2}$.
   d) $x \neq 1$ esetén $\frac{1}{2}$.
   e) $x \neq \pm 1$ esetén $\frac{1}{2}$.
   f) $x \neq 1$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén 1.
2. a) $\frac{2}{5}$.
   b) A függvény a ∞-be divergál.
   c) $\frac{3}{4}$.
   d) 0.

16. A differenciálszámítás

1. $-\frac{1}{\sin^2 x}$.
3. a) $10x^4 - 3x^2$.
   b) $2x - 2\cos 2x$.
   c) $\frac{-2x^2 - 2x + 6}{\left(x^2 + 3\right)^2}$.
   d) $\cos\left(x^2 + x\right) \cdot (2x + 1)$.
4. $P(2;4)$.
   Az f grafikonjának a P ponthoz tartozó érintőjének az egyenlete: $y = 8x - 12$.
   A g grafikonjának a P ponthoz tartozó érintőjének az egyenlete: $y = 2x$.

17. A differenciálszámítás alkalmazásai

3. $f'(x) = -3x^2 + 2x + 3$,
   $f''(x) = -6x + 2$.

x	-1	$\left]-1, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right[$	$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$	$\left]\frac{1-\sqrt{10}}{3}, \frac{1}{3}\right[$	$\frac{1}{3}$	$\left]\frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right[$	$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$	$\left]\frac{1+\sqrt{10}}{3}, 2\right[$	2
$f'(x)$	–	–	0	+	+	+	0	–	–
$f''(x)$	+	+	+	+	0	–	–	–	–
$f(x)$	↘		helyi min.	↗			helyi max.	↘	
	konvex				inf. pont	konkáv			

4. $f'(x) = -4x^3 + 4 = -4(x^3 - 1)$,
$f''(x) = -12x^2$.

x	-1	$]-1,0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,2[$	2
$f'(x)$	+	+	+	+	0	–	–
$f''(x)$	–	–	0	–	–	–	–
$f(x)$	–3	↗			max.: 5	↘	min.: –6
	konkáv						

18. Integrálszámítás: a határozatlan integrál

1. a) $\frac{x^6}{3} - \frac{1}{3}\sin 3x + c.$
   b) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c.$
   c) $\operatorname{tg} x + c.$
   d) $\frac{1}{6033}(3x-2)^{2011} + c.$
   e) $-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + c.$
2. Nincsen.

19. Integrálszámítás: a határozott integrál

1. a) 0.
   b) $\frac{1}{4}.$
   c) 4.
2. a) 1. b) $-1.$
   c) 0. d) $\frac{8}{3}.$
3. 2.

20. A határozott integrál és a műveletek

1. a) $\frac{38}{3} + \cos 3 - \cos 1.$ b) $\frac{31}{6}.$
   c) Nem létezik. d) $-\frac{63}{2}.$
   e) $\frac{11}{8}.$ f) Nem létezik.
2. $\frac{1}{2} + \left(\frac{9}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right).$

21. A határozott integrál alkalmazásai

1. $21\frac{1}{3}$ területegység.
2. Kb. $1{,}33$ területegység.
3. Kb. $258{,}37$ térfogategység.

IX. Halmazok és logika

1. Halmazok számossága

1. $\aleph_1.$
2. $\aleph_0.$
3. $\aleph_1.$
4. $\aleph_0.$
5. $\aleph_1.$

MatEm_Book.indb 397 2012.07.05. 12:41:59

Szakkifejezések listája

- Kiadja: Maxim Könyvkiadó Kft., 6728 Szeged, Kollégiumi út 11/H
- E-mail: info@maxim.co.hu
- Telefon: (62) 548 444
- Fax: (62) 548 443
- Felelős kiadó: Puskás Norbert
- Nyomda: Generál Nyomda Kft., felelős vezető: Hunya Ágnes