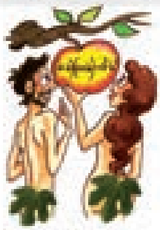
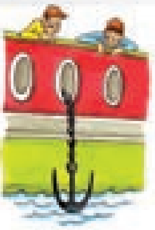
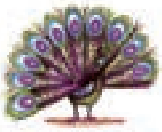
Matematika 9

Matematika

Matematika 9

Halmazok

Algebra, számelmélet

Függvények

Geometria

Egyenletek, egyenlőtlenségek

Statisztika

Út a tudáshoz

Matematika 9

A könyvet írta:
Ábrahám Gábor középiskolai tanár
Dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet középiskolai tanár
Tóth Julianna középiskolai tanár

Lektorálta:
Tarcsay Tamás középiskolai tanár
Ványa István középiskolai tanár

OH által kirendelt szakértő:
Kónya István
Marosváry Erika

Illusztrációk:
Falcione Sarolta

Borítóterv és layout:
Daróczi Sándor

Tördelés:
Szűcs József

Korrektúra:
Nagy Sára
Nemcsók Adrienn

Felelős szerkesztő:
Dr. Mező Tamás
Szabóné Mihály Hajnalka

Képek:
Nemzetközi képügynökségek

Ábrák:
Kelcz Roland

Második kiadás, változatlan utánnyomás, 2012

Kiadói kód: MX-226
Tankönyvi engedélyszám: KHF/208-9/2009 (2009. 02. 14. – 2014. 08. 31.)
Kerettanterv: 28/2000 (IX.21.) OM rend.
Tömeg: 573 g
Terjedelem: 332 oldal (29,67 ív)

ISBN 978 963 261 013 9

Matematika 9

Előszó

Miért tanuljuk? Miért szeressük (meg)?

Bizonyára minden kedves olvasónk találkozott már azzal az örömmel, amelyet egy rejtvény megoldása vagy egy összefüggés önálló felfedezése okozott. Könyvünket annak reményében írtuk, hogy ezt az élményt minél többen átélik a matematika tanulása közben is. Napjainkban a matematika már lassan nemcsak a természettudományok nyelve, hiszen a társadalomtudományok több ága is matematikai modellek segítségével dolgozik.

Egy-egy anyagrész kapcsán olykor fölvetődik a kérdés, miért kell ezt tanulni, hol fordul ez elő a mindennapokban. Első ránézésre a matematikának valóban csak néhány olyan fejezetével foglalkozunk, amelynek tanulságai közvetlenül is alkalmazhatók a hétköznapi életben. A mélyebben meghúzódó igazság viszont az, hogy minden matematikai probléma megoldása, az egyes fejezetek feldolgozása, befogadása a legváltozatosabb módokon fejleszti gondolkodásunkat. Észrevétlenül megtanulunk összefüggéseket keresni, távoli dolgokat összekapcsolni, hasonló szituációkat felismerni, gyakorlati problémákat elvontan megfogalmazni és kezelni. Ha pontosan meg tudunk fogalmazni egy kérdést, gyakran már a megoldás kulcsa is a kezünkben van. Ne sajnáljuk hát a befektetett munkát!

A könyv gyakran párhuzamosan tárgyalja a jelölések használatával leírt összefüggéseket és ugyanezen összefüggések szavakban való megfogalmazását, hogy segítsen hidat építeni a hétköznapi kommunikáció és a matematikai nyelvezet közé. Egy-egy leckén belül fokozatosan egymásra épülő, kidolgozott példákon keresztül jutunk el a gyakorlatban felvetett kérdésektől az elvont matematikai modellben való biztonságos tájékozódásig. A leckék végén egy-két emelt szintű feladaton kívül csak olyan feladattípusokat gyakoroltatunk, amelyek a leckében kidolgozva megjelentek.

Kívánjuk, hogy a gondolkodás öröme érintse meg minden olvasónkat!

A Szerzők

Hogyan használjuk?

Jelmagyarázat

Tankönyvünk a kétszintű érettségi követelményrendszer alapján készült. A leckék felépítése, szerkezete egyszerű, jól áttekinthető. Igyekeztünk az új fogalmakat, tételeket, ismereteket minden esetben egy-egy matematikai, illetve hétköznapi életből vett problémán keresztül bevezetni, ezért a leckék többsége feladatokkal kezdődik.

1. példa A tananyagban szereplő kidolgozott **középszintű** példákat zöld háttérszínű keretbe foglaltuk. Ha a középszintű példának az egyik része emelt szintű, azt kék háttérrel jelöltük.

1. példa A tananyagban szereplő kidolgozott **emelt szintű** példákat zöld háttérszínű keretbe foglaltuk, amelyben a példát jelölő ikont és a példa sorszámát is kék színnel jelöltük.

Közvetlenül a kidolgozott példák alatt szerepel azok részletes megoldása, melynek során **félkövér kiemelésekkel** hívtuk fel a figyelmet az újonnan megjelenő **fogalmakra, megállapításokra, módszerekre.**

Definíció Az új **középszintű** fogalmakat Definíció címszó alatt sárga háttérszínű keretbe foglaltuk. Itt írtuk le a fogalmakkal kapcsolatban használt matematikai jelöléseket is. Ezeknek a pontos ismerete mindkét szintű érettségi esetén alapkövetelmény.

Definíció Az új **emelt szintű** fogalmakat Definíció címszó alatt sárga háttérszínű keretbe foglaltuk, amelyben a definíciót jelölő ikont és a Definíció szót kék színnel jelöltük.

Tétel A **középszintű** tételeket, azonosságokat, tulajdonságokat narancssárga háttérszínű keretben fogalmaztuk meg. A tételek ismerete mind közép-, mind emelt szintű érettségi esetén elengedhetetlenül fontos.

Tétel Az **emelt szintű** tételeket narancssárga háttérszínű keretben fogalmaztuk meg, amelyben a tételt jelölő ikont és a Tétel szót kék színnel jelöltük.

A tételek többsége után azok bizonyítása is megtalálható. Ezeknek az ismerete minden esetben emelt szintű követelmény. Minden emelt szintű anyagrészre, illetve az „Oldjuk meg!” emelt szintű feladataira is világoskék háttérrel hívjuk fel a figyelmet.

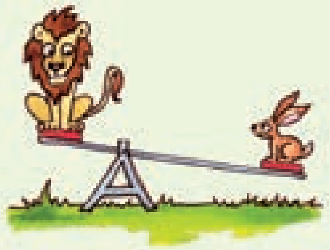
A matematikai műveltség fontos részét képezi a matematikatörténet ismerete, emellett ez a terület sok érdekességet is rejt magában. Ezért egy-egy anyagrészhez kapcsolódóan matematikatörténeti érdekességek jelennek meg krémszínű háttérrel.

Vegyük észre! Ezek a részek bizonyos fogalmak használatára hívják fel a figyelmet, miközben hasznos tanácsokat nyújtanak a feladatok megoldásához, az összefüggések megértéséhez. A fontos észrevételeket szürke háttérszínű keretben fogalmaztuk meg.

A matematikai ismeretek elmélyítésének leghatékonyabb módja az önálló problémamegoldás. Erre is nyílik lehetőség, hiszen minden lecke végén nagy mennyiségű feladatanyagot találhat az olvasó „Oldjuk meg!” címszó alatt. Egy részük megoldásához az internet használata sok segítséget nyújthat. A többségük viszont olyan, mely a számolási készséget, a kommunikációs, a tudásszerző és a gondolkodási képességet fejleszti. Ezek végeredménye megtalálható a kiadó www.olvas.hu honlapján.

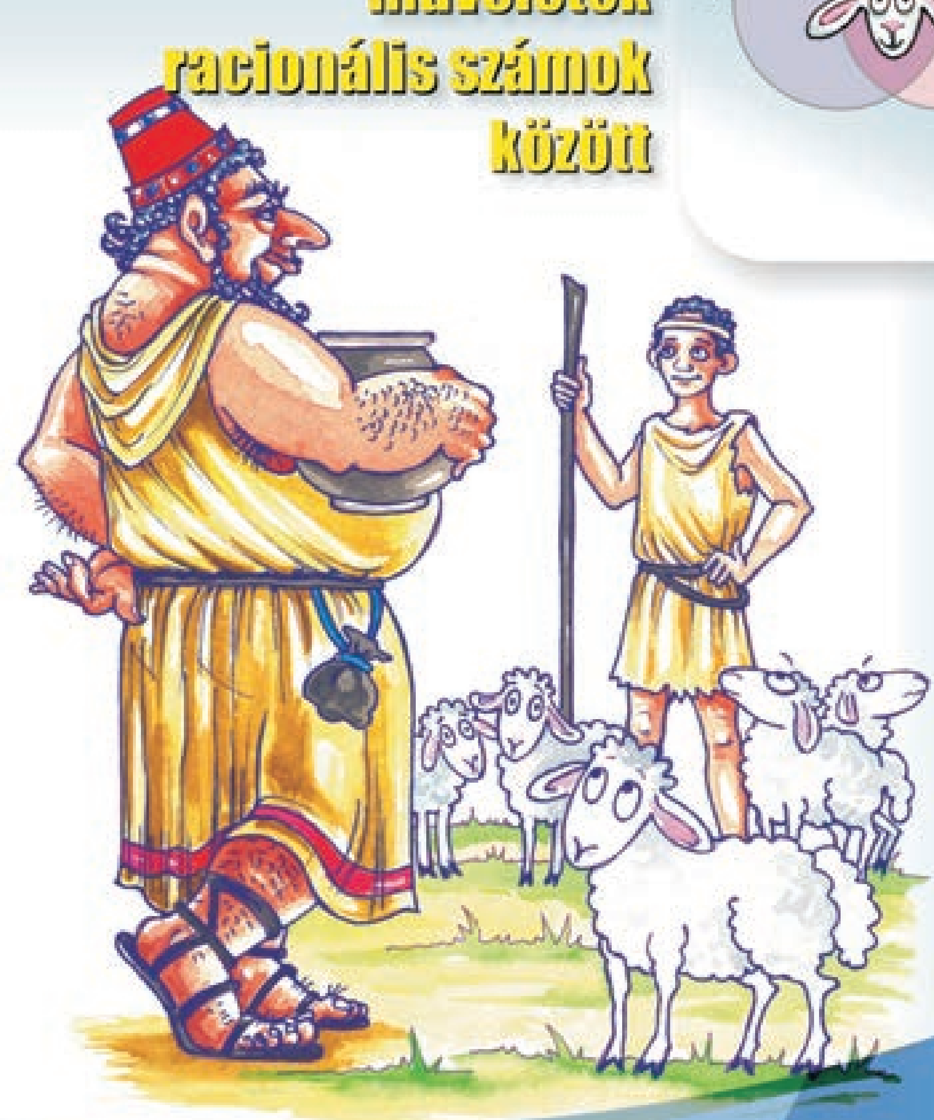
A tankönyvben szereplő szakkifejezések jegyzéke a könnyebb áttekinthetőség, kereshetőség kedvéért a kötet végén a Függelékben található meg, amelyben csillaggal* jelöltük az érettségi követelményrendszerben is szereplő tartalmakat, és *dőlt* betűvel az új szakkifejezéseket. Újnak tekintjük azokat a szakkifejezéseket, amelyek az általános iskolában a tanítási gyakorlatban nem fordulnak elő, vagy megjelennek ugyan, de a középiskolai matematikai oktatásban mélyebb értelmet nyernek.

Tartalomjegyzék



Tartalomjegyzék

I. fejezet
Halmazok, műveletek racionális számok között

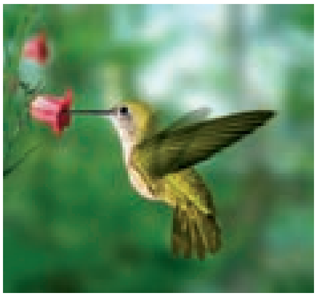


Hova is tartozunk?

1. A halmazokkal kapcsolatos fogalmak, jelölések

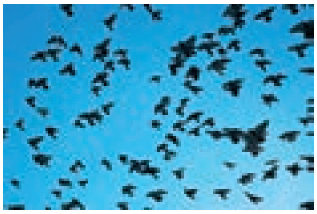
1.1. ábra Csillagok sokasága

1.2. ábra Autók tömege



1.3. ábra Kolibri

1.4. ábra Diákok csoportja



1.5. ábra Madarak serege

A hétköznapi életben sokszor előfordulnak a „sokaság", „csoport", „tömeg", „sereg" stb. szavak.

Valamennyi kifejezés helyett használhatjuk a halmaz szót, azaz csillagok halmaza, diákok halmaza, autók halmaza, madarak halmaza. A halmaz bizonyos meghatározott, különböző dolgok összességét jelenti. Ezzel csak körülírtuk a halmaz fogalmát, mert nem tudjuk nála egyszerűbb fogalmakra visszavezetve értelmezni. Minden erre irányuló próbálkozás oda vezet, hogy a „halmaz" szóval rokon értelmű szavak valamelyikének felhasználásával érzékeltetjük a fogalmat. A mindennapi életben szerzett tapasztalataink alapján szemléletes képet alkothatunk a halmazról.

A matematikában az olyan fogalmakat, amelyekről csak érezzük, hogy mit jelentenek, illetve amelyekkel kapcsolatban van ugyan elképzelésünk arról, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeznek, de egyszerűbb fogalmakkal nem tudjuk meghatározni, **alapfogalmaknak** nevezzük. Léteznek azonban olyanok is, amelyeket már korábban megismert, náluk egyszerűbb fogalmak segítségével értelmezünk. Ekkor azt mondjuk, hogy **definiáljuk** a fogalmat.

Ahogy a példákban is láttuk, halmazokat képezhetünk csillagokból, emberekből, autókból, madarakból stb., azaz a legkülönfélébb dolgokból. Ezeket nevezzük a **halmaz elemeinek**. Például az 1.3. ábrán látható kolibri a Földön valaha élt madarak halmazának az eleme. **A halmaz elemét nem definiáljuk, azaz alapfogalomnak tekintjük.**

Egy **halmaz megadása** azt jelenti, hogy **elemeit egyértelműen meghatározzuk**. Ez az alábbi módok valamelyikével történhet:

a) a halmaz elemeinek a felsorolásával, amelyeket kapcsos zárójelbe teszünk. Egy elem csak egyszer szerepelhet a felsorolásban. Például: {2; 3; 5; 7}, {Budapest, Debrecen, Győr, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár}, {hélium, neon, argon, kripton, xenon, radon}.

Sokszor előfordul, hogy egy halmaz túl sok elemet tartalmaz ahhoz, hogy mindet felsoroljuk. Ilyen esetben elég annyit megadni, amely alapján egyértelműen meg tudjuk mondani, hogy mik a halmaz elemei. Például: {3; 6; 9; 12; …; 99}.

b) olyan utasítással, amely alapján egyértelműen el lehet dönteni, hogy valamely elem eleme-e a halmaznak vagy sem. Az egyértelmű utasítást is kapcsos zárójelbe írjuk. Például: {egyjegyű, pozitív prímszámok}, {százezer főnél nagyobb lélekszámú magyarországi városok}, {nemesgázok}, {a hárommal osztható, legfeljebb kétjegyű, nemnegatív egész számok}.

A halmazokat általában nagybetűvel jelöljük, de a geometriában pl. a kör, az egyenes mint ponthalmaz jelölésére kisbetűket használunk.

Például: az *A* halmaz a 2, 3, 5, 7 elemek halmaza: $A = \{2; 3; 5; 7\}$.

1. példa Olvassuk ki az alábbi jelöléseket!

B = {Budapest, Debrecen, Győr, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár}

C = {hélium, neon, argon, kripton, xenon, radon}

D = {3;6; 9; 12; … ;99}

1.6. ábra Hazánk városai sokféleképpen sorolhatók csoportokba, halmazokba

Megoldás:
B = {Budapest, Debrecen, Győr, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár} – a B halmaz a Budapest, Debrecen, Győr, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár városok halmaza
C = {hélium, neon, argon, kripton, xenon, radon} – a C halmaz a hélium, neon, argon, kripton, xenon, radon gázok halmaza
D = {3; 6; 9; 12; …; 99} – a D halmaz a 3; 6; 9; 12; …; 99 számok halmaza

Arra, hogy valamely elem a halmaznak eleme-e vagy sem, ugyancsak használunk jelölést. **A 2 eleme az A halmaznak, ezt az alábbi módon jelöljük: $2 \in A$.** Azt, hogy például **a 6 nem eleme az A halmaznak, így jelöljük: $6 \notin A$.**


1.7. ábra Nemesgázzal töltött fénycsövek

2. példa Adjuk meg az alábbi halmazokat az elemeik felsorolásával!

E = {egyjegyű prímszámok}

F = {százezer főnél nagyobb lélekszámú magyarországi városok}

G = {nemesgázok}

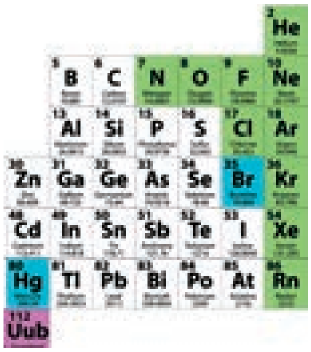
H = {a hárommal osztható, legfeljebb kétjegyű, nemnegatív egész számok}

Megoldás:
Az általános iskolában már volt szó a prímszámokról. Erre a számelmélettel foglalkozó fejezetben még visszatérünk, de nem árt a fogalmat itt is feleleveníteni.

Definíció Az olyan pozitív egész számot, amelynek pontosan két pozitív osztója van, **prímszám**nak nevezzük.

Ez a két szám az 1 és önmaga. A definícióból kiderül, hogy az **1 nem prímszám**, mert az **1-nek csak egy pozitív osztója van, az 1**. Ez alapján E = {2; 3; 5; 7}.

Az F halmaz elemeinek megállapításához a földrajzi atlaszban található Magyarország-térképet használhatjuk fel. Ez alapján F = {Budapest, Debrecen, Győr, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár}.



1.8. ábra A kémiai elemek többféle csoportba, halmazba sorolhatók

1.9. ábra Ez a különbség „nem semmi”!

1.10. ábra Kékestető

1.11. ábra Ez egy üres halmaz: semmi sincs az üres zsebben…

A nemesgázokat az általános iskolai kémia tanulmányainkból ismerjük. Ez alapján $G = \{$hélium, neon, argon, kripton, xenon, radon$\}$.

Végül a H halmaz elemei, a három 100-nál kisebb nemnegatív többszörösei, tehát a 0 is eleme a H halmaznak. Így

$$H = \{0; 3; 6; 9; 12; \ldots; 99\}.$$

Vegyük észre, hogy az 1. és a 2. példában szereplő halmazok között vannak olyanok, amelyek elemei megegyeznek! Ilyen az A és E, a B és F, illetve a C és G halmazok. Ha két halmaz között ilyen kapcsolat áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz egyenlő egymással. Ennek jelölésére a számok köréből már jól ismert „=” jelet használjuk. Ez alapján $A = E$, $B = F$ és $C = G$. A H és D halmaz abban tér el egymástól, hogy $0 \in H$, de $0 \notin D$. A két halmaz elemei nem egyeznek meg, így $H \neq D$, azaz H nem egyenlő D-vel.

Definíció Az ***A* és *B* halmaz** akkor és csak akkor **egyenlő,** ha az A halmaz elemei azonosak a B halmaz elemeivel, azaz ha $x \in A$, akkor $x \in B$, és ha $y \in B$, akkor $y \in A$.
Jelölés: $A = B$.

3. példa Legyen a $B = \{$a Magyarországon található 1050 m-nél magasabb hegyek$\}$! Olvassuk ki az előző jelölést! Adjuk meg a B halmaz elemeit!

Megoldás:
A B halmaz a Magyarországon található 1050 m-nél magasabb hegyek halmaza.

Földrajzból már általános iskolában is tanultuk, hogy Magyarország legmagasabb pontja a Kékestető, amelynek a tengerszint feletti magassága 1014 m. Így a B halmaznak nincs egyetlen eleme sem. Az ilyen halmazt üres halmaznak nevezzük.

Definíció Az olyan halmazt, amelynek nincs eleme, **üres halmaz**nak nevezzük. Jelölése: $\varnothing$, vagy $\{\}$.

Nagyon fontos, hogy a két jelölés nem alkalmazható egyszerre, mert a $\{\varnothing\}$ szimbólum egy olyan halmazt jelent, amelynek egy eleme van, az üres halmaz.

Az $A = \{2; 3; 5; 7\}$ halmaznak négy eleme van, míg $C = \{$Budapest, Debrecen, Győr, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár$\}$ halmaz nyolc elemet tartalmaz. Ezzel megkaptuk az A, illetve a C halmaz elemszámát, amit úgy jelölünk, hogy:

- $|A| = 4$, azaz az A halmaz elemszáma 4;
- $|C| = 8$, azaz a C halmaz elemszáma 8.

A halmaz elemszámát úgy jelöljük, hogy a halmaz betűjelét abszolút értékbe tesszük.

Nagyon fontos szerepet töltenek be a halmazok körében a számhalmazok, melyekkel behatóbban a következő leckében foglalkozunk. A jelölésükre külön szimbólumot használunk:

- természetes számok halmaza: $\mathbb{N}$ (natura, természet szóból)
- egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$ (Zahl (német) szám szóból)
- racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$ (kvóciens, hányados szóból)
- valós számok halamaza: $\mathbb{R}$ (reális, valós szóból)

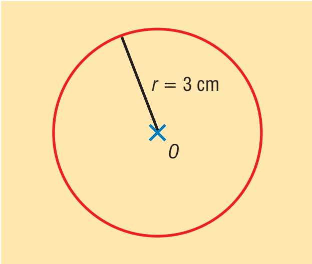
További jelölések például:

- pozitv egész számok halmaza: $\mathbb{N}^+$ vagy $\mathbb{Z}^+$
- negatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^-$

1.12. ábra $\mathbb{N}^+$

4. példa Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkon, amelyek egy adott *O* ponttól
a) 3 cm,
b) 3 cm-nél nem nagyobb,
c) 3 cm-nél nagyobb, de 5 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak!

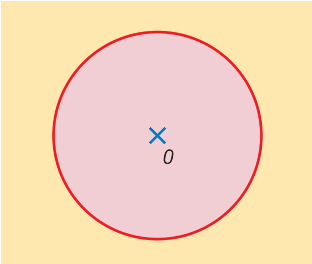
Megoldás:
a) Vegyük fel a síkon az *O* pontot! Az attól 3 cm-re levő pontok halmaza a síkon egy olyan kör vonala, amelynek a sugara 3 cm, a középpontja pedig *O*. (1.13. ábra)



1.13. ábra Körvonal

Definíció Egy adott ponttól adott, egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkon a **körvonal.** Az adott pont a **kör középpontja,** az adott távolság a **kör sugara,** jele: *r* (rádius).

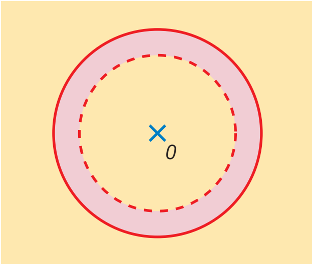
b) Az a) részből kiindulva a keresett ponthalmaz a körvonal és az azon belüli pontok halmaza, amit így együtt körlapnak nevezünk. (1.14. ábra)



1.14. ábra Körlap

Definíció Egy adott ponttól adott távolságnál nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkon a **körlap.**

A körvonal és a körlap különböző fogalmak, mégis szokás mindkettőt körnek nevezni. Azt, hogy a kettő közül melyikre gondolunk, az adott feladat, probléma szövege alapján tudjuk eldönteni.
c) Az előző két pont alapján egy olyan síkrészt kapunk, amelyet két különböző sugarú koncentrikus (egyközepű) kör határol. Ezt a síkrészt körgyűrűnek nevezzük. A feladatbeli ponthalmazhoz a körgyűrű külső köre hozzátartozik, a belső nem, ezért a külső kört folytonos, a belsőt szaggatott vonallal jelöljük. (1.15. ábra)



1.15. ábra Körgyűrű

5. példa Fogalmazzuk meg szavakkal, hogy milyen elemekből állnak az alábbi halmazok! Soroljuk fel az elemeiket! Melyek egyenlők az alábbi halmazok közül?

a) $A = \{2n \mid 3 < n \leq 9 \text{ és } n \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \{k^3 \mid -2 \leq k \leq 3 \text{ és } k \in \mathbb{Z}\}$

c) $C = \{3m + 2 \mid m \leq 8 \text{ és } m \in \mathbb{Z}^+\}$

d) $D = \{3x - 1 \mid 2 \leq x \leq 9 \text{ és } x \in \mathbb{N}\}$

Megoldás:

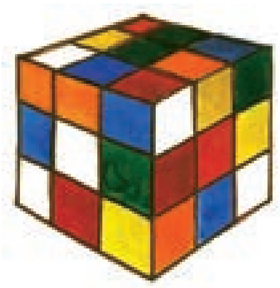
A megadott utasítások mindegyike **két részből áll**. Az **első rész**, amely a függőleges vonal előtt található, **a halmaz elemeit bemutató kifejezés, a reprezentáns**. A **második** rész, amely a függőleges vonal mögött látható, **azt a számhalmazt adja meg, amelyből vesszük a kifejezésben szereplő betű vagy betűk értékeit**. Most nézzük az *A* halmaz elemeit!

1.16. ábra Minden páros szám előállítható egy egész szám (*n*) kétszereseként

a) Mivel az *n* értékei háromnál nagyobb, kilencnél nem nagyobb természetes számok, ezért az *n* lehet 4, 5, 6, 7, 8, 9. A kifejezés szerint ezen számoknak kell venni a kétszeresét. Tehát: $A = \{8; 10; 12; 14; 16; 18\}$, szavakkal $A = \{$a hatnál nagyobb, húsznál kisebb páros számok$\}$. Az *A* halmazbeli jelölést használva könnyen megadhatjuk a páros számok általános alakját: $2n$, ahol *n* egész szám, azaz $n \in \mathbb{Z}$.

b) A *k* értékei: –2, –1, 0, 1, 2, 3. Az általános iskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy $k^3 = k \cdot k \cdot k$. Ez alapján $B = \{-8; -1; 0; 1; 8; 27\}$, azaz $B =$ $= \{$a –8-nál nem kisebb, 27-nél nem nagyobb köbszámok$\}$. (1.17. ábra)

c) Mivel az *m* pozitív egész, és nem nagyobb nyolcnál, így *m* értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Tehát $C = \{5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26\}$. A *C* halmaz minden eleme egy egész szám háromszorosánál, azaz egy hárommal osztható számnál 2-vel nagyobb szám. Az ilyen számokra azt mondjuk, hogy hárommal osztva kettőt adnak maradékul, vagy röviden a hármas maradékuk kettő. Ez alapján a *C* halmaz megadása szavakkal megfogalmazva $C = \{$26-nál nem nagyobb, ötnél nem kisebb egész számok, melyek hármas maradéka kettő$\}$.



1.17. ábra $3^3 = 27$

d) Az előzőek alapján $D = \{5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26\}$. A *D* halmaz elemeit úgy képezzük, hogy egy hárommal osztható számból kivonunk 1-et. Ezen számok hármas maradéka –1, de erre azt is mondhatjuk, hogy a hármas maradékuk 2. Tehát $D = \{$26-nál nem nagyobb, ötnél nem kisebb egész számok, melyek hármas maradéka $-1\} = \{$26-nál nem nagyobb, ötnél nem kisebb egész számok, melyek hármas maradéka $2\} = C$. Tehát $D = C$.

6. példa Adjuk meg az előző feladatban használt matematikai jelekkel az alábbi halmazokat, és soroljuk fel az elemeiket!

a) $D = \{$–5-nél nagyobb, 7-nél kisebb páratlan számok$\}$

b) $E = \{$az 1-nél nem kisebb, 100-nál kisebb négyzetszámok$\}$

c) $F = \{$azok a kétjegyű pozitív számok, melyek ötös maradéka 2$\}$

Megoldás:

a) Ha egy páros számhoz egyet hozzáadunk, páratlan számot kapunk. Az is igaz, hogy bármely páratlan szám előállítható így. Mivel a páros számok $2n$, $n \in \mathbb{Z}$ összefüggéssel adhatók meg, ezért a páratlan számok a $2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$ kifejezéssel írhatók fel. A D halmaz elemei –5-nél nagyobb, de hétnél kisebb páratlan számok, ezért az n értékét úgy kell megadni, hogy a $-5 < 2n + 1 < 7$ fennálljon. Ebből $-6 < 2n < 6$ következik, amit elosztva kettővel kapjuk, hogy $-3 < n < 3$. Tehát $D = \{2n + 1 \mid -3 < n < 3 \text{ és } n \in \mathbb{Z}\} = \{-3; -1; 1; 3; 5\}$.

b) A négyzetszámokat úgy kapjuk, hogy egy egész számot megszorzunk önmagával, ezért a négyzetszámok általános alakja: $m \cdot m = m^2$, ahol $m \in \mathbb{Z}$. A negatív számok négyzete pozitív, ezért elég, ha $m \in \mathbb{N}$. Ezt figyelembe véve az $E = \{m^2 \mid m < 10 \text{ és } m \in \mathbb{N}^+\} = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$.

c) A keresett számok ötös maradéka 2, ezért ezek mindegyike egy egész szám ötszörösénél kettővel nagyobb szám. Az ilyen számok általános alakja: $5k + 2$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. A legkisebb ilyen szám a 12, ekkor $k = 2$, a legnagyobb a 97, ekkor $k = 19$. Így $F = \{5k + 2 \mid 2 \le k \le 19 \text{ és } k \in \mathbb{N}\}$ $= \{12; 17; 22; \ldots; 92; 97\}$. Vegyük észre, hogy az F halmaz elemei a 2-re, illetve 7-re végződő kétjegyű pozitív egész számok! Ez alapján más jelölés segítségével is megadhatjuk az F halmazt. Mint tudjuk, a 35, a $3 \cdot 10 + 5$ összeget jelenti. Tehát ha egy kétjegyű számban balról az első jegy x, a második y (szokásos jelölése: $\overline{xy}$), akkor a számot a $10 \cdot x + y$ kifejezéssel adhatjuk meg, ahol $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ és $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Így $F = \{10 \cdot x + y \mid x \le 9,\ x \in \mathbb{N}^+ \text{ és } y \in \{2; 7\}\}$.

1.18. ábra Egy páros számhoz egyet hozzáadva páratlant kapunk

1.19. ábra Radnóti Miklós

Oldjuk meg!

1. Olvassuk ki az alábbi jelöléseket, és adjuk meg a halmazok elemeit! (A feladat megoldásához, ahol szükséges, használjuk az internetet!)

a) $A = \{$a 2007 számjegyei$\}$

b) $B = \{$a MATEMATIKA szó betűi$\}$

c) $C = \{$a Déli-Kárpátok 2500 m-nél magasabb csúcsai$\}$

d) $D = \{$a Naprendszer bolygói$\}$

e) $E = \{$alkálifémek$\}$

f) $F = \{$Radnóti Miklós verseskötetei$\}$

g) $G = \{$az osztály Gábor keresztnevű diákjai$\}$

2. Adjuk meg egyértelmű utasítással az alábbi halmazokat! (A feladat megoldásához, ahol szükséges, használd az internetet!)

a) $A = \{3; 7; 11; 15; 19\}$

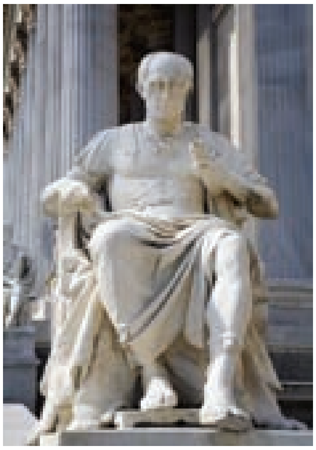
b) $B = \{$Julius Caesar; Pompeius; Marcus Licinius Crassus$\}$

c) $C = \{$Szépség koldusai; Nem én kiáltok; Tiszta szívvel; Döntsd a tőkét, ne siránkozz; Külvárosi éj; Medvetánc; Nagyon fáj$\}$

d) $D = \{11; 13; 17; 19; 23; 29\}$

e) $E = \{\varnothing, \{1\}\}$

f) $F = \{$berillium; magnézium; kalcium; stroncium; bárium; rádium$\}$



1.20. ábra Julius Caesar

3. Adott a síkon egy O és egy K pont, amelyek távolsága 6 cm. Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkon, amelyek

a) a K-tól 3 cm-re és az O-tól 5 cm-re.
b) a K-tól 3 cm-nél kisebb és az O-tól 5 cm-nél kisebb távolságra.
c) a K-tól 3 cm-nél nagyobb és az O-tól 5 cm-nél nem nagyobb távolságra.
d) a K-tól 3 cm-nél kisebb vagy az O-tól 5 cm-nél kisebb távolságra vannak.

4. Fogalmazzuk meg szavakkal az alábbi halmazok megadási utasításait!

a) $A = \{2n - 1 \mid n < 13 \text{ és } n \in \mathbb{Z}^+\}$
b) $B = \{k^2 - 2 \mid k \leq 7 \text{ és } k \in \mathbb{N}\}$
c) $C = \{4j + 3 \mid -2 \leq j \leq 3 \text{ és } j \in \mathbb{Z}\}$
d) $D = \{100a + 5 \mid a \leq 9, a \in \mathbb{N}^+\}$

5. Adjuk meg matematikai jelekkel az alábbi halmazokat!

a) A = {a 30-nál kisebb nemnegatív köbszámok kétszerese}
b) B = {a 10-nél nem kisebb, 120-nál kisebb, 7-tel osztható számok}
c) C = {a 7-re végződő háromjegyű számok}
d) D = {a 100-nál kisebb négyzetszámoknál eggyel nagyobb számok}

2. Számhalmazok

2.1. ábra Az első lépések

2.2. ábra Halmazok elemszámának összehasonlítása

A legegyszerűbb matematikai fogalmak, pl. a szám kialakulása nagyon hosszú történelmi folyamat eredménye. Életünkben talán az első matematikai tevékenység a számlálás, amely során megállapítjuk, hogy egy adott halmaznak ugyanannyi, több vagy kevesebb eleme van-e, mint egy másiknak. Elég, ha csak arra gondolunk, hogy kisgyermekkorban, mikor az ujjaink felhasználásával számoltunk meg valamit, akkor az ujjainkat és a megszámlálandó tárgyakat valamilyen módon párba állítottuk, és ez alapján megállapítottuk, hogy az adott tárgyból hány darab van.

Ugyanilyen tevékenységet végeztek az ókori Mezopotámiában a juhok, kecskék és egyéb állatok őrzésével megbízott emberek és a megbízóik. Az őrzésre átadott állatok számát reprezentáló kavicsokat gömb alakú agyagtartályba rakták, melyet kiszárítottak, és hivatalosan lezártak. Az elszámolásnál az edénykét feltörték, majd a kavicsok és az állatok párba állításával megnézték, hogy ugyanannyi állatot hoztak-e vissza, mint amennyit őrzésre átadtak. A két halmaz között ily módon kialakított kapcsolat nagyon fontos szerepet tölt be a matematikában. Erről még lesz szó a Függvények című fejezetben, valamint későbbi tanulmányok során, mikor a halmazok számosságával foglalkozunk.

A beszéd kialakulásával megjelentek a számnevek. Kezdetben csak az egy, kettő és a sok között tettek különbséget.

A kettőnek mindig is fontos szerepe volt, ami az emberi testen is fellelhető párosságra, páros testrészekre vezethető vissza. Ezeket a testrészeket együtt tekintjük egységnek. Elég, ha a „félkarú ember", „fél szemére vak" kifejezésekre gondolunk. Később jelent meg a három, négy stb. Eleinte a számnév még szorosan kötődött ahhoz a tárgyhoz, amelyet megszámláltak, tehát beszéltek hat bőrről, nyolc halról. Csak később, az emberi fejlődés egy magasabb fokán alakult ki az az absztrakciós készség, amellyel leválasztották a számokat a megszámlálandó tárgyakról, így pl. a kilencet mint számnevet bármely kilencelemű halmaz megszámlálására felhasználták. A megszámlálás tehát nem más, mint az 1, 2, 3, … számokat tartalmazó rendezett halmaz és a megszámolni kívánt halmaz elemeinek a párba állítása. A nulla az üres helyi érték jelölésére a hinduknál jelenik meg, bizonyos források szerint a IV. századtól. A mai nulla jelet a görög csillagászok már használták. A nulla szó eredete a latin nullus (egy sem, semmi) melléknév. A nulla elnevezésére a zérus szót is használjuk, amely az arab zifr (semmi, üresség) szóból származik.

Akinek felkeltettük az érdeklődését a téma iránt, az interneten a „számfogalom kialakulása" címszó alatt sok érdekességet talál. Ilyen cím például: http://hu.wikipedia.org/wiki/Szám

2.3. ábra Két láb, két kéz

2.1. Természetes számok

A 0, 1, 2, 3, … számokat természetes számoknak nevezzük.

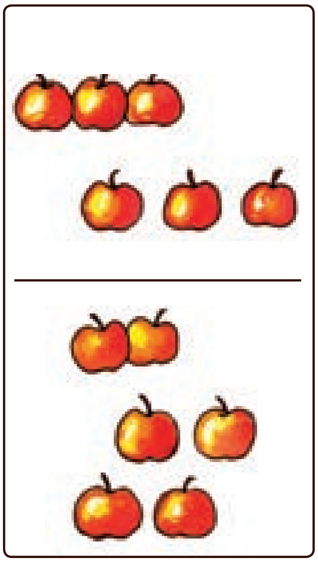
A természetes számok egy tárgyalási módja az ún. axiomatikus tárgyalási mód, amely G. Peano (1858–1932) olasz matematikustól származik. Az **axióma** olyan kijelentés, amelyet nem bizonyítunk, igazként fogadunk el. Eszerint a természetes szám, a zérus és a rákövetkezés fogalma alapfogalom. Az öt axióma közül nézzünk négyet:

I. A 0 természetes szám.
II. Minden n természetes számhoz van egyértelműen meghatározott rákövetkező n' természetes szám.
III. Nincs olyan n természetes szám, amelyre $n' = 0$.
IV. Ha $n' = m'$, akkor $n = m$.

Bármely két természetes szám összege és szorzata is természetes szám. Ha a, b és c tetszőleges természetes számok, akkor fennállnak az alábbi műveleti tulajdonságok:

- $\boldsymbol{a + b = b + a}$, illetve $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$, tehát az összeadás, illetve a szorzás **kommutatív**, azaz az **összeadás** esetén a két **tag**, **szorzás** esetén a két **tényező felcserélhető.**
- $\boldsymbol{a + (b + c) = (a + b) + c}$, illetve $\boldsymbol{a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c}$, tehát az összeadás, illetve a szorzás **asszociatív**, azaz **összeadás** esetén a **tagok**, **szorzás** esetén a **tényezők** tetszőlegesen c**soportosíthatók.**
- $\boldsymbol{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$, azaz a szorzás az összeadásra nézve **disztributív,** a szorzó tényező **szétosztható** a két tag között.

A természetes számok körében végezhetünk kivonást is, pl. $15 - 8 = 7$, de az már nem teljesül, hogy bármely két természetes szám különbsége természetes szám, pl. a $3 - 10$ különbségnek nincs értelme a természetes számok körében. Ez a gondolat vezet el minket az egész számok halmazához.



2.4. ábra $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

2.2. Egész számok

A …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, … számokat egész számoknak nevezzük. Bármely két egész szám összege, szorzata, különbsége is egész szám.

2.5. ábra Adóslevél

2.6. ábra A negatív számok bevezetése

„Kínában a Kr. e. II–I. században az elsőfokú egyenletrendszerek együtthatói között már találunk negatív számokat is. Az indiai matematikusok 500–900 táján már figyelembe vették a negatív megoldásokat is. Európában aránylag későn jelentkeztek a negatív számok. A XII–XV. századbeli itáliai matematikusok a hiány jelölésére kezdték használni. Ebben az időben a virágzó kereskedelem és az egyenletek elméletének fejlődése sürgette az „új" számok bevezetését. Cardano (1501–1576) olasz matematikus már tekintetbe vette, de fiktív számoknak nevezte őket. Stifel (1487?–1567) német matematikus, aki a másodfokú egyenletek megoldását egyszerűsítette, a negatív számokat abszurd számoknak nevezte. Még a francia Viète (1540–1603) is elvetette a negatív számokat, Descartes (1596–1650) 1637-ben megjelent Geometria című könyvében még hamis számoknak hívta, de már minden előítélet nélkül használta őket." (Sain Márton: Matematikatörténeti ABC)

2.7. ábra Stifel

Az összeadás és a szorzás – korábban már említett – műveleti tulajdonságai az egész számok körében is érvényben maradnak.

1. példa Végezzük el az alábbi műveleteket! Figyeljünk a műveleti sorrendre!

a) $3 - (-6) + 7$
b) $5 \cdot 7 + 8 - 12 \cdot 6$
c) $8 \cdot (23 - 31) - 5 \cdot 3 + (-16) \cdot (-4)$

Megoldás:

a) $3 - (-6) + 7 = 3 + 6 + 7 = 16$
b) $5 \cdot 7 + 8 - 12 \cdot 6 = 35 + 8 - 72 = -29$
c) $8 \cdot (23 - 31) - 5 \cdot 3 + (-16) \cdot (-4) = 8 \cdot (-8) - 15 + 64 =$
$= -64 - 15 + 64 = -15$

2.8. ábra Viète

Az egész számok körében végezhetünk osztást, pl. $24 : 3 = \frac{24}{3} = 8$.

Azt is tudjuk, hogy ez nem minden esetben tehető meg, mert pl. a $10 : 23 = \frac{10}{23}$ már nem egész szám. Ahhoz, hogy ezt az osztást is elvégezhessük, bővítenünk kell a számfogalmat.

2.3. Racionális számok

Az olyan számokat, amelyek felírhatók $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ és $b \neq 0$, racionális számoknak nevezzük. Az $\frac{a}{b}$ alakot törtszámnak hívjuk, ahol a a tört számlálója, b a tört nevezője.

Azt már általános iskolában is tanultuk, hogy a törtek nevezőjét és számlálóját is szorozhatjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal, a tört értéke attól nem változik. Ez a **tört bővítése,** pl. $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$.

Ha a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nullától különböző egész számmal osztjuk, feltéve, hogy mindkettőnek osztója, akkor sem változik a tört értéke. Ez a **tört egyszerűsítése,** pl. $\frac{120}{140} = \frac{6}{7}$.

A **törtek összeadásánál és kivonásánál** nagyon fontos a közös nevezőre hozás. Megkeressük azt a legkisebb pozitív egész számot, amely mindegyik nevezőnek többszöröse (azaz legkisebb közös többszörösét), ez lesz a közös nevező, és úgy bővítjük a törteket, hogy mindegyiknél megjelenjen ez a szám. Az így kapott törteknél összevonjuk a számlálókat, és a kapott eredményt, ha lehet, egyszerűsítjük. Lássunk erre egy példát!

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{15} - \frac{3}{20} = \frac{25}{60} + \frac{28}{60} - \frac{9}{60} = \frac{25+28-9}{60} = \frac{44}{60} = \frac{11}{15}$$

A **törtek szorzásánál** a számlálók szorzatát osztjuk a nevezők szorzatával, ha lehet, egyszerűsítünk.

$$\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{18} = \frac{12 \cdot 7}{5 \cdot 18} = \frac{14}{15}$$

Törtnek 0-tól különböző törttel való osztásánál pedig az osztandót megszorozzuk az osztó reciprokával.

$$\frac{11}{8} : \frac{13}{4} = \frac{11}{8} \cdot \frac{4}{13} = \frac{11}{26}$$

A racionális számok **tizedes tört** alakban is felírhatók, például $\frac{5}{8} = 0,625\dot{0}$, $\frac{11}{7} = 1,\dot{5}7142\dot{8}$, $\frac{7}{6} = 1,1\dot{6}$. A tizedes tört lehet véges, mint például a 0,625, és lehet szakaszos végtelen tizedes tört, mint a $1,\dot{5}7142\dot{8}$ és az $1,1\dot{6}$. Az utóbbi kettőből az első, tiszta szakaszos végtelen tizedes tört, a másik vegyes szakaszos végtelen tizedes tört. Ha a véges tizedes törtet úgy írjuk fel, hogy $0,625\dot{0}$, azaz a 0 ismétlődik, akkor azt is tekinthetjük szakaszos végtelen tizedes törtnek. Ezek után nem meglepő, hogy be lehet bizonyítani az alábbi tételt.

2.9. ábra Nullával nem osztunk

2.10. ábra $\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

2.11. ábra Fibonacci

2.12. ábra Simon Stevin

2.13. ábra Johannes Kepler

Tétel Bármely racionális szám felírható szakaszos végtelen tizedes tört alakban.

Az előző fejezetben szóltunk arról, hogy a matematikában vannak alapfogalmak, illetve definiálandó fogalmak. Ezek mellett léteznek állítások, melyeket ugyancsak két csoportra oszthatunk. Az egyikbe azok tartoznak, amelyeket a tapasztalataink alapján természetesnek veszünk, elfogadunk, ezek az úgynevezett **alaptételek**, vagy idegen szóval **axiómák**. A másikba tartoznak azok az állítások – az úgynevezett **tételek** – melyeket bizonyítunk, azaz már ismert tételekre, fogalmakra, axiómákra vezetünk vissza, és azokból kiindulva helyes következtetésekkel megmutatjuk igaz voltukat. A tételek és azok bizonyítása a matematika fontos részét képezik.

Igaz az előző állítás fordítottja is.

Tétel Bármely szakaszos végtelen tizedes tört alakban felírt szám racionális.

A törtek első nyomait a suméroknál és az egyiptomiaknál találjuk meg. Keletkezésük nem az egész számok osztására vezethető vissza, hiszen akkor még nem ismerték a mai értelemben vett osztást, illetve szorzást. Törteket először a mérések során kezdtek el használni, így jelent meg az egésznek a fele, az ½. Az erre használt szavak a különböző nyelvekben a fél, half, halb, demi stb. nem hozhatók kapcsolatba a kettő, two, zwei, deux szavakkal, tehát nem a kettőből származtatták osztással.

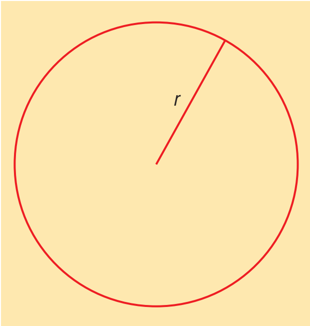
Hasonlóan alakultak ki az egyéb, tetszőleges nevezőjű, egységnyi számlálójú törtek. Az ilyen, úgynevezett törzstörtekkel számoltak az egyiptomiak. A tetszőleges számlálójú törtek valószínűleg először Babilonban jelentek meg. A görögök is használtak törteket, de a jelölésmódjuk egy kicsit bonyolult volt. A mai formájuk (számláló, nevező) a hinduktól származik, de ők még nem használtak törtvonalat, melynek megjelenése Leonard Pisano (ismertebb nevén Fibonacci) nevéhez köthető. A tizedes törtek a XVI. századtól váltak általánossá Simon Stevin (1548–1620) flamand mérnök munkássága nyomán. A tizedes vesszőt bizonyos források szerint Johannes Kepler (1571–1630) vezette be, máshol John Napier (1550–1617) skót matematikusnak tulajdonítják azt.

2.4. Irracionális számok, valós számok

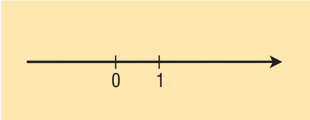
Már általános iskolában is találkoztunk a kör kerületének és területének kiszámítása kapcsán a π -vel. Ugyancsak előkerült a négyzetgyökvonás, és ennek kapcsán találkozhattunk pl. a 2 négyzetgyökével is, a $\sqrt{2}$-vel. A π-ről és a $\sqrt{2}$-ről be lehet bizonyítani, hogy nem racionális számok. A nem racionális számokat **irracionális számoknak** nevezzük. **Az irracionális számok halmazának a jele**: $\mathbb{Q}^*$ (szokás még az **I** használata is). Az irracionális számokról meg lehet mutatni, hogy felírhatók végtelen tizedes tört alakban. Ez a tizedes tört viszont már nem lehet szakaszos tizedes tört, ezért **az irracionális számok a nem szakaszos végtelen tizedes tört alakban felírt számok.** A racionális és irracionális számokat együtt valós számoknak nevezzük, azaz **a végtelen tizedes tört alakban felírható számok a valós számok.** Irracionális számot mi is előállíthatunk könnyedén, csak arra kell törekedni, hogy a felírt szám tizedes tört alakja ne legyen periodikus, pl. 0,208200820008200008… .

A valós számokat már általános iskolában is számegyenesen szemléltettük. Elkészítésénél az első lépés, hogy egy egyenesen felveszünk két pontot, ez a 0 és az 1, ezzel kijelölünk egy irányt is.

A számegyenes pontjait és a valós számokat a lecke elején említett módon párba állíthatjuk, azaz bármely valós számnak megfelel egy pont a számegyenesen, valamint bármely pontnak megfelel egy valós szám, és különbözőknek különbözők felelnek meg. A 0 és az 1 felvételével egyértelműen meghatározzuk minden valós szám helyét a számegyenesen. Az ezekkel kapcsolatos megfontolások túlmutatnak a középiskolai tananyagon, ezért itt nem foglalkozunk velük.



2.14. ábra Az r sugarú kör kerülete: $K = 2 \cdot r \cdot \pi$, területe: $T = r^2 \cdot \pi$

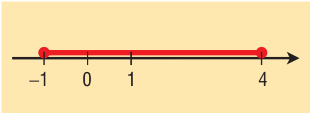


2.15. ábra Számegyenes

2. példa Az alábbiakban az első leckében megismert jelölésekkel megadunk néhány halmazt. Fogalmazzuk meg szavakkal a megadási utasítást! Ábrázoljuk számegyenesen ezeket a halmazokat!
a) $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 4 \text{ és } x \in \mathbb{R}\}$ b) $B = \{x \mid -2 < x \leq 1 \text{ és } x \in \mathbb{R}\}$
c) $C = \{x \mid 0 \leq x < 3 \text{ és } x \in \mathbb{R}\}$ d) $D = \{x \mid -3 < x < 1 \text{ és } x \in \mathbb{R}\}$

Megoldás:
a) A = **{–1-nél nem kisebb, négynél nem nagyobb valós számok}**
A számegyenesen úgy ábrázoljuk, hogy a –1 és a 4 pontokhoz egy-egy teli karikát teszünk, míg a közöttük levő részt megvastagítjuk.

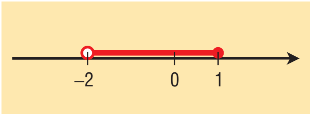
Az ily módon megadott számok halmazát intervallumnak nevezzük. Mivel a –1 és a 4 is hozzátartozik a halmazhoz, ezért ennek a halmaznak a pontos elnevezése: **mínusz egy, négy, mindkét oldalról zárt intervallum,** jelölése: **[–1;4].**



2.16. a) ábra [–1;4]

b) B = **{–2-nél nagyobb, 1-nél nem nagyobb valós számok}**
A számegyenesen úgy ábrázoljuk, hogy a –2-höz üres, az 1-hez teli karikát teszünk, és a közöttük levő részt megvastagítjuk.

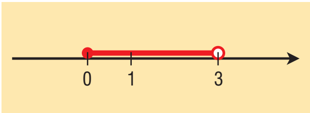
Az elnevezés: **mínusz kettő, egy balról nyitott, jobbról zárt intervallum**, jelölés: **]-2;1].**



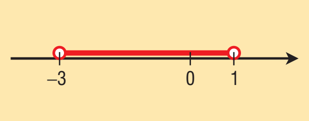
2.16. b) ábra]–2;1]

c) C = **{0-nál nem kisebb, 3-nál kisebb valós számok}**
A számegyenesen úgy ábrázoljuk, hogy a 0-hoz teli, a 3-hoz üres karikát teszünk, és a közöttük levő részt megvastagítjuk.

Az elnevezés: **nulla, három, balról zárt, jobbról nyitott intervallum**, jelölés: **[0;3[.**



2.16. c) ábra [0;3[



2.16. d) ábra]–3;1[

d) D = **{–3-nál nagyobb, 1-nél kisebb valós számok}**
A számegyenesen úgy ábrázoljuk, hogy a –3 és az 1 pontokhoz egy-egy üres karikát teszünk, a közöttük levő részt megvastagítjuk.

Az elnevezés: **mínusz három, egy, mindkét oldalról nyitott intervallum**, jelölés: **]-3;1[.**

Oldjuk meg!

1. Végezzük el az alábbi műveleteket!
a) $-12+(-21)\cdot(-3)+24:(-8)$
b) $[35-(-23)+(-45)]\cdot[36-32+8+(-2)\cdot 6]$
c) $(-42)\cdot[-12+31-(-6)]:[21+(-6)]$

2. Öt darab kettes számjegy, a négy műveleti jel és esetleg zárójelek felhasználásával állítsuk elő az első hat természetes számot! (Pl. ha –1-et szeretnénk előállítani, akkor $-1=2:2-2+2-2$.)

3. Az alábbi műveletsorba zárójeleket írunk. Hányféle különböző végeredményt kaphatunk? $2-4-6-8-10$

4. Olvassuk ki az alábbi intervallumokat, és ábrázoljuk azokat számegyenesen!
a) $[-1{,}5;3]$ b) $[\frac{7}{4};8[$ c) $]-1{,}2;3{,}5]$ d) $]0;4[$ e) $[-\frac{3}{2};2[$ f) $]-\infty;4]$

5. Adjuk meg az intervallumra használt jelölés felhasználásával az alábbi halmazokat! Ábrázoljuk azokat a számegyenesen!
a) A = {kettőnél nagyobb, nyolcnál nem nagyobb valós számok}
b) B = {mínusz háromnál nagyobb, hatnál kisebb valós számok}
c) C = {nullánál nem kisebb, hétnél nem nagyobb valós számok}
d) D = {mínusz ötnél nem kisebb, egynél kisebb valós számok}

6. Egy számsorozatban a második tagtól kezdve bármely szám kettővel nagyobb, mint az előtte álló szám ötszöröse. Határozzuk meg a sorozat első öt tagját, ha a harmadik a 12!

7. Egy számsorozatban a harmadik tagtól kezdve bármely szám hárommal nagyobb, mint az előtte levő két szám szorzata. Mekkora az első hat tag, ha a harmadik 9, a negyedik 30?

3. Műveletek racionális számokkal

3.1. ábra Mi a közös nevező?

1. példa Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét, és állítsuk növekvő sorrendbe!

a) $A=\left(\frac{11}{4}+\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{9}\right)-\frac{2}{3}:\frac{4}{15}$ b) $B=\dfrac{\frac{1}{18}+\frac{1}{12}-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}$

c) $C=\frac{1}{2}-\dfrac{\frac{17}{5}}{4-\frac{23}{10}}:\frac{4}{3}$ d) $D=\left(\frac{1}{2}-\dfrac{\frac{17}{5}}{4-\frac{23}{10}}\right):\frac{4}{3}$

Megoldás:

a) Először végezzük el a kijelölt műveleteket a zárójeleken belül, a törtek összevonásának szabályai alapján! Ezután vegyük figyelembe, hogy az osztás és a szorzás magasabb rendű művelet, mint a kivonás és az összeadás! Így A-ra kapjuk, hogy

$$A=\left(\frac{11}{4}+\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{9}\right)-\frac{2}{3}:\frac{4}{15}=\left(\frac{22}{8}+\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{21}{9}-\frac{5}{9}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4}=$$

$$=\frac{27}{8}\cdot\frac{16}{9}-\frac{5}{2}=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}.$$

b) Végezzük el külön a számlálóban és külön a nevezőben a kijelölt műveleteket!

A számláló:

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{12}-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}-\frac{5}{18}=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}-\frac{10}{36}=\frac{5}{36}-\frac{10}{36}=-\frac{5}{36}.$$

A nevező: $\quad \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{9}{36}-\dfrac{4}{36}=\dfrac{5}{36}.$

Így $\quad B=\dfrac{\frac{1}{18}+\frac{1}{12}-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}=\dfrac{-\frac{5}{36}}{\frac{5}{36}}=-1.$

c) A C kifejezés két tagból áll. Mivel az osztás magasabb rendű művelet, mint a kivonás, ezért először a második tagot hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi módon!

$$\frac{\frac{17}{5}}{4-\frac{23}{10}}:\frac{4}{3}=\frac{\frac{17}{5}}{\frac{40}{10}-\frac{23}{10}}:\frac{4}{3}=\frac{\frac{17}{5}}{\frac{17}{10}}:\frac{4}{3}=\frac{17}{5}\cdot\frac{10}{17}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2},$$

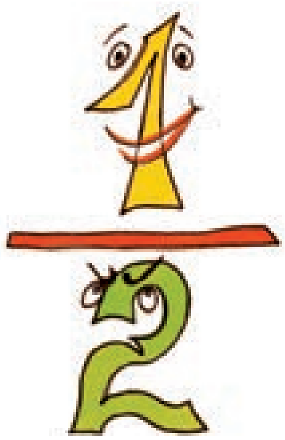
$$C=\frac{1}{2}-\frac{\frac{17}{5}}{4-\frac{23}{10}}:\frac{4}{3}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1.$$

d) A D kifejezésben először a zárójelen belüli műveleteket végezzük el, utána az osztást!

$$\frac{1}{2}-\frac{\frac{17}{5}}{4-\frac{23}{10}}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{17}{5}}{\frac{40}{10}-\frac{23}{10}}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{17}{5}}{\frac{17}{10}}=\frac{1}{2}-\frac{17}{5}\cdot\frac{10}{17}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}.$$

Így $D=-\dfrac{3}{2}:\dfrac{4}{3}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{4}=-\dfrac{9}{8}$, tehát $D<C=B<A$.

2. példa Melyik nagyobb, az x vagy az y, ha tudjuk, hogy az x a 12-nek a 0,7 része, míg az y 0,7 része 5,88?



3.2. ábra Törtetés

3.3. ábra Melyik nagyobb? Talán egyenlők?

3.4. ábra Ebből következik…

Megoldás:
Mivel x a 12-nek a 0,7 része, ezért az x-et megkapjuk, ha a 12-t megszorozzuk 0,7-del, így $x = 12 \cdot 0{,}7 = 8{,}4$. Mivel az y-nak a 0,7 része 5,88, így azt a számot keressük, amelyet 0,7-del megszorozva 5,88-at kapunk. Ez a szám az 5,88 és a 0,7 hányadosa. Így $y = 5{,}88 : 0{,}7 = 8{,}4$. Tehát $x = y$.

3. példa Hány százaléka a k az x-nek, ha az alábbi három állítás teljesül az x, y, z számokra?
– Az x a 240-nek a 45%-a.
– Az y-nak a 125%-a 95.
– A k a $\dfrac{2025}{19}$-nek az y%-a

Megoldás:
A százalékszámítás nem más, mint századrészekkel történő számolás. Az a szám, amelyet 100%-nak tekintünk az alap, ez az első esetben a 240. Az a szám, amelyről megnézzük, hogy az alapnak hány %-a, azaz amelyet az alappal hasonlítunk össze, a százalékérték. Ez az első esetben az x. Az a szám, amely megmondja, hogy a százalékérték hány százaléka az alapnak, a százalékláb. Ez itt a 45. Az alap, a százalékérték, a százalékláb és a 100 között egy egyszerű összefüggés áll fenn. Ahányszorosa az alap a százalékértéknek, annyiszorosa a 100 a százaléklábnak, vagyis hányadosuk egyenlő, azaz

alap : százalékérték = 100 : százalékláb.

Az x a 240-nek a 45%-a, így $240 : x = 100 : 45$. Ebből $x = 240 \cdot 45 : 100 = 240 \cdot 0{,}45 = 108$. Tehát egyszerűen $x = 240 \cdot 0{,}45 = 108$.
A második állítás kapcsán a következő összefüggést írhatjuk fel: $y : 95 = 100 : 125$.
Ebből $y = 95 \cdot 100 : 125 = 76$.
A harmadik állítás alapján a k a $\dfrac{2025}{19}$-nek az y%-a.
Röviden: $k = \dfrac{2025}{19} \cdot 0{,}76 = 81$.
Jelöljük a keresett értéket v-vel. Felírhatjuk, hogy $108 : 81 = 100 : v$, ebből $v = 100 \cdot 81 : 108 = 75$. Tehát a k az x-nek 75%-a.

4. példa Egy butikban a nyári ruhákat 60%-os haszonnal adják el. Augusztus második felében nyári vásárt tartanak, így a ruhákra 30%-os kedvezményt adnak. Hány százalékos haszna van ekkor az üzlet tulajdonosának? Legalább hány százalékos árleszállítás esetén nem lenne haszna az üzletvezetőnek?

3.5. ábra Nyári vásár

Megoldás:
Legyen x a ruhák beszerzési ára! Mivel az üzlet tulajdonosának a ruhákon 60%-os haszna van, ezért a beszerzési ár 160%-áért értékesíti a ruhákat. Legyen az eladási ár y! Így $y = 1{,}6x$.

A nyári vásár idején ebből az árból enged 30%-ot, ami azt jelenti, hogy az új ár az eladási ár 70%-a. Ezt az árat jelöljük z-vel. Tehát $z = 0{,}7y$.

Ez alapján $z = 0{,}7y = 0{,}7 \cdot 1.6 \cdot x = 1{,}12 \cdot x$. A nyári vásár idején az üzletvezetőnek 12%-os haszna van.

A másik kérdés egy kicsit nehezebb. Az előző részből tudjuk, hogy az eladási ár $y = 1{,}6x$. Akkor nincs haszna az üzletvezetőnek, ha az árleszállítás utáni ár legfeljebb akkora, mint a beszerzési ár, azaz x. Tehát keressük azt a számot, amivel az eladási árat megszorozva a beszerzési árat kapjuk. Mivel $y = 1{,}6x$, ezért $x = (1{:}1{,}6)y = 0{,}625y$. Tehát legalább $100 - 62{,}5 = 37{,}5$%-os árleszállítás estén nem lesz haszna az üzletvezetőnek.

5. példa Két testvér egy játékot szeretne vásárolni. Az idősebbik havi zsebpénze a játék árának az $\frac{5}{7}$ részével egyenlő, a fiatalabbiké a játék árának a $\frac{2}{3}$ részével. Mikor megveszik, összesen 1600 forintjuk marad. Mennyibe kerül a játék? Mennyi pénze marad a gyerekeknek fejenként, ha a játék árát megfelezték?

3.6. ábra Azt megvehetjük!

Megoldás:
Először számoljuk ki, hogy kettőjük zsebpénze együtt hányszorosa a játék árának! Ezt megkapjuk, ha a megadott törteket összeadjuk: $\frac{5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{15}{21}+\frac{14}{21}=\frac{29}{21}$, tehát $\frac{29}{21}$ szerese. Ebből következik, hogy a megmaradt 1600 Ft a játék árának a $\frac{8}{21}$ része. Így $\frac{1}{21}$ rész 200 Ft, azaz a játék ára $200 \cdot 21 = 4200$ Ft. Ebből már kiszámolható a testvérpár zsebpénze. Az idősebb $15 \cdot 200 = 3000$ Ft-ot, a fiatalabb $14 \cdot 200 = 2800$ Ft-ot kap havonta. Mivel ugyanannyit fizetnek a játék árába, ezért az idősebbnek 900 Ft-ja, a fiatalabbnak 700 Ft-ja marad.

6. példa Egy osztály tanulóinak egyhatod része nem tagja egyetlen szakkörnek sem. A szakkörre járók mindegyike pontosan egy szakkörre iratkozott be, méghozzá az $\frac{1}{2}$ részük a matematika, harmaduk a fizika, a maradék 5 pedig a kémia szakkörre. Hány fős az osztály, és hányan járnak matematikára?

3.7. ábra Kémiaszakkör

Megoldás:
Az első mondatból kiderül, hogy szakkörre az osztály öthatod része jár. Ennek a fele, vagyis az osztály $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$ része jár matematikára; harmada, tehát az osztály $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$ része fizikára, a maradék;

azaz $1-\frac{1}{6}-\frac{5}{12}-\frac{5}{18}=\frac{36-6-15-10}{36}=\frac{5}{36}$ része, ami öt diák, kémiára. Innen már könnyen kapjuk, hogy az osztálylétszám 36 fő, és $36\cdot\frac{5}{12}=15$-en járnak matematika szakkörre.

Oldjuk meg!

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{3}\right):\left(\frac{4}{3}-2\right)+\left(\frac{2}{15}+\frac{7}{20}\right)\cdot\frac{30}{29}$ b) $\dfrac{1\frac{3}{5}-\frac{9}{20}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{5}}$ c) $\frac{23}{12}+\frac{1}{4}:\left(\dfrac{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{5}}-\frac{5}{4}\right)$

2. Melyik nagyobb?

a) $\frac{5}{3}$-nak a $\frac{4}{5}$ része vagy 6,8-nek a 21%-a b) $\frac{175}{44}$-nek a 33%-a vagy $\frac{11}{3}:\frac{22}{29}:\left(\frac{13}{12}-\frac{5}{18}\right)\cdot\frac{1}{5}$

3. Egy kert kerülete 161 m. Mennyi drótkerítést kell venni, ha a vásárolt mennyiség 8%-át számolják hulladékra?

4. A megtakarított pénzem háromötöd részét 1 évre lekötöttem, 25%-át utazásra költöm, a maradék 210 000 Ft folyószámlán van. Mennyi a megtakarított pénzem? Hány forintot kötöttem le?

5. Egy medencét három csövön keresztül töltenek meg vízzel. Az első csövön 5 perc alatt 83 liter víz folyik a medencébe, a második csövön 6 perc alatt ennek a 120%-a. A harmadik cső keresztmetszetén egy perc alatt annyi víz áramlik át, mint a másik kettő keresztmetszetén együtt ugyanennyi idő alatt.
a) Mennyi víz folyik be a medencébe a harmadik csövön keresztül 10 perc alatt?
b) Hány literes a medence, ha 15,5 óra alatt telik meg?

6. András, Béla és Csaba nyáron munkát vállaltak, őszibarackot szüreteltek. András napi teljesítménye Béla napi teljesítményének a 85%-a. András és Csaba napi teljesítménye együtt 80%-kal több, mint Béla napi teljesítménye.
a) Mennyi Béla napi teljesítménye, ha Csabáé 152 kg?
b) Hány százalékkal nagyobb Csaba napi teljesítménye, mint Andrásé?

7. Egy számsorozatban minden szám 30%-kal kisebb, mint az előtte álló szám kétszerese. Mennyi a sorozat első öt eleme, ha a harmadik 490?

8. A 30 fős 9. A osztályban orvosi vizsgálatot tartottak. Mikor kiszámolták az osztály átlagos testmagasságát, kiderült, hogy az egyik fiú testmagasságát 176 cm helyett 167 cm-nek írták. Mennyi lett módosítás után az osztály átlagmagassága, ha eredetileg 168,7 cm-t számoltak?

9. Elolvastam egy könyv negyedrészét és még 20 oldalt. Hátra van még 8 oldal híján a könyv kétharmad része. Hány oldalas a könyv?

10. Egy vállalat új igazgatót kapott, aki működését azzal kezdte, hogy a dolgozók számát megnövelte az ötödével, majd felvett 15 embert. Fél év múlva elbocsátotta a dolgozók 20%-át. Mivel kaptak egy komoly megbízást, ezért felvett 42 munkást. Egy évre rá takarékossági okok miatt kénytelen volt elbocsátani a dolgozók harmadát. A végén 100 alkalmazottja maradt. Hányan dolgoztak a vállalatnál az új igazgató megérkezése előtt?

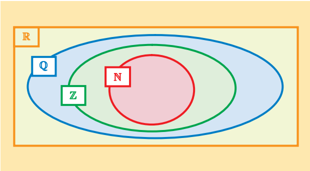
4. A részhalmaz fogalma, jelölések, elnevezések

A számhalmazokról tanultak alapján nyilvánvaló, hogy a természetes számok halmazának bármely eleme eleme az egész számok halmazának is, de az egész számok halmazának nem minden eleme van benne a természetes számok halmazában. Ez alapján egy olyan kép alakulhat ki bennünk, hogy a természetes számok halmaza része az egész számok halmazának. Ennek kapcsán bevezetünk egy új fogalmat, a **részhalmaz** fogalmát.

Definíció Adott az A és a B halmaz. Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor az A halmazt a B halmaz **részhalmazának** nevezzük.
Jelölés: $A \subseteq B$. (Kiolvasás: A halmaz részhalmaza B halmaznak.)
Jelölésekkel: Ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$, akkor $A \subseteq B$.

4.1. ábra John Venn (1834–1923)

Az új jelölés segítségével a számhalmazok között a következő kapcsolatot írhatjuk fel: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Ezt szemléltethetjük halmazábrák, úgynevezett Venn-diagramok segítségével. A halmazokat egy-egy kör, ellipszis, téglalap vagy valamilyen síkbeli ponthalmaz szimbolizálja, és ezek segítségével jelenítjük meg a halmazok közötti kapcsolatot.



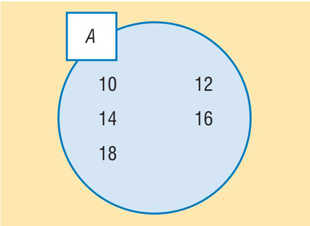
4.2. ábra $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

1880. júliusában jelent meg John Venn-nek az a cikke, amelyben először szerepelnek a róla elnevezett diagramok. Később a Szimbolikus logika (1881) című művében tökéletesíti jelölésrendszerét, amely fontos szerepet játszik műveiben.

1. példa Legyen az $A = \{2k \mid 4 < k < 10 \text{ és } k \in \mathbb{N}\}$ és $B = \{10 + x \mid x \in \{0;2;4;6;8\}\}$! Adjuk meg a két halmaz elemeit! Ábrázoljuk mindkét halmazt Venn-diagramon! Milyen kapcsolat áll fenn az A és B halmaz között?

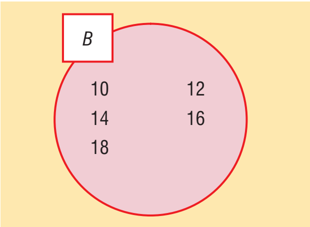
Megoldás:

Az $A = \{10;12;14;16;18\}$ és $B = \{10;12;14;16;18\}$. Tehát a két halmaznak ugyanazok az elemei, azaz $A = B$.



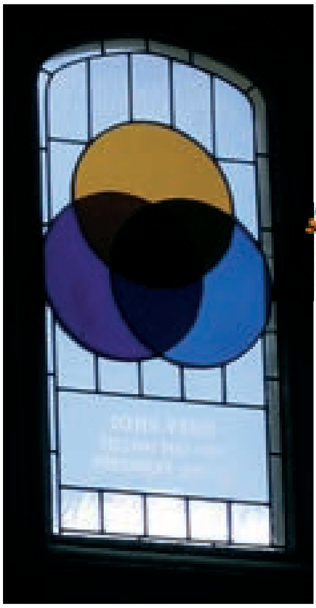
4.3. ábra
$A = \{2k \mid 4 < k < 10 \text{ és } k \in \mathbb{N}\}$

Természetesen teljesül az is, hogy az A minden eleme eleme a B-nek is, azaz $A \subseteq B$, és az is, hogy a B minden eleme eleme az A-nak is, azaz $B \subseteq A$. Be lehet bizonyítani az alábbi tételt.



4.4. ábra
$B = \{10 + x \mid x \in \{0;2;4;6;8\}\}$

Tétel Ha A, B tetszőleges halmazokra teljesül, hogy $A = B$, akkor $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.



4.5. ábra Gonvill and Caius College (Cambridge) épületének egyik ablaka. John Venn itt végezte középiskolai tanulmányait

Igaz a megfordítása is.

Tétel Ha A, B tetszőleges halmazokra teljesül, hogy $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.

Az előzőek alapján bevezetjük a **valódi részhalmaz** fogalmát.

Definíció Az A halmaz a B halmaz **valódi részhalmaza,** ha az A részhalmaza B-nek, de nem egyenlő vele. Jelölés: $A \subset B$. (Kiolvasás: A halmaz valódi részhalmaza B halmaznak.)
Jelölésekkel: Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor $A \subset B$.

Ez alapján: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

A részhalmaz definíciójából következik, hogy bármely halmaz részhalmaza önmagának ($A \subseteq A$), valamint az üres halmaz bármely halmaznak részhalmaza ($\varnothing \subseteq A$).

Mivel a természetes számok halmazának minden eleme eleme az egész számok halmazának, és az egész számok halmazának minden eleme eleme a racionális számok halmazának is, ezért a részhalmaz definíciója alapján a természetes számok halmaza részhalmaza a racionális számok halmazának. Ez az összefüggés a részhalmazfogalom egy fontos tulajdonsága, amit általánosan az alábbi módon fogalmazhatunk meg jelölésekkel.

Tétel Legyen az A, B, C halmaz olyan, hogy $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, ekkor $A \subseteq C$.

4.6. ábra A regényből készült filmváltozat is

2. példa Legyen az $A = \{$a három testőr$\}$! Határozzuk meg az A halmaz összes részhalmazát!

Mielőtt foglalkoznánk a feladat matematikai tartalmával, tegyünk egy kis irodalmi kitérőt! A három testőr című regény Alexandre Dumas (1802–1870) francia író romantikus kalandregénye, amely a XVII. század elején, XIII. Lajos uralkodása idején játszódik. A három testőr: Athos, Porthos és Aramis, akikhez negyedikként csatlakozik D'Artagnan. A későbbiekben őt is testőrré avatják. A mű annak idején akkora sikert aratott, hogy két folytatás is követte: a Húsz év múlva, majd a Bargelone vicomte, mely utóbbi már XIV. Lajos, a Napkirály uralkodásának első éveit eleveníti meg. Izgalmas olvasmányok, melyet mindenki számára jó szívvel ajánlunk.

Megjegyezzük, hogy ebben a korban élt egy méltán híres francia matematikus, fizikus Pierre Fermat (1601–1665), akinek a nevével még többször találkozunk.

Megoldás:

Először adjuk meg a halmaz elemeit: $A = \{$Athos(At.); Porthos(Po.); Aramis(Ar.)$\}$. Ha olyan problémát oldunk meg, akár a hétköznapi életben is, ahol fel kell sorolnunk adott tulajdonsággal rendelkező objektumokat, célszerű olyan módszert követni, amely alapján könnyen tudjuk ellenőrizni, hogy kihagytunk-e valamit a felsorolásból vagy sem. Most célszerű az elemszámok alapján számba venni a részhalmazokat. A korábbiak alapján az üres halmaz részhalmaza A-nak. Az egyelemű részhalmazok: {At.}, {Po.}, {Ar.}. Kételemű részhalmazok: {At.; Po.}, {At.; Ar.}, {Po.; Ar.}. Háromelemű részhalmazból csak egy van, az A halmaz. Így az A halmaz összes részhalmazának a száma: 8.

3. példa Legyen $B = \{$a négy testőr$\}$! Határozzuk meg a B halmaz összes részhalmazát! Keressünk kapcsolatot egy halmaz elemszáma és részhalmazainak a száma között!

Megoldás:

A B halmaz elemei: $B = \{$Athos(At.); Porthos(Po.); Aramis(Ar.); D'Artagnan (D.)$\}$. Az nyilvánvaló, hogy $A \subseteq B$, ezért a korábbiak alapján A összes részhalmaza részhalmaza B-nek is. Ez eddig 8 részhalmaz, melyeket az előző feladatban már felsoroltunk. Vegyük észre, hogy ezek és csak ezek a részhalmazok nem tartalmazzák D.-t! Most határozzuk meg azon részhalmazokat, amelyeknek eleme D.! Kövessük az előző feladatbeli logikát! Egyelemű halmaz: {D.}. Kételemű halmaz: {D.; At.}, {D.; Po.}, {D.; Ar.}, amelyeket megkaphatunk az előző feladatbeli egyelemű részhalmazokból, ha mindegyiket kételeművé egészítjük ki D. hozzávételével. Háromelemű halmazok: {At.; Po.; D.}, {At.; Ar.; D.}, {Ar.; Po.; D.}, amelyeket az előzőhöz hasonló módon kapunk a 2. példabeli kételemű részhalmazokból. Négyelemű halmaz: {At.; Po.; Ar.; D.}, amelyet az A halmazból kapunk D. hozzávételével. Ez újabb 8 részhalmaz, tehát a B halmaznak összesen $2 \cdot 8 = 16$ részhalmaza van.

Vegyük észre!

A 8 is, és a 16 is kettőhatvány, $8 = 2^3$ és $16 = 2^4$. Láttuk, hogy egy háromelemű halmaznak 2^3, egy négyelemű halmaznak 2^4 darab részhalmaza van. Így arra gondolhatunk, hogy egy n elemű halmaz részhalmazainak a száma 2^n

Tehát az új elem hozzávételével megkétszereződött a részhalmazok száma. A kétszereződés ténye független attól, hogy hány elemű halmazhoz vettük hozzá az új elemet. Felhasználva ezt a tényt és azt, hogy az üres halmaznak egy részhalmaza van – önmaga –, be lehet bizonyítani az alábbi állítást.

Tétel Az n elemű halmaz részhalmazainak a száma 2^n, ahol $n \in \mathbb{N}$.

4.7. ábra Pierre Fermat

***B* azon részhalmazai, melyek nem tartalmazzák D.-t**	
$\varnothing$	{At.}
{Po.}	{Ar.}
{At.; Po.}	{At.; Ar.}
{Ar.; Po.}	{At.; Po.; Ar.}
***B* azon részhalmazai, melyek tartalmazzák D.-t**	
{D.}	{D.; At.}
{D.; Po.}	{D.; Ar.}
{D.; At.; Po.}	{D.; At.; Ar.}
{D.; Ar.; Po.}	{D.; At.; Po.; Ar.}

4.8. ábra Rendszerezés

Oldjuk meg!

1. Legyen K = {a negyvenötnél kisebb, húsznál nagyobb egész számok}, $L = \{10x + y \mid x - y = 1$ és $y \in \{1,2,3\}\}$! Adjuk meg a két halmaz elemeit! Ábrázoljuk a két halmazt Venn-diagramon! Milyen kapcsolat van a két halmaz között?

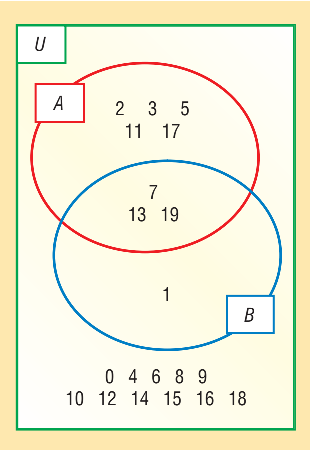
2. Az alábbi halmazok között vannak olyanok, amelyek közül az egyik részhalmaza a másiknak. Írjuk fel ezeket a kapcsolatokat!
a) A = {páros számok}, B = {12 pozitív többszörösei}, $C = \{0\}$
b) T = {trapézok}, D = {deltoidok}, R = {rombuszok}
c) T = {trapézok}, P = {paralelogrammák}, Q = {téglalapok}, N = {négyzetek}
d) C = {Csongrád megye városai}, M = {Magyarország települései}, L = {Szeged, Makó, Hódmezővásárhely, Orosháza, Debrecen}

3. Legyen H = {egyjegyű pozitív páratlan számok}! Hány olyan részhalmaza van, amelynek a 3 és az 5 közül legalább az egyik eleme?

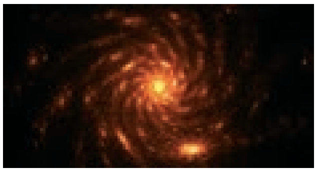
4. Legyen $A = \{5k - 2 \mid 2 < k < 8$ és $k \in \mathbb{N}\}$! Fogalmazzuk meg szavakkal az A halmaz megadási utasítását! Adjuk meg az A halmaz három- illetve kételemű részhalmazait!

5. Az alábbi intervallumok között találunk-e olyat, amely valamelyik másik itt szereplő intervallumnak a részhalmaza? Ha igen, írjuk fel azokat részhalmazjelöléssel!
a) $[-1; 3]$ b) $]-1; 4]$ c) $[0,6; 2,3[$ d) $]-2; 3]$ e) $[0; 2008]$

5. Műveletek halmazok között



5.1. ábra Az 1. példa



5.2. ábra Univerzum (részlet)

1. példa Legyen az $U = \{x \mid x < 20$ és $x \in \mathbb{N}\}$, A = {a 20-nál kisebb prímszámok}, $B = \{6k + 1 \mid k < 4$ és $k \in \mathbb{N}\}$! Adjuk meg a halmazok elemeit felsorolással! Ábrázoljuk a halmazokat Venn-diagramon!

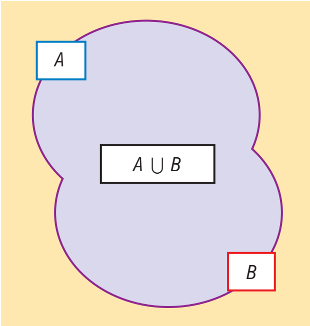
Megoldás:
Az U halmaz elemei a 20-nál kisebb természetes számok, azaz $U = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 19\}$. Az A halmaz elemei: $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$. A B halmaz elemei azok a 19-nél nem nagyobb pozitív egész számok, melyek hatos maradéka 1, így $B = \{1; 7; 13; 19\}$. Készítsük el a Venn-diagramot!

Amikor halmazokkal dolgozunk, akkor a vizsgált halmazok mind egy „nagy” halmaznak a részhalmazai. Ezt a halmazt **alaphalmaznak**, vagy **univerzumnak** nevezzük. Az előző példában az alaphalmaz az U halmaz. Az univerzumot általában is U betűvel jelöljük.

5.1. Unióképzés

2. példa Az első példában szereplő alaphalmaz elemeiből határozzuk meg azon elemek halmazát, amelyek prímszámok, **vagy** hatos maradékuk 1!

Megoldás:
A mondatban szereplő **vagy** kötőszó értelmezése szerint az U elemei közül azon elemek halmazát keressük, amelyekre a két feltétel közül legalább az egyik teljesül. A keresett halmaz: $\{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$. Tehát a keresett számok pontosan azok, amelyek az A, ill. a B halmaz közül legalább az egyiknek elemei. Az így kapott halmazt az A és B halmaz **unió**jának (egyesítésének) nevezzük, és $A \cup B$ (olv.: A unió B) szimbólummal jelöljük.



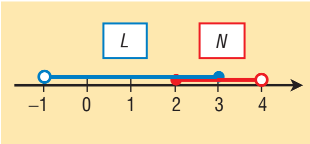
5.3. ábra Két halmaz uniója

Definíció Két halmaz **uniója** vagy egyesítése azon elemek halmaza, amelyek a két halmaz közül legalább az egyiknek elemei.
Jelölés: $A \cup B$ (A unió B).
Matematikai jelölésekkel leírva: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$.

Szemléltetése Venn-diagramon: 5.3 ábra.

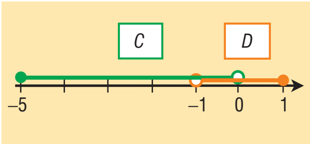
3. példa Ábrázoljuk számegyenesen az alábbi halmazokat, és határozzuk meg azok unióját!
a) $L = \{x \mid -1 < x \leq 3 \text{ és } x \in \mathbb{R}\}$, $N = [2;4[$
b) $C = \{$mínusz ötnél nem kisebb negatív valós számok$\}$, $D =]-1;1]$
c) $F = \{1\}$, $G =]1;3]$

Megoldás:
a) Az L halmaz intervallumos jelöléssel: $L =]-1;3]$. Így az L és az N halmaz a számegyenesen: 5.4. ábra.
Az ábráról könnyen leolvasható a két halmaz uniója: $L \cup N =]-1;4[$, azaz a -1, 4 mindkét oldalról nyitott intervallum.



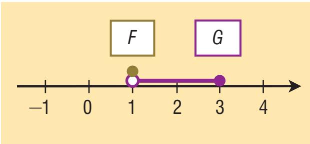
5.4. ábra $L \cup N$

b) A C halmaz az intervallumokra tanult jelöléssel: $C = [-5; 0[$. A két halmaz a számegyenesen: 5.5. ábra.
Az ábráról most is leolvasható a két halmaz uniója: $C \cup D = [-5; 1]$.

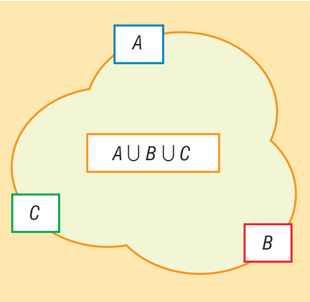


5.5. ábra $C \cup D$

c) A két halmaz uniója: $F \cup G = [1; 3]$.



5.6. ábra $F \cup G$



5.7. ábra Három halmaz uniója

Értelmezhetjük három, négy, öt, n db halmaz unióját is. Például három halmaz esetén: **három halmaz uniója azon elemek halmaza, amelyek a három halmaz közül legalább az egyik halmaznak elemei. Jelölés: $A \cup B \cup C$.**

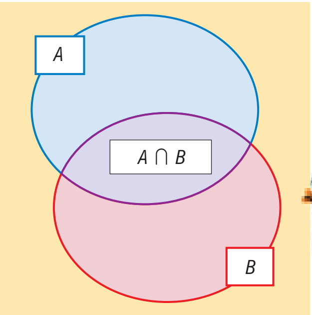
Szemléltetése Venn-diagramon: 5.7. ábra.
Az **unió** mint **halmazművelet** definícióból következő tulajdonságai tetszőleges A, B, C halmazokra:

- **$A \cup B = B \cup A$ (kommutatív művelet);**
- **$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociatív művelet);**
- **$A \cup A = A$;**
- **$A \cup \varnothing = A$.**

5.2. Metszetképzés

4. példa Az első példában szereplő alaphalmaz elemei közül határozzuk meg azon prímek halmazát, amelyek hatos maradéka 1!

Megoldás:
A feladatot úgy is megfogalmazhatnánk, hogy az alaphalmazból azon számok halmazát keressük, melyekre teljesül, hogy prímek **és** a hatos maradékuk 1. Az **és** kötőszó értelmezése szerint a két tulajdonságnak egyszerre kell teljesülnie. A keresett halmaz: {7; 13; 19}. Ennek a halmaznak pontosan azok a számok az elemei, amelyek az A és a B halmaz mindegyikének elemei. Ezt a halmazt az A és B halmaz metszetének nevezzük, és $A \cap B$ (olvasd: A metszet B) szimbólummal jelöljük.

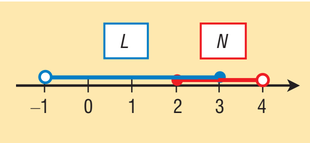


5.8. ábra Két halmaz metszete

Definíció Két halmaz **metszete** azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei. Jelölés: $A \cap B$ (A metszet B). Matematikai jelölésekkel leírva: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$.

Szemléltetése Venn-diagramon: 5.8. ábra.

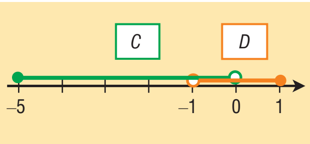
5. példa Határozzuk meg a 3. példában szereplő halmazok metszetét!



5.9. ábra 5. a) példa

Megoldás:
a) Az 5.9. ábráról leolvasható, hogy $L \cap N = [2;3]$.

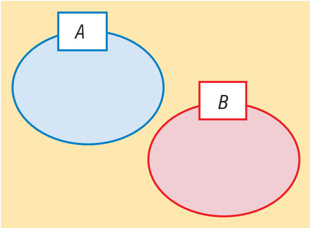
b) Az 5.10. ábráról leolvasható, hogy $C \cap D =]-1;0[$.



5.10. ábra 5. b) példa

c) Az $F = \{1\}$ és $G =]1;3]$, tehát a két halmaznak nincs közös eleme. Ekkor a két halmaz metszete üres halmaz, azaz $F \cap G = \varnothing$. Ha két halmaz között ilyen kapcsolat áll fenn, akkor a két halmazt **diszjunkt**nak nevezzük.

Definíció Két halmaz **diszjunkt,** ha nincs közös elemük, azaz metszetük üres halmaz. Jelölés: $A \cap B = \varnothing$.

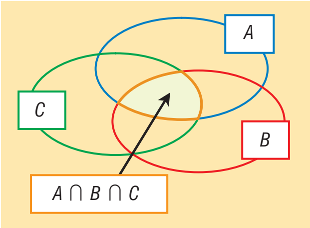


5.11. ábra Diszjunkt halmazok

Értelmezhetjük három, négy, öt, stb. n db halmaz metszetét is. Például három halmaz esetén:

három halmaz metszete azon elemek halmaza, amelyek mindhárom halmaznak elemei. Jelölés: $A \cap B \cap C$.

Szemléltetése Venn-diagramon: 5.12. ábra.



5.12. ábra Három halmaz metszete

A **metszet** mint **halmazművelet** definícióból következő tulajdonságai tetszőleges *A*, *B*, *C* halmazokra:

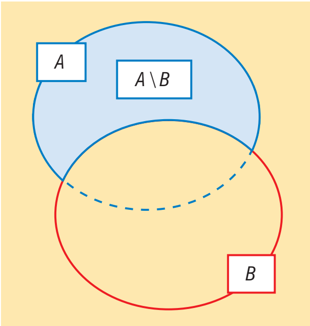
- $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$ **(kommutatív művelet),**
- $\boldsymbol{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$ **(asszociatív művelet),**
- $\boldsymbol{A \cap A = A}$**,**
- $\boldsymbol{A \cap \varnothing = \varnothing}$**.**

5.3. Különbségképzés

6. példa Az 1. példában szereplő alaphalmazból határozzuk meg azon prímszámok halmazát, amelyek hatos maradéka nem 1!

Megoldás:
A keresett számok az *A* halmaznak elemei, de a *B*-nek nem. Ezt a halmazt *A* különbség *B* halmaznak nevezzük és $A \setminus B$ (olvasd: *A* különbség *B*) szimbólummal jelöljük. Tehát $A \setminus B = \{2; 3; 5; 11; 17\}$.

Definíció Az *A* és *B* halmaz **különbsége** azon elemek halmaza, amelyek az *A* halmaznak elemei, de a *B*-nek nem. Jelölés: $A \setminus B$ (*A* különbség *B*).
Matematikai jelekkel: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$.



5.13. ábra Az $A \setminus B$ szemléltetése Venn-diagramon

Szemléltetése Venn-diagramon: 5.13. ábra.

7. példa Határozzuk meg a harmadik példában szereplő halmazok esetén az alábbi műveletek eredményét!
a) $N \setminus L$ b) $C \setminus D$ c) $F \setminus G$

Megoldás:
Használjuk fel a 3. és 5. példa megoldásában szereplő ábrákat és a különbséghalmaz definícióját.
a) $N \setminus L =]3;4[$ b) $C \setminus D = [-5;-1]$ c) $F \setminus G = \{1\}$

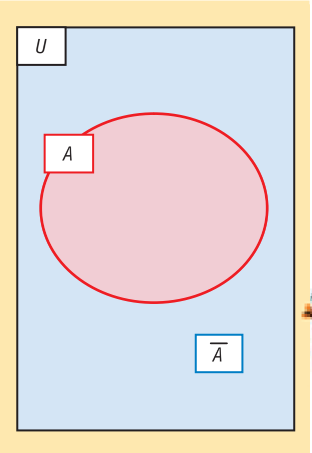
5.14. ábra]3;4[

A **különbség** mint **halmazművelet** definícióból következő tulajdonságai tetszőleges A halmazra:

- $\boldsymbol{A \setminus A = \varnothing}$,
- $\boldsymbol{A \setminus \varnothing = A}$,
- $\boldsymbol{\varnothing \setminus A = \varnothing}$.

5.4. Komplementer halmaz

8. példa Az 1. példában szereplő alaphalmazban adjuk meg azon számok halmazát, melyek nem prímszámok!



5.15. ábra Komplementer halmaz

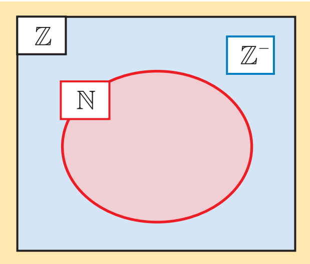
Megoldás:
Mivel az A halmaz az 1. példában a prímszámok halmaza, ezért a megoldás az alaphalmaznak azon részhalmaza, amelynek elemei az A-nak nem elemei. Ezt úgy adhatjuk meg, hogy $U \setminus A = \{0; 1; 2; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18\}$. Mivel az A halmazt ez a halmaz egészíti ki az U halmazzá, ezért az A halmaz kiegészítő vagy **komplementer halmazá**nak nevezzük.

Definíció Adott az U alaphalmaz, amelynek az A halmaz részhalmaza. Az $U \setminus A$ halmazt az A halmaz **komplementer halmazának** nevezzük.
Jelölés: $\overline{A}$ (A komplementer halmaza).

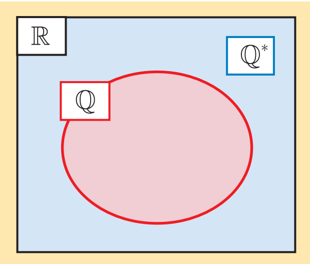
Szemléltetése Venn-diagramon: 5.15. ábra.

9. példa Határozzuk meg az A halmaz komplementerét a megadott U alaphalmazra nézve!

a) $A = \mathbb{N}$, $U = \mathbb{Z}$ b) $A = \mathbb{Q}$, $U = \mathbb{R}$
c) $A = \mathbb{R}^-$, $U = \mathbb{R}$ d) $A = [-2;1[$, $U = [-3;2[$



5.16. ábra $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$



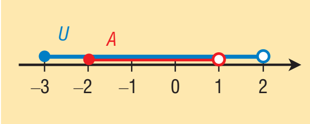
5.17. ábra $\mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Megoldás:
a) Alkalmazzuk a komplementer halmaz definícióját! Ez alapján $\overline{A} = U \setminus A = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Ez azt jelenti, hogy az egész számok halmazából elhagyjuk a természetes számok halmazát. Ezzel a negatív egész számok halmazát kapjuk. Tehát $\overline{A} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{Z}^-$.

b) Természetesen itt is a definíciót alkalmazzuk. Így $\overline{A} = U \setminus A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ebben az esetben azt a halmazt keressük, amely a racionális számok halmazát kiegészíti a valós számok halmazává, ez az irracionális számok halmaza. Tehát $\overline{A} = \mathbb{Q}^*$.

c) Az előző megfontolásokat alkalmazva kapjuk, hogy $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$. Ez a nemnegatív valós számok halmaza, amelyet úgy is jelölhetünk, hogy $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ vagy $\mathbb{R}_0^+$.

d) Ábrázoljuk számegyenesen a megadott intervallumokat!
A keresett halmaz az 5.18. ábráról leolvasható.
$\overline{A} = [-3; 2[\setminus [-2; 1[= [-3; -2[\cup [1; 2[$



5.18. ábra $\overline{A} = [-3; -2[\cup [1; 2[$

10. példa Határozzuk meg az alábbi halmazokat, ha az alaphalmaz U, és A részhalmaza U-nak!

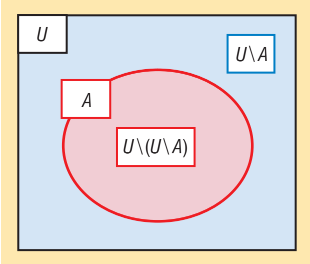
a) $\overline{U}$ b) $\overline{\overline{A}}$ c) $\overline{\varnothing}$

Megoldás:
Mindhárom esetben használjuk a definíciót és a különbségképzés tulajdonságait, ha szükséges!

a) $\overline{U} = U \setminus U = \varnothing$, a különbségképzés első műveleti tulajdonsága alapján.

b) $\overline{\overline{A}} = U \setminus \overline{A} = U \setminus (U \setminus A)$, azaz az U halmazból kivonjuk az A halmaz komplementer halmazát, vagyis az A-t kapjuk. Tehát az A halmaz komplementer halmazának a komplementer halmaza az A halmaz.

c) $\overline{\varnothing} = U \setminus \varnothing = U$, felhasználtuk a különbségképzés második műveleti tulajdonságát.



5.19. ábra $\overline{\overline{A}} = U \setminus (U \setminus A) = A$

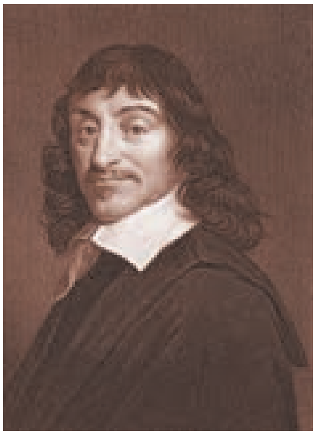
5.5. Halmazok Descartes-szorzata (Kiegészítő anyag)

11. példa Legyen az $A = \{1; 2; 3\}$ és $B = \{4; 5\}$. Hány darab olyan kétjegyű szám képezhető, amelynek az első számjegye az A, a második számjegye a B halmazból való? Adjuk meg ezeket a számokat!

Megoldás:
Mivel az első számjegyet három szám közül választhatjuk, a másodikat pedig kettő közül, így összesen 6 db ilyen szám képezhető. Ezek: 14, 15, 24, 25, 34, 35.

Ezt a problémát felfoghatjuk úgy is, mintha úgynevezett **rendezett számpárokat** képeznénk, melyeknek az első tagját az A, a másodikat a B halmazból vennénk. A rendezett párokat az alábbi módon jelöljük: (1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5).

Az ezekből a rendezett párokból képezett halmazt az A és B halmaz Descartes-szorzatának vagy direkt szorzatának nevezzük. Jelölés: $A \times B$ (olvasd A kereszt B). Tehát $A \times B = \{(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5)\}$.


5.20. ábra René Descartes (1596–1650) francia filozófus, matematikus, fizikus. Bővebben: http://hu.wikipedia.org

Halmazok

Definíció Az A és B halmazok **direkt-** vagy **Descartes-szorzatán** az összes olyan $(a; b)$ rendezett párok halmazát értjük, melyekre $a \in A$ és $b \in B$. A **rendezettség** azt jelenti, hogy a páron belül az A elemét tekintjük elsőnek, a B elemét másodiknak.
Jelölés: $A \times B$ (olvasd A kereszt B).
Röviden: $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg az $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$ halmazokat! (Ha szükséges, használjunk internetet!)

a) $A = \{$30-nál kisebb kétjegyű pozitív páros számok$\}$, $B = \{3k \mid 3 < k < 10$ és $k \in \mathbb{N}\}$, $U = \{x \mid x < 30$ és $x \in \mathbb{N}\}$

b) $A = \{$az érettségi szó betűi$\}$, $B = \{$a vizsga szó betűi$\}$, $U = \{$a magyar ábécé$\}$

c) $A = \{$a százezernél nagyobb lélekszámú magyar városok$\}$, $B = \{$a magyar megyeszékhelyek$\}$, $U = \{$megyei jogú magyar városok$\}$

d) $A = \{$számjegyek$\}$, $B = \{$egy dobókockával dobható számok$\}$, $U = \{$10-nél kisebb természetes számok$\}$

e) $A = \{6j + 2 \mid 0 < j < 10$ és $j \in \mathbb{N}\}$, $B = \{$a három hatvannál kisebb pozitív többszörösei$\}$, $U = \{$az 59-nél nem nagyobb természetes számok$\}$

f) $A = [-4; 3]$, $B =]-1; 4]$, $U = [-5; 5]$

g) $A = \{$Ady Endre születési évszámában előforduló számjegyek$\}$, $B = \{$Vörösmarty Mihály születési évszámában előforduló számjegyek$\}$, $U = \{$a XIX. század összes évszámában előforduló számjegyek$\}$

2. Legyen $A = \{1; 2; 3; 6; 7\}$, $B = \{2; 5; 7; 9; 10\}$, $U = \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$! Ábrázoljuk Venn-diagramon az A, B és U halmazt! Határozzuk meg az alábbi halmazokat!

a) $A \setminus B$ b) $\overline{B} \cap B$ c) $(A \cup B) \setminus \overline{A}$ d) $A \cup (B \setminus \overline{A})$ e) $U \setminus (A \cup B)$ f) $(U \setminus A) \cap B$ g) $\overline{A} \cap \overline{B}$ h) $(A \cap \overline{A}) \setminus B$ i) $A \cap (\overline{A} \setminus B)$ j) $(A \setminus U) \cap B$ k) $B \cap U$ l) $\overline{A \setminus B}$ m) $\overline{\overline{A} \cup B}$

3. Legyen az $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{2; 3; 4; 7; 8; 10\}$, $C = \{0; 1; 3; 4; 5; 7; 9\}$! Határozzuk meg az alábbi halmazokat! Ábrázoljuk Venn-diagramon a halmazokat! Melyek egyenlők ezek közül a halmazok közül? (A kapott egyenlőségek általánosan is teljesülnek, ezek a műveletek **disztributív** tulajdonságai.)

a) $(A \cap B) \cup C$ b) $(A \cup B) \cap C$ c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ d) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. Legyen $A = \{10; 15; 16; 18; 19\}$, $B = \{10; 11; 14; 15; 17; 19\}$, $U = \{$a 10-nél nem kisebb, 20-nál kisebb pozitív egész számok$\}$! Határozzuk meg az alábbi halmazokat! Ábrázoljuk Venn-diagramon a halmazokat! Melyek egyenlők ezek közül a halmazok közül? (A kapott egyenlőségek általánosan is teljesülnek, ezek a **De Morgan-azonosságok.**)

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$ b) $\overline{A} \cup \overline{B}$ c) $\overline{A \cup B}$ d) $\overline{A \cap B}$

5. Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha tudjuk, hogy

a) $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 10\}$, $A \setminus B = \{2; 3\}$, $A \cap B = \{4; 10\}$!

b) $A \cup B = \{$10-nél kisebb pozitív egész számok$\}$, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1; 2; 9\}$, $A \setminus B = \{1\}$!

6. Határozzuk meg az A, B, C halmazokat, ha az alábbiak teljesülnek: $A \cup B \cup C = \{$10-nél kisebb pozitív egész számok$\}$, $(A \cap B) \setminus C = \{2; 3\}$, $(A \setminus B) \cap C = \{4\}$, $(C \setminus A) \cap (B \setminus A) = \{6\}$, $A \cap B \cap C = \{5; 7\}$, $|C| = 4$, $|A| = 5$!

7. Adjuk meg az $A \times B$ halmaz elemeit, ha $A = \{1; 2; 3; 4\}$ és $B = \{3; 4; 5\}$!

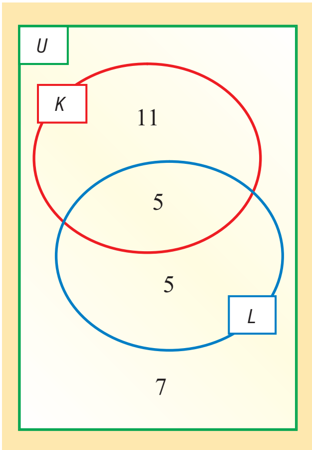
6. Logikai szita, egyszerű összeszámlálások

1. példa Egy 28 fős osztály az egyik osztálykirándulás alkalmával tejivóban vacsorázott. Tízen ettek lekváros palacsintát, tizenhatan kakaósat, és öten mindkét fajtából fogyasztottak. Akik nem akartak palacsintát vacsorázni, omlettet kértek. Hányan ettek csak egy fajta palacsintát? Hányan ettek omlettet?

6.1. ábra Vacsora a tejivóban

Megoldás:
Az alaphalmaz az osztályba járó tanulók halmaza, ennek az elemszáma 28. Legyen K azon diákok halmaza, akik ettek kakaós palacsintát, L azon diákok halmaza, akik ettek lekváros palacsintát! A K halmaz elemszáma $|K| = 16$, az L halmazé $|L|=10$. Mivel öten ettek mindkét fajtából, ezért csak kakaós palacsintát $16 - 5 = 11$ fő vacsorázott, és csak lekvárosat $10 - 5 = 5$ fő. Így csak egyik fajtát 16-an ettek. Tehát a palacsintát vacsorázók száma, azaz akik legalább az egyik fajtából ettek: $5 + 5 + 11 = 21$.
Ez a $K \cup L$ elemszáma.
Mivel az osztály 28 fős, ezért $28 - 21 = 7$ tanuló evett omlettet.

Most adjuk össze az L és a K halmaz elemszámát! Ekkor kapjuk, hogy $|K| + |L| = 16 + 10 = 26$, ami öttel több, mint azok száma, akik legalább az egyik fajta palacsintából ettek, azaz mint a $K \cup L$ elemszáma. Vajon mi ennek az oka? Készítsünk egy halmazábrát, ahova beírjuk az egyes elemszámokat!



6.2. ábra A Venn-diagramon szereplő számok az egyes halmazok elemszámát jelentik

Ha összeadjuk a K és az L elemszámát, akkor a metszetben levő elemeket kétszer számoljuk, ezért lesz öttel több a $|K| + |L|$, mint a $|K \cup L|$. Ezt figyelembe véve már könnyedén felírhatjuk a két halmaz uniójának elemszámát, a két halmaz elemszáma és a metszet elemszáma segítségével.

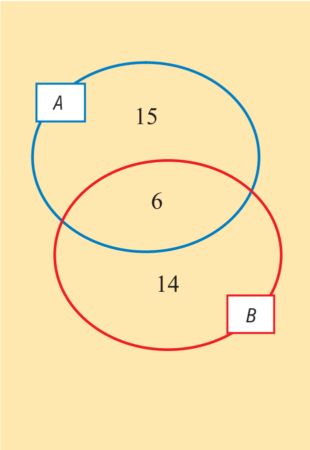
$$|K \cup L| = |K| + |L| - |K \cap L|$$

Ez a két halmazra felírt **logikai szita formula**.

2. példa Egy osztály tanulóinak 60%-a közepesnél nem rosszabb dolgozatot írt matematikából, negyheted része pedig közepesnél nem jobbat, és mindenki írt dolgozatot. Hány tanulója van az osztálynak, ha hármas dolgozatot hatan írtak? Hányan írtak legalább négyes dolgozatot?

6.3. ábra Matematikadolgozat

Megoldás:
Ebben a feladatban is az osztály az alaphalmaz. Elemszáma legyen: $|U| = x$! A közepesnél nem rosszabb dolgozatot írók halmaza legyen A, elemszáma a feladat szövege alapján $|A| = 0{,}6x$! A közepesnél nem



6.4. ábra Szemléltetés Venn-diagramon

jobb dolgozatot írók halmaza B, a halmaz elemszáma $|B| = \frac{4}{7}x$. Mivel mindenki írt dolgozatot, ezért $U = A \cup B$, így az A és B halmaz uniójának elemszámát kell meghatározni. Használjuk fel a szita formulát és azt, hogy $|A \cap B| = 6$! Az $A \cap B$ halmaz a közepes tanulók halmaza. Ez alapján írhatjuk, hogy $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, azaz $x = 0{,}6x + \frac{4}{7}x - 6$. Ebből $x = \frac{41}{35}x - 6$, vagyis $\frac{6}{35}x = 6$, $x = 35$. Az osztály tehát 35 fős. Ennek a 60%-a legalább közepes, ami $35 \cdot 0{,}6 = 21$ fő. Ebből pedig legalább négyes dolgozatot $21 - 6 = 15$ fő írt.

3. példa Hány darab 100-nál kisebb pozitív egész szám van, amely a 3 és az 5 közül
a) legalább az egyikkel,
b) pontosan az egyikkel,
c) egyikkel sem osztható?

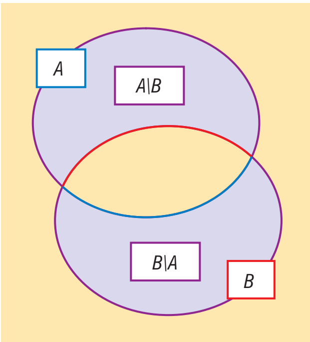
Megoldás:
Az univerzum a 100-nál kisebb pozitív egész számok halmaza, az A halmaz a közülük 3-mal osztható, a B halmaz a közülük 5-tel osztható számok halmaza. Legalább az egyikkel osztható számok halmaza az $A \cup B$, az egyikkel sem az $\overline{A \cup B} = U \setminus (A \cup B)$. A pontosan az egyikkel osztható számok halmaza azt jelenti, hogy vagy hárommal osztható, de öttel nem, vagy öttel osztható, de hárommal nem. Az első az $A \setminus B$ halmaz, a második a $B \setminus A$ halmaz. A b) feladatnak megfelelő halmaz az $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmaz. Ezt szokás **szimmetrikus differenciának** is nevezni, és az $\boldsymbol{A \,\Delta\, B}$ **(olvasd: *A* delta *B*)** szimbólummal jelöljük. A fent említett halmazok elemszáma adja meg a keresett értékeket.

a) Használjuk megint a logikai szitát!
Először határozzuk meg az $|A|$, a $|B|$ és az $|A \cap B|$ értékeket! Az első esetben azt kell megszámolni, hogy hány 3-mal osztható pozitív egész szám van 99-ig. Mivel 1-től kezdve minden harmadik szám osztható 3-mal, ezért $|A| = 99 : 3 = 33$. A $|B|$ meghatározásánál hasonlóképpen járunk el, azaz megnézzük, hogy hány öttel osztható, 100-nál kisebb pozitív egész szám van. Tehát $|B| = 19$. Az $A \cap B$ halmaz a hárommal és öttel, azaz a tizenöttel osztható pozitív egész számok halmaz 99-ig. Ennek az elemszámát az előzőekhez hasonlóan határozhatjuk meg: $|A \cap B| = 6$. Tehát $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 19 - 6 = 46$.

b) Ennek meghatározásához készítsünk halmazábrát!
A 6.5. ábrán látható, hogy az $A \setminus B$ elemszámát megkapjuk, ha az A elemszámából kivonjuk az $A \cap B$ elemszámát, azaz $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 27$.
Hasonlóan $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B| = 13$. Tehát a keresett érték: $|A \,\Delta\, B| = 40$.

c) Ez már könnyen kiszámolható:

$$|\overline{A \cup B}| = |U \setminus (A \cup B)| = |U| - |A \cup B| = 99 - 46 = 43.$$



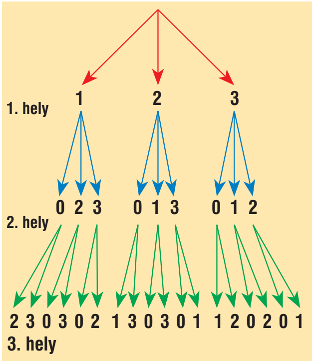
6.5. ábra A szimmetrikus differencia Venn-diagramon

Két halmazra már ismerjük a szita formulát. Nyilvánvaló kérdés, hogy három halmazra is felírhatunk-e ilyen összefüggést. Gondoljuk végig, hogyan kaphatjuk meg három halmaz uniójának az elemszámát! Ha összeadjuk a három halmaz elemszámát, akkor a kettős metszetekét kétszer, a hármas metszetét háromszor számoljuk, ezért az előző összegből vonjuk le a kettős metszetek elemszámát! Ekkor viszont kinulláztuk a hármas metszetet, mert az mindegyik kettős metszetben benne van. Annak érdekében, hogy helyre álljon a rend, adjuk hozzá ennek az elemszámát. Így kapjuk, hogy:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

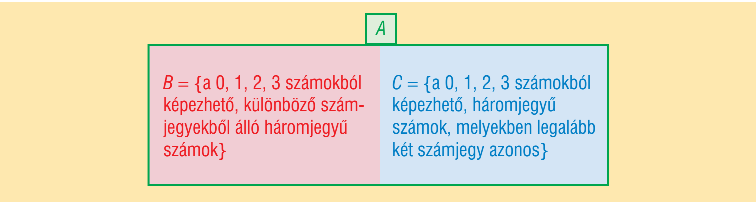
6.6. ábra Egy 30 fős osztályból 14-en vettek részt az iskola által szervezett római kiránduláson, 10-en a sítáborban és 14-en a görögországi nyaraláson. Hányan voltak az osztályból pontosan két kiránduláson, ha mindháromra 3-an mentek el, és csak ketten voltak olyanok, akik egyiken sem vettek részt?

4. Példa Legyen $A = \{$A 0, 1, 2, 3, számjegyek felhasználásával képezhető háromjegyű számok$\}$!
a) Hány elemű az A halmaz?
b) Hány olyan eleme van az A halmaznak, amelynek minden számjegye különböző?
c) Hány olyan eleme van, amelyben legalább két számjegy egyenlő?

Megoldás:
a) Mivel a felsorolt számjegyekből háromjegyű számokat kell képeznünk, ezért az első helyen nem szerepelhet a 0, csak a többi számjegy. Ezért az első helyre 3 számjegy közül választhatunk. A három közül akármelyiket is írjuk az első helyre, a másodikra négy számjegy közül választhatunk, mert ott már szerepelhet a 0. Mivel a harmadik helyen is lehet 0, így oda is négy számjegy közül választhatunk. Ez összesen $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ szám, így $|A| = 48$.
b) Ebben az esetben is három számjegy közül választhatunk az első helyre. A második helyre már írhatjuk a nullát, de azt nem, ami az első helyen szerepel. Így ide is három számjegy közül választhatunk. Az utolsó helyen már csak két számjegy szerepelhet, mert azt a kettőt nem írhatjuk, amit az első két helyre írtunk. Ez összesen $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ darab szám. Az összeszámlálást az ábra teszi szemléletessé. Ilyen ábra az a) részhez is készíthető, ezt az olvasóra bízzuk. (6.7. ábra)
c) Első olvasatra nehéznek tűnik a probléma, de némi gondolkodás után rájöhetünk, hogy az A halmazban szereplő szám vagy olyan, amelynek minden számjegye különböző, vagy olyan, amelyben van legalább két egyenlő számjegy. Így az utóbbiak számát megkapjuk, ha az A elemszámából kivonjuk, a b) részben megkapott értéket. Így $48 - 18 = 30$ olyan eleme van az A halmaznak, amelynek legalább két számjegye egyenlő. (6.8. ábra)



6.7. ábra A b) rész megoldásának szemléltetése



6.8. ábra $A = B \cup C$ és $B \cap C = \varnothing$, ezért $C = A \setminus B$. $|C| = |A| - |B|$.

Oldjuk meg!

1. Egy 30 fős osztály tanulóinak a $\frac{2}{5}$ része matematika, $\frac{2}{3}$ része fizika szakkörre jár. Hányan járnak mindkét szakkörre?

2. Egy osztály tanulóinak az 50%-a közepesnél nem jobb, míg a $\frac{4}{5}$ része közepesnél nem rosszabb dolgozatot írt. Hányan járnak az osztályba, ha a dolgozatírásnál senki sem hiányzott, és közepesnél rosszabb dolgozatot hatan írtak? Hányan írtak közepes dolgozatot?

3. A strandon a lángossütőnél a sima lángos 180 Ft, a tejfölös 220 Ft, a sajtos 240 Ft, a sajtos-tejfölös 380 Ft. Egy alkalommal az árus összeszámolta, hogy az utolsó két órában a 30 vásárlóból 8-an kértek sajtot és tejfölt a lángosra, 18 olyan vásárló volt, aki kért rá tejfölt, és 15 olyan, aki sajtot. Mennyi bevétele származott a lángosokból az árusnak ebben a két órában?

6.9. ábra Itt a finom sajtos lángos

4. Egy osztály 35 tanulójából mindenki tanul valamilyen nyelvet a választható angol, német, spanyol nyelvek közül. Pontosan két nyelvet 8 tanuló választott. Ebből hatan tanulnak angolt, és mindössze egy választotta mellé a spanyolt. Három nyelvet feleannyian tanulnak, mint kettőt. Az angolul tanulók száma egyenlő a legalább két nyelvet tanulók számának a kétszeresével. Csak németet feleannyian tanulnak, mint csak angolt. Melyik nyelvet hányan tanulják? Készíts Venn-diagramot, ahova írd be a megfelelő elemszámokat!

5. Egy 30 fős osztályban három szakkörre járnak: matematikára, fizikára és kémiára. Minden diák jár valamelyik szakkörre. Tudjuk, hogy matematikára 14-en, fizikára 15-en, kémiára 11-en járnak. A pontosan két szakkörre járók száma: 6. Hány olyan diák van, aki mindhárom szakkörre jár?

6. Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely a 2 és a 7 számok közül legalább az egyikkel osztható? Hány olyan van, amely pontosan az egyikkel osztható? Hány olyan van, amely egyikkel sem?

7. Az első ötszáz pozitív egész szám között hány olyan van, amely a 2, 3, 5 számok közül
a) pontosan kettővel,
b) pontosan az egyikkel,
c) legalább az egyikkel,
d) egyikkel sem osztható?

8. Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymásután és a dobások eredményét leírjuk egymás mellé. Hány ötjegyű számot kaphatunk így? Ezek között hány olyan van, amelyben nem szerepel az 1-es számjegy? Hány olyan van köztük, amelyben legalább egyszer szerepel az 5-ös számjegy?

9. A 6-nál nem nagyobb számjegyekből hány olyan hatjegyű szám képezhető, amelyben egy számjegy csak egyszer szerepel? Ezek közül hány osztható öttel?

10. Egy számzáron négy forgatható korong van egymás mellett egy tengelyen. Minden korongon 0-9-ig szerepelnek számjegyek. A zár a korongok egy adott állása esetén nyílik, azaz amikor egy meghatározott számnégyes jegyei az első korong mellett található piros nyíllal egy sorban vannak. Mennyi idő alatt lehet kipróbálni az összes lehetőséget, ha egynek a beállítása 4 másodpercet vesz igénybe?

11. Hány olyan 4 jegyű pozitív egész szám van, amelyben a 4-es és az 5-ös számjegyek közül
a) legalább az egyik, b) mindkettő szerepel?

II. fejezet

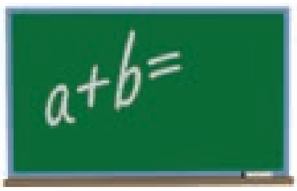
Algebra, számelmélet

Hiszáb al-dzsabr va l-mukábala

Az elmélkedés örök!

Algebra, számelmélet

1. Betűs kifejezések a matematikában



1.1. ábra A matematikai jelölésrendszer egy része egyszerű és közismert

Nagyon fontos a matematikában a következetes jelölésrendszer kidolgozása, a betűs kifejezések használata. Ezek segítségével egyszerűbben megfogalmazhatók a problémák, és könnyebben leírhatók a megoldások. A halmazok kapcsán számos példát láthattunk erre. Ezen a téren tovább bővítjük kelléktárunkat. Az *Algebra, számelmélet* című fejezetben megismerkedünk betűs kifejezések közötti műveletekkel, a matematika szinte minden területén nélkülözhetetlen azonosságokkal, szorzattá alakítási módszerekkel és ezek legkülönfélébb alkalmazásaival. Első lépésként nézzünk néhány példát betűs kifejezések megadására és alkalmazására!

1. példa Melyik az a legnagyobb egész szám, amellyel bármely három egymást követő egész szám összege osztható?

Megoldás:

Az ilyen problémáknál fontos a konkrét példák tanulmányozása. Számoljuk ki néhány esetben három egymást követő egész szám összegét!

$1+2+3=6, \quad 2+3+4=9, \quad 6+7+8=21,$

$(-8)+(-9)+(-10)=-27, \quad (-17)+(-18)+(-19)=-54$ stb.

A kapott összegek: 6, 9, 21, –27, –54. Ha megvizsgáljuk e számokat, észrevehetjük, hogy mindegyik osztható 3-mal. Ez alapján a következő sejtést fogalmazhatjuk meg:

bármely három egymást követő egész szám összege osztható 3-mal.

A következő lépés az, hogy megpróbáljuk bizonyítani a sejtésünket. Ennek során először általánosan kell megadnunk három egymást követő egész számot. Ezt többféleképpen is megtehetjük.

A legkézenfekvőbb, hogy a legkisebbet n-nel, a következőt $n+1$-gyel, a legnagyobbat $n+2$-vel jelöljük, ahol az n egész szám, azaz $n \in \mathbb{Z}$.

További lehetőségek például:
- $k-1$, k, $k+1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$
- $m-2$, $m-1$, m, ahol $m \in \mathbb{Z}$

Ha több lehetőség is van a jelölésre, akkor mindig azt célszerű használni, amelyikkel egyszerűbb a további munka.

Mivel három szám összegét kell vennünk, ezért célszerű a $k-1$, k, $k+1$ változatot használni, mert ezeket összeadva a –1 és a +1 összege nulla. Tehát azt kapjuk, hogy $k-1+k+k+1=k+k+k=3k$. Itt k egész szám, ezért a $3k$ osztható 3-mal. Ezt kellett bizonyítani. Ezzel a sejtésünk tétellé vált.

1.2. ábra A matematika nem varázslat

Tétel Bármely három egymást követő egész szám összege osztható 3-mal.

Ez a legnagyobb ilyen szám, mivel $0+1+2=3$.

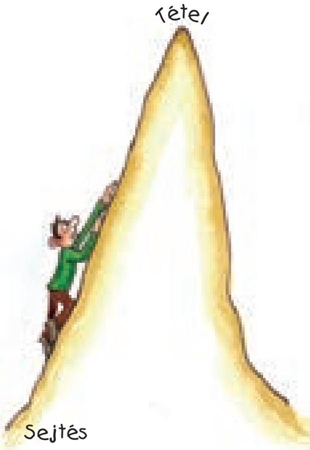
MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 44 2012.06.25. 14:10:21

Érdemes megvizsgálni, hogy mit kaptunk volna összegként, ha a másik két jelöléssel dolgozunk.

Például az első esetben: $n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$. Természetesen ez is osztható 3-mal, mivel a $3n$ $(n \in \mathbb{Z})$ egy egész szám háromszorosa, és ehhez 3-at hozzáadva továbbra is 3-mal osztható számot kapunk.

Az 1. példa azért tűnhetett nehéznek, mert nekünk kellett észrevenni valami összefüggést, azaz egy sejtést kellett megfogalmaznunk.

A matematika feladatok jelentős részének megoldásánál nagyon fontos egy-egy sejtés megfogalmazása és annak bizonyítása. Ha sikerül igazolni, akkor onnantól kezdve kezelhetjük tételként. Ha nem, akkor lehet, hogy a sejtés volt helytelen, de az is, hogy nem vagyunk elég ügyesek a bizonyításhoz. Sok olyan sejtés létezik a matematikában, amelyet hosszú ideig – akár évszázadokon keresztül – nem sikerült igazolni. Olyanokat is találunk, amelyeket még máig sem bizonyítottak. Ezek közül néhányról a későbbiekben még lesz szó. A sejtések a matematika fejlődése szempontjából nagyon fontos szerepet töltenek be, mert a bizonyításukra való törekvések megnyithatják az utat a tudomány új területei felé. Erre számos példa található a matematika történetében.



1.3. ábra Egy nehéz feladat

2. példa Négy egymást követő egész szám összege osztható-e néggyel? Ha nem, mennyi a négyes maradéka?

Megoldás:

Először megint próbálkozzunk!

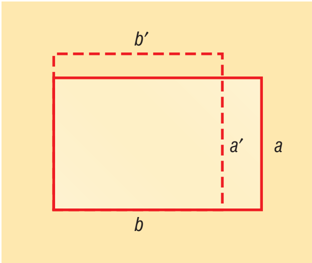
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$: nem osztható, $3 + 4 + 5 + 6 = 18$: nem osztható, $-12 + (-11) + (-10) + (-9) = -34$: nem osztható stb.

Azt tapasztaljuk, hogy nem osztható néggyel, sőt mindegyik összegnek 2 a négyes maradéka. Vizsgálódjunk általánosan!

Használjunk az előzőhöz hasonló jelölést! Legyen a legkisebb szám $j - 1$. Így a négy egymást követő egész szám: $j-1$, j, $j+1$, $j+2$, ahol $j \in \mathbb{Z}$. Adjuk össze a négy számot: $(j-1)+j+(j+1)+(j+2) = j-1+j+j+1+j+2 = 4j+2$, ahol $j \in \mathbb{Z}$. Visszagondolva a halmazok megadásánál tanult formulákra, ez azt jelenti, hogy a kapott szám négyes maradéka 2. Tehát bebizonyítottuk az alábbi állítást.

Tétel Bármely négy egymást követő egész szám összege néggyel osztva 2-t ad maradékul.

3. példa Egy téglalap szomszédos oldalai *a* és *b* hosszúságúak. Az *a* hosszúságú oldalakat 20%-kal növeljük, a *b* hosszúságúakat ugyanennyivel csökkentjük. Fejezzük ki *a* és *b* segítségével, hogy mennyivel változik a téglalap kerülete és területe! Ha lehet, akkor mondjuk meg, hogy ez hány százalékos változás!



1.4. ábra Készítsünk rajzot!

1.5. ábra Átalakítás

1.6. ábra Egy határozatlan ember

Megoldás:
Mivel a téglalap két-két szemközti oldala egyenlő, ezért a kerülete: $k = 2 \cdot a + 2 \cdot b$. A területe, mint azt általános iskolából már ismerjük, $t = a \cdot b$, ahol mindkét esetben a és b pozitív valós szám, azaz $a, b \in \mathbb{R}^+$. Jelöljük az új téglalap megfelelő oldalait a'-vel és b'-vel! Nézzük a feladat szövegének matematikai jelekkel való megfogalmazását!

az a oldalt 20%-kal növeljük:	$a' = a + 0{,}2 \cdot a = 1{,}2 \cdot a$
a b oldalt 20%-kal csökkentjük:	$b' = b - 0{,}2 \cdot b = 0{,}8 \cdot b$
az új téglalap kerülete:	$k' = 2 \cdot a' + 2 \cdot b' = 2{,}4 \cdot a + 1{,}6 \cdot b$
az új téglalap területe:	$t' = a' \cdot b' = 1{,}2 \cdot a \cdot 0{,}8 \cdot b = 0{,}96 \cdot a \cdot b$

A téglalap kerületének a változása:
$k' - k = 2 \cdot a + 2 \cdot b - (2{,}4 \cdot a + 1{,}6 \cdot b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b - 2{,}4 \cdot a - 1{,}6 \cdot b =$ $= 0{,}4 \cdot b - 0{,}4 \cdot a$. Felhasználva azt, hogy a szorzás a kivonás műveletére nézve disztributív, kapjuk, hogy $k' - k = 0{,}4\,(b - a)$. Erre az átalakításra még visszatérünk, a neve **kiemelés.**
A téglalap területének a változása: $t' - t = 0{,}96 \cdot a \cdot b - a \cdot b = -0{,}04 \cdot a \cdot b$.
A mínusz előjel arra utal, hogy csökkent a terület.
Most fejezzük ki a változást százalékban, ha ez lehetséges! Nézzük először a kerületet! Mivel arra vagyunk kíváncsiak, hogy a változás hány százalékos, ezért az alap a $k = 2a + 2b$, a százalékérték a $k' - k =$ $= 0{,}4(b - a)$, így a százaléklábat a $\frac{0{,}4(b-a)}{2a+2b} \cdot 100$ kifejezés értéke szolgáltatja. Ebben szerepel az a is és a b is, ezért az értéke függ attól, hogy mit helyettesítünk a betűk helyére. Például ha $a = 1$ és $b = 1$, akkor a változás 0%-os, ha $a = 1$ és $b = 3$, akkor a változás $\frac{0{,}4(3-1)}{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3} 100 = 10$, azaz 10%-os, így konkrét értéket nem tudunk mondani. Most nézzük a területet! Itt az alap a $t = a \cdot b$, a százalékérték $0{,}04 \cdot a \cdot b$, így a százalékláb 4. Tehát a terület 4%-kal csökken.

A betűs kifejezésekben szereplő betűket változóknak (bizonyos problémákban határozatlanoknak, illetve ismeretleneknek) nevezzük. Mindegyik feladatban a betűs kifejezések mellé megadtuk, hogy a bennük szereplő változók mely számhalmaz elemeit helyettesítik, azaz megadtuk a kifejezés **alaphalmazát.** Ez az első két esetben az egész számok halmaza, a harmadik esetben a pozitív valós számok halmaza.

Az első két példában egyfajta betű szerepelt a kifejezésekben, pl. $3k$, $3n + 3$, $3m - 3$, $4j + 2$. Az ilyen kifejezések az **egyváltozós kifejezések**. A második feladatban már két különböző betűt használtunk: $2{,}4 \cdot a + 1{,}6 \cdot b$, $0{,}96 \cdot a \cdot b$, $\frac{0{,}4(b-a)}{2a+2b} \cdot 100$. Ezek a **kétváltozós kifejezések**. Természetesen szerepelhet bennük ennél több különböző betű is, így kapjuk a **többváltozós kifejezéseket:** $12ac - 3ab +$ b, $-3acd + 2cdb$. A kifejezésben szereplő **valós számtényezők** az **együtthatók.**

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 46 2012.06.25. 14:10:31

Például:
$3m - 3$ esetén a 3 és a –3; a $0{,}96 \cdot a \cdot b$ esetén a 0,96.

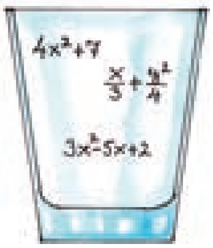
A példákban szereplő **kifejezések mindegyikében a négy alapműveletet alkalmaztuk (véges sokszor) valós számokra és betűkre**. Az ilyen kifejezéseket **algebrai kifejezéseknek** nevezzük. Mindhárom példában szerepelt **egytagú algebrai** kifejezés, amelyben **a számokat és a betűket csak a szorzás művelete kapcsolja össze**: $3 \cdot k$, $0{,}96 \cdot a \cdot b$. További példák: $12 \cdot c \cdot d \cdot a$, $0{,}1 \cdot a \cdot f$, $-\frac{3}{4} \cdot n \cdot m$. A szorzás jelét általában nem tesszük ki, csak egymás mellé írjuk a tényezőket: $3k$, $0{,}96ab$. (Két szám közé mindig kitesszük a szorzásjelet.)

Vannak köztük **kéttagú algebrai kifejezések**, amelyek az **egytagú kifejezések összegeként állnak elő:** $2{,}4a + 1{,}6b$, $2a + 2b$, $3n + 3$, $3m - 3$. **Ha több egytagú kifejezés összegét vagy különbségét vesszük, akkor többtagú kifejezést (polinomot) kapunk.** Például: $2a - 3ac + 4$, $d - \frac{3}{4} \cdot n \cdot m + 2c$.

Az előzőekben felírt algebrai kifejezésekben nem szerepelt betűs kifejezéssel való osztás, vagyis olyan tört, amelynek a nevezője tartalmaz változót. Ezért ezeket a kifejezéseket **algebrai egész kifejezéseknek** nevezzük. **Ha az algebrai kifejezésben szereplő tört nevezőjében van változó, akkor azt algebrai törtnek nevezzük.** Például: $\frac{0{,}4(b-a)}{2a+2b} \cdot 100$, $\frac{3}{2x-y}$, $\frac{2x}{x-1}$. Nem algebrai tört a $-\frac{3}{4} \cdot n \cdot m$.

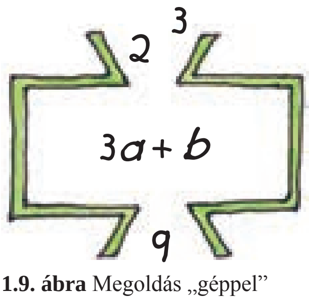
Ha egy algebrai kifejezésben szereplő betűk helyére az alaphalmazból behelyettesítünk elemeket és elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor a kifejezés helyettesítési értékét kapjuk. Például: $3m - 3$ esetén ha $m = -2$, akkor a helyettesítési érték $3(-2)-3 = -9$; a $2{,}4a + 1{,}6b$ esetén ha $a = 2$ cm és $b = 3$ cm, akkor a helyettesítési érték $2{,}4 \cdot 2 + 1{,}6 \cdot 3 = 9{,}6$ cm, $\frac{0{,}4(b-a)}{2a+2b} \cdot 100$ esetén ha $a = 1$ és $b = 3$, akkor a változás $\frac{0{,}4(3-1)}{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3} 100 = 10$, azaz 10%-os.

Az algebrai törteknél a nevező helyettesítési értéke nem lehet 0, ezért nem lehet akármilyen alaphalmazbeli értéket behelyettesíteni a változó helyére. **Az alaphalmaznak azt a legbővebb részhalmazát, ahol az adott algebrai tört értelmezve van, az algebrai tört értelmezési tartományának nevezzük.** Csak az értelmezési tartományba tartozó számok esetén számolhatunk helyettesítési értéket.
Például:
Az alábbi kifejezések alaphalmaza legyen a valós számok halmaza.
A $\frac{2y-5}{3y+2}$ algebrai tört értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, mert $-\frac{2}{3}$ esetén a $3y + 2$ helyettesítési értéke 0 lenne.



1.7. ábra Algebrai egész kifejezések


1.8. ábra Algebrai tört kifejezések



1.9. ábra Megoldás „géppel”

1.10. ábra Start

Az $\frac{1}{a+2}-\frac{2a-1}{3a-4}+\frac{1}{a}$ algebrai kifejezés értelmezési tartománya $\mathbb{R}\setminus\left\{-2;0;\frac{4}{3}\right\}$, mert –2 esetén az $a + 2$, 0 esetén az a, $\frac{4}{3}$ esetén a $3a - 4$ helyettesítési értéke lenne 0.

Oldjuk meg!

1. Írjuk fel algebrai kifejezéssel!
- a) páros természetes számok
- b) az összes olyan egész szám, melyek hetes maradéka öt
- c) a háromszög kerülete
- d) a deltoid területe
- e) három egymást követő páratlan, pozitív egész szám
- f) a pozitív egész számok reciproka
- g) páratlan természetes számok ellentettje
- h) három egymást követő négyzetszám

2. Fogalmazzuk meg szavakkal, hogy milyen számokat jelölnek az alábbi kifejezések!

a) $11n - 4,\ n \in \mathbb{Z}^+$ b) $2n,\ 2n + 2,\ 2n + 4,\ n \in \mathbb{N}$ c) $2m - 2,\ 2m,\ 2m + 2,\ m \in \mathbb{Z}^+$

d) $\frac{1}{2k},\ k \in \mathbb{Z}^+$ e) $-a,\ a \in \mathbb{R}$ f) $(a-1)^3;\ a^3;\ (a+1)^3$, ahol $a \in \mathbb{Z}^+$

3. Határozzuk meg az alábbi kifejezésekben az együtthatókat!

a) $2{,}5xy$ b) $-3ac$ c) $\frac{4}{3}a$ d) $-2s + 1{,}2ac$ e) $4x - \frac{2}{3}y$ f) $3n + 2mn - m + 5$

4. Jellemezzük a tagok, illetve a változók száma szempontjából az alábbi kifejezéseket!

a) $3i$ b) $5k - 2$ c) $4mn$ d) $-3xy \cdot 2z$ e) $3a - 4b$ f) $5x - 4e + 5xy - 1$

5. Határozzuk meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyeken!

a) $12m + 10$, ha $m = -0{,}5$ b) $12xy - 4z$, ha $x = \frac{1}{3}$, $y = 0{,}25$, $z = 2$

c) $3n + 2mn - m + 5$, ha $n = 10$, $m = -2$ d) $\frac{3}{x}+\frac{4x-3}{2x+1}$, ha $x = 2$

e) $\frac{2y-4}{5y+1}-\frac{3}{y-5}-4y$, ha $y = 0$ f) $\frac{2n-m}{m+n}-\frac{3}{m-n}+\frac{5nm}{2n+3m}$, ha $n = 2$, $m = 1$

6. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!

a) $\frac{1}{3x-5}$ b) $\frac{2a+5}{a}$ c) $\frac{5b-1}{4b+7}$ d) $\frac{1}{x}-\frac{3x+1}{x+5}$ e) $\frac{2y+1}{2y-1}+\frac{3y}{y+4}$

f) $\frac{2c}{c-3}+\frac{3c+1}{2c+3}-\frac{2}{5c-7}$ g) $\frac{a}{a+2}+\frac{2a-3}{a-2}+\frac{1+a}{2-5a}-7a$

7. Igaz-e, hogy bármely öt egymást követő egész szám összege osztható 5-tel? Ha nem, akkor mennyi az összeg ötös maradéka?

8. Igaz-e, hogy bármely hat egymást követő egész szám összege osztható 6-tal? Ha nem, akkor mennyi az összeg hatos maradéka?

9. Milyen k pozitív egész szám esetén teljesül, hogy k db egymást követő egész szám összege osztható k-val?

2. Pozitív egész kitevőjű hatvány

2. 1. A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

1. példa Hozzuk egyszerűbb alakra és tegyük növekvő sorrendbe az alábbi kifejezéseket!

$A = 2^4 \cdot 2^3, \quad B = \dfrac{2^{10}}{2^4}, \quad C = \left(2^2\right)^4$

2.1. ábra Egy legenda szerint a sakk feltalálója azt kérte az uralkodótól, hogy a játékért adjon neki a sakktábla mezői alapján: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$ szem búzát. Ez nagyobb mennyiség, mint a világ összbúzatermése

Megoldás:
Általános iskolai tanulmányinkból ismerjük a 2^4 jelentését, ez alapján $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, hasonlóan $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Tehát egy tetszőleges valós szám pozitív egész kitevőjű hatványát a következőképpen definiálhatjuk.

Definíció Legyen a tetszőleges valós szám, n pedig egynél nagyobb pozitív egész szám! Ekkor az $\boldsymbol{a^n}$ (olvasd: a az n-ediken) egy olyan n tényezős szorzat, amelynek minden tényezője a. Matematikai jelekkel leírva: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (a szorzatban n db tényező van), $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$. Az a a hatványalap, az n a hatványkitevő és a^n a hatványérték. Ha a hatvány kitevője 1, akkor a definíció: $a^1 = a$.

A definíció felhasználásával alakítsuk át az egyes kifejezéseket!

$$A = 2^4 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

A szorzás asszociatív tulajdonsága

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

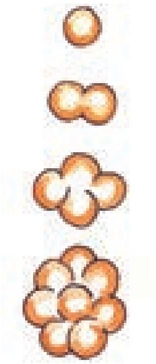
Az előzőekben két azonos alapú hatványt szoroztunk össze, és eredményként olyan hatványt kaptunk, amelynek kitevője egyenlő a tényezők kitevőinek az összegével, az alapja pedig az eredeti alap.

$$B = \frac{2^{10}}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

Tört egyszerűsítése

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója



2.2. ábra Sejtosztódás

Két azonos alapú hatványt osztottunk, és eredményként olyan hatványt kaptunk, amelynek kitevője egyenlő a tört számlálójában levő hatvány kitevőjének és nevezőjében levő hatvány kitevőjének a különbségével, az alapja pedig az eredeti alap.

$$C=\left(2^2\right)^4=(2\cdot 2)^4=(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^8$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója.

A szorzás asszociatív tulajdonsága.

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója.

Ebben az esetben egy hatványt hatványoztunk, és eredményként olyan hatványt kaptunk, melynek kitevője egyenlő az eredeti kitevők szorzatával, az alapja pedig az eredeti alap. A kapott hatványokat anélkül is összehasonlíthatjuk, hogy kiszámolnánk az értéküket, mert azonos az alapjuk. Mivel ez az alap egynél nagyobb, ezért az a hatvány a nagyobb, melynél a kitevő nagyobb. Így $B<A<C$.

2. 2. A hatványozás azonosságai

1. azonosság Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük, azaz $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, ahol $a\in\mathbb{R}$ és $m, n\in\mathbb{Z}^+$.

2.3. ábra $a^m\cdot a^n=?$

Bizonyítás:

$$a^m\cdot a^n=(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ db})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ db})=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m+n\ db}=a^{m+n}$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

A szorzás asszociatív tulajdonsága

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

2. azonosság Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot a számláló és a nevező kitevőjének különbségére hatványozzuk, azaz $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, ahol $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ és $m, n\in\mathbb{Z}^+$, valamint $m>n$.

Bizonyítás:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}^{m\ db}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ db}}=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m-n\ db}=a^{m-n}$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója.

Tört egyszerűsítése

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója.

3. azonosság Hatványt úgy hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük, azaz $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$, ahol $a \in \mathbb{R}$ és $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bizonyítás:

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

A szorzás asszociatív tulajdonsága

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ db} = \underbrace{\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m\ db}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m\ db}\cdot \ldots \cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m\ db}}_{n\ db} =$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a\cdot a\cdot a}_{n\cdot m} = a^{m\cdot n}$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

2. példa Számítsuk ki a lehető legegyszerűbben, számológép használata nélkül!

$A = 2^5 \cdot 5^5, \quad B = \dfrac{60^6}{6^6}$

Megoldás:
Alkalmazzuk megint a pozitív egész kitevőjű hatvány definícióját!

A szorzás asszociatív és kommutatív tulajdonsága

$$A = 2^5 \cdot 5^5 = (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5) = (2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)\cdot$$
$$\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5) = 10^5 = 100\,000$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

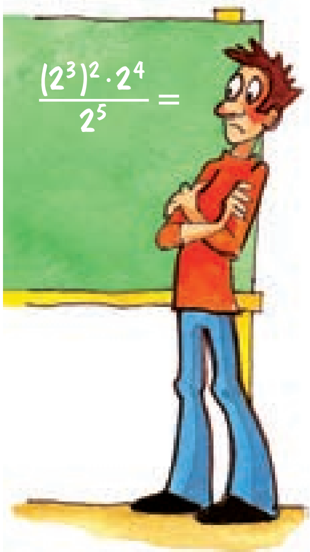
A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

$$B = \frac{60^6}{6^6} = \frac{60\cdot 60\cdot 60\cdot 60\cdot 60\cdot 60}{6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6} = \frac{60}{6}\cdot\frac{60}{6}\cdot\frac{60}{6}\cdot\frac{60}{6}\cdot\frac{60}{6}\cdot\frac{60}{6} =$$
$$= 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10^6 = 1\,000\,000$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

Tört egyszerűsítése

Az előző példa alapján a hatványozás két újabb azonosságát fogalmazhatjuk meg.

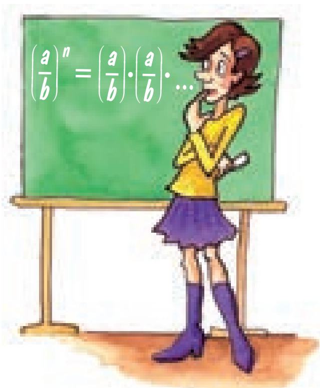


2.4. ábra Alkalmazzuk a megismert azonosságot!

2.5. ábra Ne használjunk számológépet!

2.6. ábra $a^n \cdot b^n$

2.7. ábra $(a \cdot b)^n$



2.8. ábra Hogy is van ez?

4. azonosság Szorzat hatványozása, illetve azonos kitevőjű hatványok szorzása

a) Szorzatot tényezőnként is hatványozhatunk, majd a tényezők hatványait összeszorozzuk.

b) Azonos kitevőjű hatványokat úgy is összeszorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre hatványozzuk.

A két azonosságot felírhatjuk egy matematikai összefüggéssel.

$$\xrightarrow{a)}$$

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^n = \boldsymbol{a}^n \cdot \boldsymbol{b}^n \text{, ahol } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\xleftarrow[b)]{}$$

Bizonyítás:

A szorzás asszociatív és kommutatív tulajdonsága

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n\ db} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ db} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n\ db} = a^n \cdot b^n$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

5. azonosság Tört hatványozása, illetve azonos kitevőjű hatványok osztása

a) Törtet úgy is hatványozhatunk, hogy a számlálót és a nevezőt külön-külön hatványozzuk, és e hatványok hányadosait képezzük.

b) Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre hatványozzuk.

A két azonosságot felírhatjuk egy matematikai összefüggéssel.

$$\xrightarrow{a)}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^n = \frac{\boldsymbol{a}^n}{\boldsymbol{b}^n} \text{, ahol } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \neq 0, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\xleftarrow[b)]{}$$

Bizonyítás:

Törtek szorzása

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ db} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ db}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ db}} = \frac{a^n}{b^n}$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója

3. példa Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét a hatványozás azonosságainak felhasználásával!

$$\frac{5^6\cdot 7^{12}\cdot(2\cdot 3)^4}{(5^2\cdot 7^4)^3}\left(\frac{5}{2^2\cdot 3^2}\right)^2$$

Megoldás:

4. és 5. azonosság

3. azonosság

$$\frac{5^6\cdot 7^{12}\cdot(2\cdot 3)^4}{(5^2\cdot 7^4)^3}\left(\frac{5}{2^2\cdot 3^2}\right)^2=\frac{5^6\cdot 7^{12}\cdot 2^4\cdot 3^4}{\left(5^2\right)^3\cdot\left(7^4\right)^3}\cdot\frac{5^2}{\left(2^2\right)^2\cdot\left(3^2\right)^2}=$$

$$=\frac{5^6\cdot 7^{12}\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 5^2}{5^6\cdot 7^{12}\cdot 2^4\cdot 3^4}=\frac{5^8\cdot 7^{12}\cdot 2^4\cdot 3^4}{5^6\cdot 7^{12}\cdot 2^4\cdot 3^4}=25$$

1. azonosság

Tört egyszerűsítése és 2. azonosság

2.9. ábra Hány azonosságot is használják a számoláshoz?

4. példa Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi algebrai kifejezést!

$$\frac{\left(x^2\right)^3\cdot\left(y^3\right)^2\cdot(x\cdot y)^4\cdot y^3}{\left(x^2\cdot y^3\right)^2\cdot x^5 y^6}, \text{ ahol } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Megoldás:

3. és 4. azonosság

1. azonosság

$$\frac{\left(x^2\right)^3\cdot\left(y^3\right)^2\cdot(x\cdot y)^4\cdot y^3}{\left(x^2\cdot y^3\right)^2\cdot x^5\cdot y^6}=\frac{x^6\cdot y^6\cdot x^4\cdot y^4\cdot y^3}{x^4\cdot y^6\cdot x^5\cdot y^6}=\frac{x^{10}\cdot y^{13}}{x^9\cdot y^{12}}=x\cdot y$$

2. azonosság

5. példa Félmillió forint spórolt pénzünket el szeretnénk helyezni a bankban két évre. A bank két lehetőséget kínál számunkra:

a) Az éves kamat 12%, és minden év letelte után hozzáírják a bent lévő összeghez a kamatot, így a kamattal megnövelt összeg kamatozik tovább. (Ez a kamatoskamat-számítás, évenkénti tőkésítéssel.)

b) A féléves kamat 6%, és minden félév letelte után hozzáírják a bent lévő összeghez a kamatot, így a kamattal megnövelt összeg kamatozik tovább. (Ez a kamatoskamat-számítás, félévenkénti tőkésítéssel.)

Melyik lehetőséget válasszuk?

2.10. ábra Melyiket válasszam?

Megoldás:

a) Mivel az éves kamat 12%, ezért egy év eltelte után a pénzünk 1,12-szorosára változik. A következő évben az új összeg kamatozik tovább, így ezt megszorozva 1,12-dal kapjuk, hogy két év múlva $500\,000 \cdot 1{,}12^2 = 627\,200$ Ft-ot vehetünk ki a bankból.

b) Ebben az esetben félévenként írják hozzá a 6% kamatot, így két év múlva $500\,000 \cdot 1{,}06^4 \approx 631\,238$ Ft-ot vehetünk ki a bankból.

A második esetben járunk jobban, így ezt érdemes választani.

Oldjuk meg!

1. Adjuk meg 1024-ig az alábbi számok pozitív egész kitevőjű hatványait!

a) 2 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7

2. Számítsuk ki számológép használata nélkül az alábbi kifejezések értékeit, és rendezzük nem növekvő sorrendbe azokat!

a) $A = (-3)^4 \cdot 2^2$, $\quad B = (-2)^5 \cdot 3^3$, $\quad C = (-2)^3 \cdot (-3)^3$

b) $A = \dfrac{5^3 \cdot 5^4}{5 \cdot 5^2 \cdot 5^3}$, $\quad B = \dfrac{3^8 \cdot (-3)^4}{3^3 \cdot 3^7}$, $\quad C = \dfrac{2^{2008} \cdot 2^{2007}}{2^{2005} \cdot 2^{2010}}$

c) $A = \dfrac{(3^2 \cdot 3^4)^5 \cdot (7^3 \cdot 5^2)^4}{(3^6 \cdot 7^2)^5 \cdot (5^4)^2}$, $\quad B = \dfrac{\left((-2)^6\right)^3 \cdot (3^5 \cdot 2^2)^2}{(2^3 \cdot 3)^7}$, $\quad C = \left(\dfrac{3^2}{2^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{(2^5 \cdot 5^3)^3}{(5 \cdot 2)^9}\right)^2$

d) $A = \left(\dfrac{5^3}{7^2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{7^3}{5^4}\right)^3 \cdot \dfrac{\left(3^2 \cdot 2^5\right)^4}{\left(2^{10}\right)^2 \cdot 3^7}$, $\quad B = \left(\dfrac{9 \cdot 25}{8 \cdot 49}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{7^3 \cdot 16}{3^2 \cdot 5^2}\right)^4$, $\quad C = \left(\left(\dfrac{125}{81}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{16}{625}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{9}{2}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right)^2$

3. Számítsuk ki számológép használata nélkül az alábbi kifejezések értékeit!

a) $1^5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ $\quad$ b) $1^5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ $\quad$ c) $\dfrac{(2^3 \cdot 5)^3}{(3^2 \cdot 5^3)^2} \cdot \left(\dfrac{(5 \cdot 3)^2 (7^3)^2}{5^1 \cdot 3^2 \cdot (7^2)^3}\right)^3 \cdot 3^4$

d) $\left(\dfrac{32}{25} \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 \cdot \dfrac{81}{\left(2^2\right)^2}\right)^2$ $\quad$ e) $\dfrac{32^4 \cdot 625^2}{81^3 \cdot 49^2} \cdot \dfrac{343^2 \cdot 27^4}{25^4 \cdot 512^2}$ $\quad$ f) $\left(\dfrac{64}{125}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{49^3 \cdot 25}{243 \cdot 343^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{81}{32}\right)^4 \cdot 5$

4. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi algebrai kifejezéseket a betűk megengedett, valós értéke mellett!

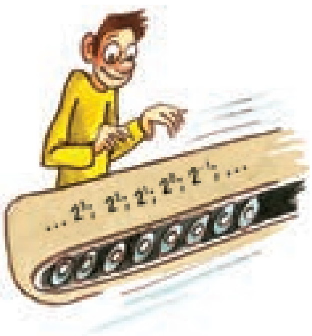
a) $a^2 \cdot a^3 \cdot a \cdot a^4$ $\quad$ b) $\left(b^3\right)^4 \cdot \left(b^2 \cdot b^4\right)^2$ $\quad$ c) $\dfrac{\left(c^4\right)^5 \cdot c^6}{\left(c^3 \cdot c^5\right)^3}$ $(c \neq 0)$ $\quad$ d) $\dfrac{(a \cdot b^2)^3 \cdot (b^5)^4 \cdot a^{11}}{(b^4 \cdot a^2)^6}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

e) $\left(\dfrac{a^3 \cdot b^2}{c^4}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{c^7}{a^5 \cdot b^3}\right)^3$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$ $\quad$ f) $\left(\dfrac{(x^3 \cdot y^2)^4 \cdot x^5 \cdot (y^3)^5}{(x^4 \cdot y^8)^3 \cdot (x^2)^2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\left(x^3\right)^3 \cdot y^5}{\left(x^5 \cdot y^2\right)^2}\right)^3$ $\quad x \neq 0,\ y \neq 0$

5. Egy számlára befizetünk 100 000 Ft-ot havi lekötésre, havi 1%-os kamatra. Mennyi pénzünk lesz egy év múlva? (Minden hónap végén hozzáírják az addigi összeghez a kamatot.)

3. Egész kitevőjű hatványok

A számfogalom kialakulásánál a pozitív egész számok után megjelent a nulla, majd a negatív egész számok. Hatványozás esetén is természetes igényként merül fel a pozitív egész kitevőjű hatvány után a nulla és a negatív egész kitevőjű hatvány értelmezése. Egy-egy új fogalom bevezetése során nagyon fontos szem előtt tartani az előzményeket. Már definiáltuk a pozitív egész kitevőjű hatványt, és erre támaszkodva bebizonyítottuk a hatványozás azonosságait. A nulla és a negatív egész kitevőjű hatványt úgy célszerű definiálni, hogy a pozitív egész kitevőre bebizonyított azonosságok továbbra is érvényben maradjanak. A fogalom kiterjesztésének ezen igényét **permanenciaelvnek** (permanencia: állandóság, tartósság, folyamatosság, folytonosság) nevezzük.



3.1. ábra Készülnek a hatványok

Alkalmazzuk a $\frac{3^4}{3^4}$ kifejezésre a hatványozás 2. azonosságát! Így $\frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0$.

Tehát az adott alap **nulladik** hatványát kapjuk.

Ha az egyszerűsítést alkalmazzuk, akkor 1-et kapunk eredményként. Ez alapján kézenfekvőnek tűnik a számok nulladik hatványát 1-nek értelmezni.

Azt tudjuk, hogy a 0 bármely pozitív egész kitevőjű hatványa 0. Ezt a gondolatmenetet megtartva célszerű lenne a 0^0-t nullának venni. Az előzőek alapján viszont a $0^0 = 1$ értelmezés tűnik jónak. Az egyértelműség miatt a 0^0-t nem értelmezzük.

Definíció Bármely nullától különböző valós szám **nulladik hatványa** 1, azaz $a^0 = 1$, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.2. ábra 0^0 „dilemma”

Be lehet bizonyítani, hogy ilyen értelmezés mellett a hatványozás minden azonossága teljesül bármely nemnegatív egész kitevő esetén is.

Maradjunk továbbra is a 2. azonosságnál. Mit kapunk, ha kiterjesztjük a $\frac{3^3}{3^5}$ típusú kifejezésekre, azaz olyanokra, ahol a számláló kitevője kisebb, mint a nevező kitevője? Az azonosság alapján azt kapjuk, hogy $\frac{3^3}{3^5} = 3^{3-5} = 3^{-2}$. Ha a törtek egyszerűsítését alkalmazzuk, akkor a számlálóban szereplő három darab hármassal leegyszerűsítve azt kapjuk, hogy $\frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2}$. Ez alapján az alábbi definíció tűnik célszerűnek.

Definíció Bármely nullától különböző valós szám **negatív egész kitevőjű hatványa** egyenlő a szám ellentett kitevőjű hatványának a reciprokával, azaz $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $n \in \mathbb{Z}^+$.

Be lehet bizonyítani, hogy ilyen definíció mellett érvényesek maradnak a hatványozás azonosságai bármely egész kitevő esetén is.

3.3. ábra Melyik nagyobb?

1. példa Melyik nagyobb?

a) $7 \cdot 3^{-2}$ vagy $5 \cdot 2^{-3}$

b) $\frac{5^{-5} \cdot 5^{-4}}{5^{-7}}$ vagy $\frac{7^{-3} \cdot 3^{-6}}{3^{-5} \cdot 7^{-2}}$

c) $\frac{\left(3^{-2}\right)^2 \cdot \left(3^{-4}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(5^{-3}\right)^{-3}}$ vagy $\frac{\left(2^{-2}\right)^{-4} \cdot 2^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}} \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^4$

Megoldás:

a) A negatív egész kitevőjű hatvány definíciója alapján:

$$7 \cdot 3^{-2} = 7\frac{1}{3^2} = \frac{7}{9} = \frac{56}{72} \quad \text{és} \quad 5 \cdot 2^{-3} = 5 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{5}{8} = \frac{45}{72}, \text{ tehát}$$

$$5 \cdot 2^{-3} < 7 \cdot 3^{-2}.$$

b) Alkalmazzuk a hatványozás 1. és 2. azonosságát és a negatív egész kitevőjű hatvány definícióját!

$$\frac{5^{-5} \cdot 5^{-4}}{5^{-7}} = \frac{5^{-9}}{5^{-7}} = 5^{-2} = \frac{1}{25} \quad \text{és} \quad \frac{7^{-3} \cdot 3^{-6}}{3^{-5} \cdot 7^{-2}} = 7^{-1} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{21}.$$

A kapott törteket összehasonlíthatjuk úgy is, ahogy ezt az előbb tettük, tehát közös nevezőre hozással, de most eljárhatunk egyszerűbben is. Mivel a két tört számlálója egyenlő, ezért az a tört a kisebb, amelynek nagyobb a nevezője, így $\frac{5^{-5} \cdot 5^{-4}}{5^{-7}} < \frac{7^{-3} \cdot 3^{-6}}{3^{-5} \cdot 7^{-2}}$.

c) Alkalmazzuk a hatványozás első három azonosságát és a nempozitív egész kitevőjű hatvány definícióját!

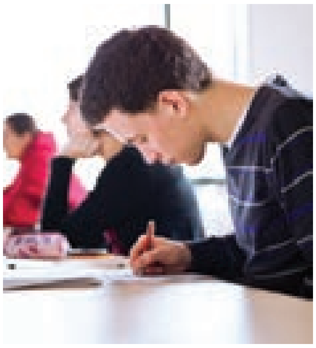
A definíció alapján: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 3^2.$

Így $$\frac{\left(3^{-2}\right)^2 \cdot \left(3^{-4}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(5^{-3}\right)^{-3}} = \frac{\left(3^{-2}\right)^2 \cdot \left(3^{-4}\right)^{-2}}{3^2 \cdot \left(5^{-3}\right)^{-3}} = \frac{3^{-4} \cdot 3^8}{3^2 \cdot 5^9} = \frac{3^4}{3^2 \cdot 5^9} = \frac{3^2}{5^9}.$$

A másikat hasonlóan átalakítva: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = 2^4.$

$\frac{\left(2^{-2}\right)^{-4}\cdot 2^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}\cdot\left(\frac{1}{5^2}\right)^4 = \frac{2^8\cdot 1}{2^4}\cdot\frac{1}{5^8} = \frac{2^4}{5^8}.$ Mivel $3^2 < 2^4$ és $5^8 < 5^9$,

ezért $\frac{3^2}{5^9} < \frac{2^4}{5^8}$, tehát az első kisebb, mint a második.



3.4. ábra Ne akarjunk mindent fejben megoldani!

2. példa Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést!

$$\frac{(a^{-2}\cdot b^3)^{-4}\cdot(a^4\cdot b^2)^{-2}\cdot(b^{-5})^{-3}}{(a\cdot b)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}} \quad (a,\, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

Megoldás:
A negatív egész hatvány definíciója alapján:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-3} = \left(a^{-1}\right)^{-3} = a^{(-1)(-3)} = a^3.$$

Ezután alkalmazzuk a hatványozás azonosságait!

$$\frac{(a^{-2}\cdot b^3)^{-4}\cdot(a^4\cdot b^2)^{-2}\cdot(b^{-5})^{-3}}{(a\cdot b)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}} = \frac{a^8\cdot b^{-12}\cdot a^{-8}\cdot b^{-4}\cdot b^{15}}{a^{-2}b^{-2}\cdot a^3} =$$

$$= \frac{a^0\cdot b^{-1}}{a\cdot b^{-2}} = a^{-1}\cdot b$$

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki! Ne használjunk számológépet!

a) 4^{-3} b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ c) $0{,}1^{-2}$ d) $0{,}001^{-1}$ e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$ f) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-1}$ g) $2^{-2}\cdot 2^4 : 2^{-3}$

h) $\left(3^2\cdot 5^{-1}\right)^{-3}\cdot(3^{-4})^{-2}\cdot 5^{-2}$ i) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot 2^{-5}\cdot\left(7^4\cdot 2^3\right)^2 : (2^{-2}\cdot 7^{-3})^{-2}$

2. Hozzuk egyszerűbb alakra!

a) $\frac{a^3\cdot a^{-2}(a^4)^{-2}}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}\cdot a^{-11}}$ $(a\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$ b) $(2a^{-1}b^3)^{-2}\cdot(4a^3b^{-2})^{-3}$ $(a,\, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$

c) $\frac{(x^{-3}\cdot y^{-1})^2}{(x^{-4}\cdot y^{-2})^3}\cdot\left(\frac{x^5}{y^2}\right)^{-3}$ $(x,\, y\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$ d) $\frac{(a^5\cdot b^3)^2\cdot(a^{-2}\cdot b^{-3})^{-4}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-18}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-36}}$ $(a,\, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$

3. Döntsük el számológép használata nélkül, hogy melyik nagyobb!

a) $10^{-3}\cdot 2^{-1}$ vagy $2^{-4}\cdot 5^{-3}$

b) $\dfrac{16^{-2}\cdot 8^{3}}{0{,}5^{-4}}$ vagy $\dfrac{27^{2}\cdot 9^{-3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}$

c) $\dfrac{0{,}1^{-1}\cdot 100^{-3}}{1000^{-2}}$ vagy $\dfrac{0{,}001^{-3}\cdot 10^{-9}}{100^{-1}}$

d) $(49\cdot 16)^{-2}\cdot\left(7^{-2}\cdot 8^{-1}\right)^{-2}$ vagy $125^{-2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-5}\cdot\left(81^{-1}\right)^{-2}\left(\frac{3^{3}}{2}\right)^{-1}$

4. Számok normálalakja

4.1. ábra Egy szép nyári napon akár a medence térfogatát is kiszámolhatjuk

1. példa Egy strand téglatest alakú úszómedencéjének oldalélei 40 m, 25 m, 3 m hosszúak. Hány liter víz fér bele, ha teljesen teletöltik? Hány óráig tart a medence feltöltése, ha percenként 2000 liter víz folyik bele?

Megoldás:
Először számoljuk ki, hogy hány köbméter a medence térfogata! Már általános iskolában tanultuk, hogy a téglatest térfogata egyenlő az egy csúcsból kiinduló oldalélei hosszának a szorzatával. Ez alapján a medence térfogata $V = 40\text{ m}\cdot 25\text{ m}\cdot 3\text{ m} = 3000\text{ m}^3$.

Azt tudjuk, hogy 1 liter = 1 dm^3 és 1 $\text{m}^3 = 1000\text{ dm}^3$. Ez alapján $V = 3000\cdot 1000$ liter = 3 000 000 liter. Az ilyen nagy számok, illetve a nagyon kicsi számok leírása az egész kitevőjű hatványok segítségével sokkal áttekinthetőbbé válik, és a velük való számolás is könnyebb. A 3 000 000 litert leírhatjuk így is: $3\cdot 10^6$ liter. A valós számok ilyen módon történő felírását a valós számok normálalakjának nevezzük.

Definíció Az x valós szám esetén az $x = a\cdot 10^n$ alakot, ahol $-10 < a \le -1$ vagy $1 \le a < 10$ és $n\in\mathbb{Z}$, az x szám **normálalakjának** nevezzük.

4.2. ábra Hány tonna szén van a vasúti kocsiban?

Ez alapján pl. a 2000 normálalakja $2\cdot 10^3$.
Számoljuk ki, hány percig tart a medence megtöltése!

$$t = \frac{3\cdot 10^6\text{ liter}}{2\cdot 10^3\ \dfrac{\text{liter}}{\text{perc}}} = 1{,}5\cdot 10^3\text{ perc.}$$ Számítsuk ki, hogy ez hány óra! Ehhez a kapott értéket osszuk el 60-nal! Így $t = 25$ óra.

2. példa Írjuk fel az alábbi számok normálalakját!
a) 234 000 000 b) 0,000 000 005 13

Megoldás:

a) $234000000 = 2{,}34 \cdot 100000000 = 2{,}34 \cdot 10^8$

b) $0{,}00000000513 = 5{,}13 \cdot 0{,}000000001 = 5{,}13 \cdot 10^{-9}$

3. példa A fény terjedési sebességét levegőben $300\,000\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}}$-nak vesszük.

a) Adjuk meg a fény sebességét $\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$-ban!

b) A Nap és a Föld közepes távolsága kb. $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Adjuk meg ezt a távolságot méterben!

c) Körülbelül hány perc alatt teszi meg a Nap–Föld távolságot a fény?

Megoldás:

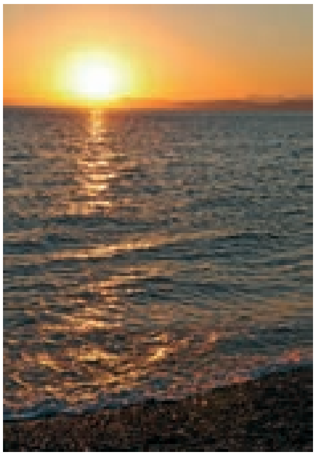
a) Mivel $1\text{ km} = 1000\text{ m} = 1 \cdot 10^3\text{ m}$, ezért $300\,000\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}} =$

$= 3 \cdot 10^5 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) A Nap és a Föld közepes távolsága méterben kb. $1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 10^3\text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\text{ m}$.

c) A keresett időt megkapjuk, ha a Nap és a Föld távolságát elosztjuk a fény sebességével. Így $t = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{11}\text{ m}}{3 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}5 \cdot 10^3\text{ s} = 500\text{ s} \approx 8{,}33\text{ min}$,

azaz kb. 8 perc alatt teszi meg a fény a Nap–Föld távolságot.



4.3. ábra Most sincsenek közelebb egymáshoz, de csodálatos …

4. példa A Newton-féle gravitációs erőtörvény segítségével kiszámolhatjuk, hogy mekkora gravitációs erő hat két test között. Ez alapján az erő: $F = \gamma \cdot \dfrac{M \cdot m}{r^2}$, ahol $\gamma = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ a gravitációs állandó, M az egyik, m a másik test tömege, r pedig a két test között levő távolság. (A középpontjaik távolsága.) Azt is tudjuk, hogy egy 80 kg tömegű emberre a gravitációs mező a Föld felszínén megközelítőleg 800 N erővel hat. Határozzuk meg ennek ismeretében a Föld tömegét, ha a sugara 6378 km!

4.4. ábra Isaac Newton (1643–1727)

Megoldás:

Váltsuk át a Föld sugarát méterbe: $r = 6\,378\,000\text{ m} = 6{,}378 \cdot 10^6\text{ m}$. Ez lesz a két test középpontjának távolsága. A Föld tömege M, az emberé m. Ez alapján behelyettesíthetjük a számadatokat a képletbe:

$$800 = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{80 \cdot M}{(6{,}378 \cdot 10^6)^2},$$

$$800 = \frac{536 \cdot 10^{-11} \cdot M}{40{,}67 \cdot 10^{12}},$$

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 59 2012.06.25. 14:12:24

$$8\cdot 10^2 = 1{,}317\cdot 10^{-22}\cdot M \Rightarrow \frac{8\cdot 10^2}{1{,}317\cdot 10^{-22}} = M \Rightarrow M = 6{,}07\cdot 10^{24}\text{ kg.}$$

Tehát a Föld tömege megközelítőleg: $6{,}07\cdot 10^{24}$ kg.

5. példa A hélium moláris tömege $4\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Mekkora egy héliumatom tömege kg-ban kifejezve?

10^{12}	tera-	T
10^{9}	giga-	G
10^{6}	mega-	M
10^{3}	kilo-	k
10^{2}	hekto-	h
10^{1}	deka-	da
10^{-1}	deci-	d
10^{-2}	centi-	c
10^{-3}	milli-	m
10^{-6}	mikro-	μ
10^{-9}	nano-	n
10^{-12}	piko-	p
10^{-15}	femto-	f
10^{-18}	atto-	a

4.5. ábra A mértékegységrendszerben a **prefixumok**at vagy **előtagok**at a nagyon nagy vagy nagyon kicsi mennyiségek rövid leírására használjuk

Megoldás:
Tudjuk, hogy 1 mol anyagmennyiségű anyag tömege a moláris tömeg. Azt is tudjuk, hogy ez $6\cdot 10^{23}$ db részecske tömegét jelenti. Tehát megkapjuk egy részecske tömegének a számértékét, ha a moláris tömeg számértékét elosztjuk $6\cdot 10^{23}$-nal. A moláris tömeg $\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$-ban kifejezve: $4\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$. Ez alapján egy héliumatom tömege:
$$\frac{4\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{23}} \approx 0{,}667\cdot 10^{-26} \Rightarrow m = 6{,}67\cdot 10^{-27}\text{ kg.}$$

6. példa A legkisebb méretű baktériumok az úgynevezett mycoplasma nemzetséghez tartoznak, méretük 0,3 mikrométer. Hány ilyen baktérium összhossza egyenlő az Egyenlítő hosszával, amely megközelítőleg 40 075,704 km?

Megoldás:
A 4.5. táblázatból kiderül, hogy egy ilyen baktérium mérete $0{,}3\cdot 10^{-6}$ m = $= 3\cdot 10^{-7}$ m. Az Egyenlítő hossza méterben kifejezve: 40 075 704 m, így a megoldás $\frac{40075704}{3\cdot 10^{-7}} = 133585680000000 \approx 1{,}34\cdot 10^{14}$ db.

7. példa Optimális körülmények esetén a baktériumok rendkívül gyorsan növekednek és osztódnak, akár 10 perc alatt is megduplázódhat egy baktériumpopuláció. Ha kezdetben csak egy baktérium van, akkor mekkora lesz a populáció 8 óra múlva?

4.6. ábra Egyes baktériumok mérete 0,3 μm

Megoldás:
Először számoljuk ki, hogy 8 óra alatt hányszor duplázódhat meg a baktériumok száma! Mivel 8 óra = 480 perc, így 48-szor duplázódik meg a baktériumszám 8 óra alatt. Ez azt jelenti, hogy a végén 2^{48} db = = 140 737 488 355 328 db ≈ $1{,}41\cdot 10^{14}$ db baktérium lesz a populációban, ami több, mint az előző feladatban kapott érték.

Oldjuk meg!

1. Adjuk meg normálalakban!
a) 102 000 000 b) 230 000 000 c) 45 000 d) 0,002 e) 0,000 000 321 f) 0,000 000 000 002 13

2. Írjuk fel az alábbi, normálalakban megadott számokat!
a) $2{,}3 \cdot 10^4$ b) $3{,}564 \cdot 10^7$ c) $9{,}12 \cdot 10^2$ d) $1{,}22 \cdot 10^{-3}$ e) $5{,}321 \cdot 10^{-6}$ f) $8{,}6 \cdot 10^{-1}$

3. Adjuk meg normálalakban, hogy
a) 4500 km hány milliméter, b) 0,012 g hány tonna, c) 543 dkg hány milligramm,
d) 431 m^3 hány cm^3!

4. Határozzuk meg, mekkora utat tesz meg a fény egy év alatt! Ezt a távolságot nevezzük fényévnek.

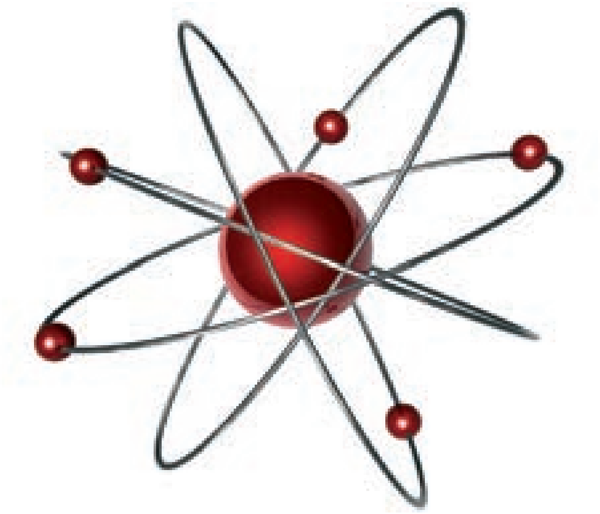
5. Határozzuk meg egy nitrogénmolekula tömegét kilogrammban, ha a nitrogénatom moláris tömege $14\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$! (Az erre vonatkozó ismeretek megtalálhatók a lecke 5. példájában.)

6. Tudjuk, hogy a Nap tömege $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg. Hányszorosa ez a Föld tömegének? (A Föld tömegét a leckében megtalálod.)

7. Mekkora a Föld és a Nap között ható gravitációs erő? (Az erre vonatkozó ismeretek megtalálhatók a lecke 3. ill. 4. példájában. A Nap tömege $1{,}9832 \cdot 10^{30}$ kg.)

8. Az l_0 hosszúságú fémrúd hosszának melegítés hatására bekövetkező Δl megváltozását az alábbi összefüggés adja meg: $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$, ahol α a fémre jellemző vonalmenti hőtágulási együttható, ΔT a hőmérséklet változása. Hány százalékkal nagyobb egy 1,5 m hosszú alumíniumrúd hosszának megváltozása, mint egy ugyanolyan hossz ú vasrúdé, ha mindkettőt 20˚C hőmérsékletről melegítjük 100°C-ra? $\left(\alpha_{\text{Fe}} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{°\text{C}},\quad \alpha_{\text{Al}} = 2{,}3 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{°\text{C}}\right)$

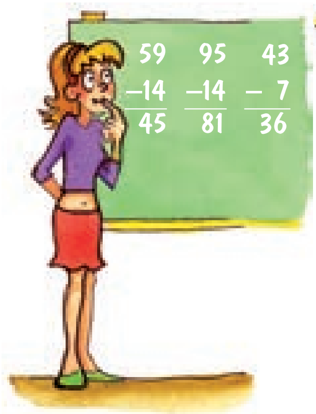
9. Egy atom átmérője kb. 100 pm, a benne lévő atommagé kb. 10 fm. Ha az atomot egy 100 m átmérőjű gömbbel modelleznénk, akkor mekkora lenne az atommag átmérője? (A feladat megoldásához használd a leckében található prefixum táblázatot!)



4.7. ábra Bohr–Sommerfeld-féle atommodell

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 61 2012.06.25. 14:12:40

5. Algebrai egész kifejezések (polinomok)



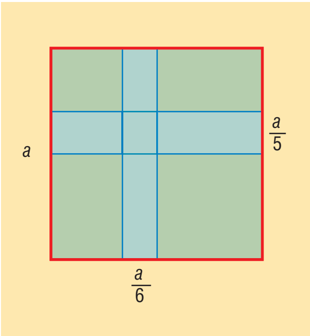
5.1. ábra Nézzünk néhány példát!

1. példa Egy tetszőleges kétjegyű pozitív egész számból kivonjuk számjegyeinek az összegét. Mit állíthatunk a kapott különbségről?

Megoldás:
Az első fejezetben a halmazok kapcsán már foglalkoztunk a kétjegyű pozitív egész számok jelölésével. Ha a számban a tízesek helyén álló számjegy x, az egyesek helyén álló számjegy y, akkor a kétjegyű szám $10x + y$, ahol $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ és $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Jelöljük a keresett különbséget K-val! Mivel a számjegyek összege $x + y$, így $K = 10x + y - (x + y)$. Bontsuk fel a zárójelet, és vegyük figyelembe, hogy előtte egy negatív előjel szerepel! $K = 10x + y - x - y$ (úgy is felírhatnánk, hogy $10x + y + (-1)x + (-1)y$). Egy olyan négytagú kifejezést kaptunk, melynek két-két tagja csak együtthatóiban tér el egymástól. Ezek a $10x$ és $-1x$, illetve az $1y$ és $-1y$. Az ilyen kifejezéseket **egynemű kifejezéseknek** nevezzük. Az egynemű kifejezéseket összevonhatjuk.

$$K = 10x - x + y - y = 9x.$$

Tehát egy 9-cel osztható számot kaptunk. Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha egy kétjegyű számból kivonjuk a számjegyeinek az összegét, akkor 9-cel osztható számot kapunk.



5.2. ábra A kert alaprajza

2. példa Egy négyzet alakú kertben két, az oldalakkal párhuzamos betonút keresztezi egymást, az 5.2. ábrának megfelelően. Az egyik út szélessége a négyzet oldalának az ötöde, a másik a négyzet oldalának a hatoda. A kertnek az utakon kívüli részét fű fedi. Hány százaléka a füves rész területe a kert területének?

Megoldás:
A négyzet oldala legyen a hosszúságú! Ekkor mindkét betonút hossza a, míg az egyik szélessége $\frac{a}{5}$, a másiké $\frac{a}{6}$. A négyzet területe $T = a^2$. Először számoljuk ki a betonutak által lefedett rész nagyságát! Az utak területét a hosszuk és a szélességük ismeretében kiszámolhatjuk, de összegük a középső kis téglalap miatt nagyobb, mint az általuk lefedett rész területe. Kövessük azt az elvet, amit a szitaformula esetén már megismertünk! Így a betonnal lefedett rész területe: $t = a \cdot \frac{a}{5} + a \cdot \frac{a}{6} - \frac{a}{5} \cdot \frac{a}{6}$.

Ebből $t = \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{30} = \frac{6a^2 + 5a^2 - a^2}{30} = \frac{a^2}{3}$. A füves terület: $a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$, amely a kert kétharmad része, így körülbelül a kert 66,7%-át fedi fű.

5.3. ábra A kert

A $10x$, y, $9x$ **elsőfokú** kifejezések, az $\frac{a^2}{3}$ **másodfokú** kifejezés.

Definíció Az **egytagú egész kifejezés fokszáma** a benne szereplő változók hatványkitevőinek az összege.

Például: 2, 5, –1: nulladfokú kifejezések

$4x$, $7z$, $-65a$: elsőfokú kifejezések

$3b^2$, $0{,}5x^2$, $3ab$, $-4xy$: másodfokú kifejezések

a^3, $22 \cdot x^2y$, $33 \cdot ab^2$, $-xyz$: harmadfokú kifejezések

Definíció A **többtagú egész kifejezés fokszáma** a maximális fokszámú tagjának a fokszáma.

Például: $3x^2 - 2x + 1$, $-5xy + 2x$, $3y^2 + a^2 + xy$: másodfokú

$5x^2y - 3x$, $6a^3 - 5xa + 2$, $x^3 - y^3$: harmadfokú

Definíció Két egytagú kifejezést **egynemű kifejezés**nek nevezünk, ha legfeljebb csak együtthatóikban térnek el egymástól.

Például: $5xy^2$, $-xy^2$, $0{,}5xy^2$: egyneműek

$3xyz$, $-yzx$, $5zxy$: egyneműek

$5a^2$, $13a^2$, $-21a^2$: egyneműek

A nem azonos sorban levő kifejezések nem egyneműek.

5.4. ábra Milyen kár, hogy csak a polinomok szétválogatása után mehetek el a bálba!

Az egynemű tagokat **összevonjuk**, azaz az együtthatóikat előjelhelyesen összeadjuk, és az így kapott együtthatóval leírjuk a kifejezést.

3. példa Vonjuk össze az alábbi kifejezésekben az egynemű tagokat!

a) $3x^2 - 5x + 12x^2 - 6x + 1 + x^3 - 15x^2 - 2x^3 + 13$

b) $103a^2b - 21ab + 10a^2b + 2ab^2 - a^2b + 10ab - 2ab^2$

c) $3xyz - 2xy - (5xzy - 6yx + 2yz) - (2zxy - zy + 2)$

Megoldás:

a) Először gondosan nézzük végig az algebrai kifejezést! Ezután célszerű az egynemű tagokat azonos módon jelölni. Így sokkal áttekinthetőbbé válik a kifejezés, és nem hagyunk ki egyetlen tagot sem az összevonás során.

$$3x^2 - 5x + 12x^2 - 6x + 1 + x^3 - 15x^2 - 2x^3 + 13 = -x^3 - 11x + 14$$

5.5. ábra Először gondoljuk át, utána végezzük el a lehetséges összevonásokat!

b) $$103a^2b - 21ab + 10a^2b + 2ab^2 - a^2b + 10ab - 2ab^2 =$$
$$= 112a^2b - 11ab$$

c) A zárójelbontásnál figyeljünk az előjelekre!
$$3xyz - 2xy - (5xzy - 6yx + 2yz) - (2zxy - zy + 2) =$$
$$= 3xyz - 2xy - 5xzy + 6yx - 2yz - 2zxy + zy - 2 =$$
$$= -4xyz + 4yx - yz - 2$$

Azt tudjuk, hogy **a szorzás az összeadásra nézve disztributív**. Ezt a tulajdonságot felhasználva **a többtagú kifejezések összeszorzását tagonként végezhetjük el.**

4. példa Végezzük el az alábbi műveleteket! A beszorzás után vonjuk össze az egynemű tagokat!

a) $3x(2x - 7)$ b) $5x^2(2x - 3y + x^2)$

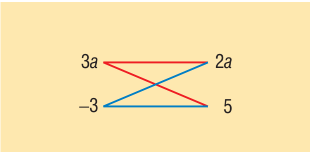
c) $(3a - 3)(2a + 5)$ d) $(a^2 - b)(2a - 3b + 2)$

Megoldás:

a) $3x(2x - 7) = 6x^2 - 21x$

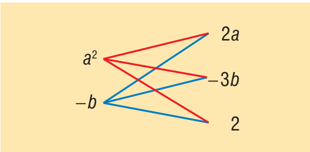
b) $5x^2(2x - 3y + x^2) = 10x^3 - 15x^2y + 5x^4$

c) $(3a - 3)(2a + 5) = 6a^2 + 15a - 6a - 15 = 6a^2 + 9a - 15$



5.6. ábra 4. c) példa

d) $(a^2 - b)(2a - 3b + 2) = 2a^3 - 3a^2b + 2a^2 - 2ab + 3b^2 - 2b$



5.7. ábra 4. d) példa

Oldjuk meg!

1. Válogassuk külön az egynemű kifejezéseket! Határozzuk meg a kifejezések fokszámát!

a) $3x;\quad 5x^2;\quad -x;\quad 3x^3;\quad -2x^2;\quad 0,2x^2;\quad \frac{x^3}{3};\quad \frac{2x}{5}$

b) $12ab;\quad -21a^2b;\quad \frac{ab}{2};\quad -\frac{ab^2}{5};\quad a^2b;\quad 2a^2b^2;\quad -ab^2;\quad \frac{a^2b}{3}$

2. Végezzük el a kijelölt műveleteket, vonjuk össze az egynemű tagokat, és írjuk fokszám szerinti nem növekvő sorrendbe azokat!

a) $x^2 + 4x - (6x^2 - 7x + 4) - (2x - 5x^2)$

b) $5x^4-3x^2-(x^3+4x^4-4)-(x^4+3x^3-2x+7)$

c) $7a^2b^2-2a^2b+5ab^2-(4ab^2-2a^2b-11ab)+21a^2-(12ab-10a^2b^2+11)$

d) $2x^3+x^2-(xy+3x^2y-x)+(5xy^2-2x^2y+2xy)-3x+1-(2x^2-9xy^2)$

e) $abc-a^3+(6ba^2c-3ab^2c-2acb)-(2a^2bc-2cab^2+5abc^2)+72$

f) $2\frac{1}{3}xy-\frac{7}{5}x+\left(3\frac{1}{2}y-\frac{4}{7}xy+2\right)-\left(4\frac{7}{8}x-\frac{3}{4}y-\frac{2}{3}\right)$

3. Legyen $A=\frac{5}{3}x^2-4x+\frac{3}{2}$; $B=-1\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{5}x-2$; $C=2x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$!

Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $3A$ b) $-4B$ c) $A-C$ d) $B+2C$ e) $A+B-C$ f) $-2B-A+C$

4. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $4x(3x^2-4)$ b) $2xy(3x^2-2y+4xy-1)$ c) $(3y-2)(4y+1)$ d) $(5a+2)(2+4a)$

e) $(2-3b)(1+5b)$ f) $(xy-2)(5xy+3)$ g) $(x^2-5)(2x^2+3)$ h) $(4x^2y-a)(a+2x^2y)$

i) $(2x-5)(x^2-3x+1)$ j) $(a^3-2b)(3a^3-2ab+b^2)$ k) $(x^4-1)(x^2-3x+2)$

5. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $3x(x+2)-2(x-5)$ b) $2xy(x-4)-5y(xy-4)$ c) $(a+2)(2a-3)+(a-1)(3a+5)$

d) $(2a-5)(a+1)-(3a-2)(4-a)$ e) $11(2b+5)(b-4)-3(5b+1)(12+2b)$

f) $(y-1)(y+2)(y-3)$ g) $(2x+5)(2-x)(3x-1)$ h) $(x-1)(x+1)x-(x-2)(x+1)(x-1)$

6. Nevezetes szorzatok

6. 1. Két tag összegének, illetve különbségének a négyzete

1. példa Egy kocka éle legyen a!
Adjuk meg, hogy az a értékétől függően hogyan változik a kocka felszíne, ha minden oldalélét 2 egységgel

I. növeljük,

II. csökkentjük!

Megoldás:
Tudjuk, hogy az a élű kockát 6 db a oldalú négyzet határolja, ezért a felszíne $A=6a^2$, ahol a pozitív valós szám.

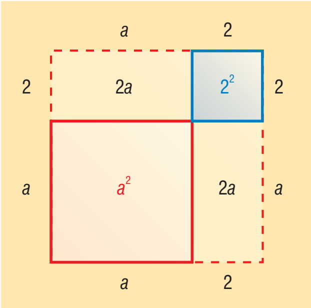
I. A kocka éle: $a_1=a+2$.

Az I. kocka egy oldallapjának területe:

$$a_1^2=(a+2)^2=(a+2)(a+2)=a^2+2a+2a+4=a^2+4a+4.$$

Szemléltessük ábrán! (6.1. ábra)

$(a+2)^2=a^2+4a+4$



6.1. ábra A rajz segít

6.2. ábra Elég lesz a festék?

A kocka felszíne:

$$A_1 = 6a_1^2 = 6a^2 + 24a + 24.$$

A változás:

$$A_1 - A = 6a^2 + 24a + 24 - 6a^2 = 24a + 24.$$

II. Ennek a problémának csak akkor van megoldása, ha $a > 2$.
A kocka éle: $a_2 = a - 2$.
A kocka egy oldallapjának területe:

$$a_2^2 = (a-2)^2 = (a-2)(a-2) = a^2 - 2a - 2a + 4 = a^2 - 4a + 4.$$

A kocka felszíne:

$$A_2 = 6a_2^2 = 6a^2 - 24a + 24.$$

A változás:

$$A_2 - A = 6a^2 - 24a + 24 - 6a^2 = -24a + 24.$$

A feladatban az $a + 2$ és az $a - 2$ kifejezéseket, azaz két tag összegét, illetve két tag különbségét emeltük négyzetre. Nézzük meg ezt általánosan is!
Legyen a két tag a és b. Ekkor:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ és}$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

6.3. ábra $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Tétel Kéttagú összeg négyzetét megkapjuk, ha az első tag négyzetéhez hozzáadjuk az első és második tag kétszeres szorzatát és a második tag négyzetét.

$(a + b)^2 =$
$= a^2 +$
$+ 2ab +$
$+ b^2$

Röviden: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Tétel Kéttagú különbség négyzetét megkapjuk, ha az első tag négyzetéből kivonjuk az első és második tag kétszeres szorzatát, és ehhez hozzáadjuk a második tag négyzetét.

$(a - b)^2 =$
$= a^2 -$
$- 2ab +$
$+ b^2$

Röviden: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

2. példa Végezzük el az alábbi négyzetre emeléseket!

a) $(5c+3b)^2$ b) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{4}y\right)^2$ c) $\left(2x^3 + 3y^2\right)^2$

Megoldás:
Alkalmazzuk az előző azonosságokat úgy, ahogy ezt szavakkal megfogalmaztuk!

a)

Kéttagú összeg négyzetét megkapjuk, ha	$(5c+3b)^2 =$
az első tag négyzetéhez hozzáadjuk	$= (5c)^2 +$
az első és második tag kétszeres szorzatát és	$+\, 2 \cdot 5c \cdot 3b +$
a második tag négyzetét.	$+\, (3b)^2$

Tehát: $(5c+3b)^2 = 25c^2 + 30cb + 9b^2$.

b)

Kéttagú különbség négyzetét megkapjuk, ha	$\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{4}y\right)^2 =$
az első tag négyzetéből kivonjuk	$= \left(\frac{1}{3}x\right)^2 -$
az első és második tag kétszeres szorzatát, és	$-2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot \frac{3}{4}y +$
hozzáadjuk a második tag négyzetét.	$+\left(\frac{3}{4}y\right)^2$

Azaz: $\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{4}y\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{xy}{2} + \frac{9y^2}{16}$.

c) $\left(2x^3 + 3y^2\right)^2 = \left(2x^3\right)^2 + 2 \cdot 2x^3 \cdot 3y^2 + \left(3y^2\right)^2 = 4x^6 + 12x^3y^2 + 9y^4$

3. példa Határozzuk meg három egymást követő négyzetszám összegének a hármas maradékát!

Megoldás:
Vizsgáljunk speciális eseteket a 6.5. ábrán!
Mind a négy esetben 2 a hármas maradék. Így az a sejtés alakulhat ki, hogy **három egymást követő négyzetszám összegének hármas maradéka 2.**

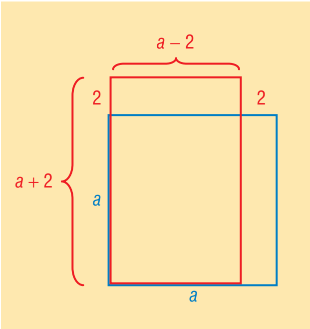
A három egymást követő négyzetszámot három egymást követő természetes szám négyzeteként adhatjuk meg. Legyen a három egymást követő természetes szám $n-1$, n, $n+1$ ($n \in \mathbb{N}^+$). Ez alapján a vizsgált összeg: $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2$. Végezzük el a négyzetre emeléseket a tanult azonosságok alapján, és vonjuk össze az egynemű tagokat! $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2$. Mivel n pozitív egész szám, a kapott összeg hármas maradéka 2. Így bebizonyítottuk sejtésünket.

6.4. ábra Lépésről lépésre

három egymást követő négyzetszám összege	hármas maradék
1+4+9 = 14	2
9+16+25 = 50	2
36+49+64 = 149	2
64+81+100 = 245	2

6.5. ábra Nézzünk néhány példát!

6. 2. Két tag összegének és különbségének a szorzata



6.6. ábra Átalakítás

4. példa Egy négyzet oldala nagyobb, mint 2 egység. Hogyan változik a négyzet területe, ha két szemközti oldalát 2 egységgel csökkentjük, a másik két szemközti oldalát 2 egységgel növeljük?

Megoldás:
Legyen a négyzet oldala a, $a \in \mathbb{R}$, $a > 2$! Ekkor a négyzet területe: $T = a^2$. Ha egy $a > 2$ oldalú négyzet két szemközti oldalát csökkentjük 2-vel, a másik kettőt növeljük 2-vel, akkor olyan téglalapot kapunk, amelynek oldalai $a - 2$ és $a + 2$ egység hosszúak. Ennek területe $t = (a - 2)(a + 2)$. Végezzük el a kifejezések szorzását! Ekkor $t = a^2 + 2a - 2a - 4 = a^2 - 4 = T - 4$. Tehát a négyzet területe 4 területegységgel csökken.

A feladat kapcsán egy újabb nevezetes szorzattal ismerkedünk meg, két tag összegének és különbségének a szorzatával. Jelöljük a két tagot a-val és b-vel!

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

6.7. ábra A tudás fája

Tétel Két tag összegének és különbségének a szorzatát megkapjuk, ha az első tag négyzetéből kivonjuk a második tag négyzetét.

$(a+b)(a - b) =$
$= a^2 -$
$- b^2$

Röviden: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

5. példa Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}a\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}a\right)$ b) $\left(\frac{a^4}{5}+b^2c^3\right)\left(\frac{a^4}{5}-b^2c^3\right)$

Megoldás:
a)

Két tag összegének és különbségének a szorzatát megkapjuk,	$\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}a\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}a\right)=$
ha az első tag négyzetéből kivonjuk	$=\left(\frac{2}{3}x\right)^2-$
a második tag négyzetét.	$-\left(\frac{1}{5}a\right)^2$

Röviden: $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}a\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}a\right)=\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{25}a^2.$

b) $\left(\frac{a^4}{5}+b^2c^3\right)\left(\frac{a^4}{5}-b^2c^3\right)=\left(\frac{a^4}{5}\right)^2-\left(b^2c^3\right)^2=\frac{a^8}{25}-b^4c^6$

6. 3. További nevezetes azonosságok

Két tag összegének, illetve különbségének a köbe

6. példa Vizsgáljuk meg, hogyan változik az 1. példában szereplő kocka térfogata az I. és a II. esetben!

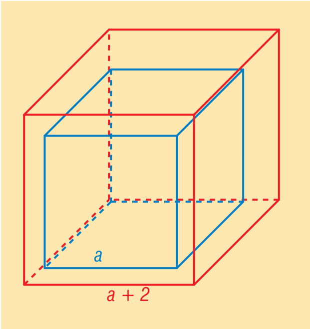
Megoldás:
Az a élű kocka térfogata: $V=a^3$.
I. A kocka térfogata:

$$V_1=a_1^3=(a+2)^3=(a+2)^2(a+2)=(a^2+4a+4)(a+2)=$$
$$=a^3+2a^2+4a^2+8a+4a+8=a^3+6a^2+12a+8.$$

A változás: $V_1-V=6a^2+12a+8$.
II. A kocka térfogata:

$$V_2=a_2^3=(a-2)^3=(a-2)^2(a-2)=(a^2-4a+4)(a-2)=$$
$$=a^3-2a^2-4a^2+8a+4a-8=a^3-6a^2+12a-8.$$

A változás: $V_2-V=-6a^2+12a-8$.



6.8. ábra A kocka minden élét két egységgel növeltük

Két tag összegének és különbségének a köbét számoltuk ki az előző példában. Nézzük ezt általánosan!

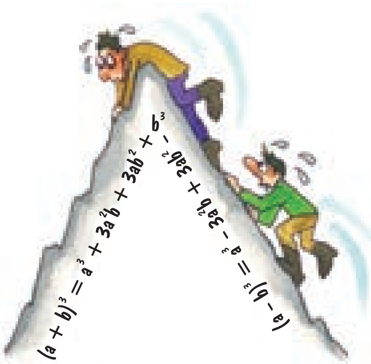
$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$
$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$$
$$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Tétel

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

7. példa Végezzük el a köbre emeléseket!

a) $(x+4)^3$ b) $\left(\frac{2}{3}c-3b\right)^3$



6.9. ábra Ha átlendülünk a nehézén, utána könnyebben fog menni

Megoldás:
Az eddigi példák alapján már elég rutint lehetett szerezni ahhoz, hogy egyből az algebrai alakot írjuk fel.
a) $(x+4)^3=x^3+3x^2\cdot 4+3x\cdot 4^2+4^3=x^3+12x^2+48x+64$

6.10. ábra Először felbontjuk a zárójelet …

b) $\left(\frac{2}{3}c-3b\right)^3=\left(\frac{2}{3}c\right)^3-3\left(\frac{2}{3}c\right)^2\cdot 3b+3\cdot\frac{2}{3}c\cdot(3b)^2-(3b)^3=$

$=\frac{8}{27}c^3-4c^2b+18cb^2-27b^3$

Fontos szorzatok

8. példa Végezzük el az alábbi szorzásokat!

a) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Megoldás:

a) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3$,

azaz $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3=a^3-b^3$,

azaz $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Erre a két azonosságra elsősorban a szorzattá alakítás kapcsán lesz szükség.

Tétel

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Háromtagú összeg négyzete:

9. példa Végezzük el az alábbi négyzetre emelést!

$(a+b+c)^2$

Megoldás:

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)=$$
$$=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

Tétel $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

6.11. ábra Ezt sem nehéz „négyzetre” emelni

10. példa Végezzük el az alábbi négyzetre emelést!

$\left(2x-3y+\frac{1}{2}z\right)^2$

Megoldás:

$\left(2x-3y+\frac{1}{2}z\right)^2=\left(2x+(-3y)+\frac{1}{2}z\right)^2=(2x)^2+(-3y)^2+\left(\frac{1}{2}z\right)^2+$

$+2\cdot 2x\cdot(-3y)+2\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}z+2\cdot(-3y)\cdot\frac{1}{2}z=4x^2+9y^2+\frac{z^2}{4}-12xy+2xz-3yz$

Oldjuk meg!

1. Végezzük el az alábbi négyzetre emeléseket!

a) $(x-10)^2$ b) $(b+7)^2$ c) $\left(4x-\frac{3}{2}\right)^2$ d) $\left(3y+\frac{5}{8}\right)^2$ e) $\left(\frac{a}{3}+\frac{3c}{4}\right)^2$

f) $\left(\frac{2}{5}y-10z\right)^2$ g) $\left(a^3-4x^4\right)^2$ h) $\left(\frac{c^2}{6}+\frac{12b^5}{7}\right)^2$ i) $\left(\frac{3}{4}x^2y-\frac{2}{3}xy^3\right)^2$

j) $\left(\frac{5}{7}a^4b^2+\frac{14}{5}a^3b\right)^2$ k) $\left(2\frac{1}{3}b^2c-3b^4c^3\right)^2$ l) $\left(\frac{4}{5}a^nb^{n-1}-\frac{5}{4}a^{n-2}b^{n+1}\right)^2$

2. Alkalmazzuk a két tag összegének és különbségének szorzatára vonatkozó azonosságot!

a) $(a+12)(a-12)$ b) $(2x-5)(2x+5)$ c) $(3b-4c)(3b+4c)$ d) $\left(\frac{x}{5}+\frac{2y}{3}\right)\left(\frac{x}{5}-\frac{2y}{3}\right)$

e) $\left(\frac{4}{3}a-\frac{2}{5}b\right)\left(\frac{4}{3}a+\frac{2}{5}b\right)$ f) $\left(5b^2+c^3\right)\left(5b^2-c^3\right)$ g) $\left(\frac{x^4}{4}-\frac{5y^5}{3}\right)\left(\frac{x^4}{4}+\frac{5y^5}{3}\right)$

3. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(a-3)^2+(a+3)^2+(a+3)(a-3)$ b) $2(x+4)^2-3(x-2)^2-(x-1)(x+1)$

c) $\frac{1}{2}(2a+12)^2+(a-6)^2-3(a+5)^2$ d) $\left(a^4-b^2\right)^2-2\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)+\frac{2}{9}\left(3a^4+6b^2\right)^2$

4. Mennyi a négyes maradéka négy egymást követő négyzetszám összegének?

5. Mennyi az ötös maradéka öt egymást követő négyzetszám összegének?

6. Fogalmazzuk meg szavakkal a két tag összegének, ill. különbségének köbére vonatkozó azonosságot!

7. Fogalmazzuk meg szavakkal a háromtagú összeg négyzetére vonatkozó azonosságot!

8. Végezzük el az alábbi köbre emeléseket!

a) $(2x-3y)^3$ b) $(a+4b)^3$ c) $\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{3}c\right)^3$ d) $\left(1\frac{1}{3}x+y\right)^3$

e) $\left(b^2-2c^3\right)^3$ f) $\left(3y^4+2z^5\right)^3$

9. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(a+2)(a^2-2a+4)$ b) $(x-3)(x^2+3x+9)$

c) $(y^2-4)(y^4+4y^2+16)$ d) $(a^3+1)(a^6-a^3+1)$

10. Végezzük el az alábbi négyzetre emeléseket!

a) $(a+2b+c)^2$ b) $(2x+3y+5)^2$

c) $(a-4b+c)^2$ d) $(x-y-2z)^2$

11. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $(x-2y)^3+(2x+y)^3-(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

b) $(3a+2b)^3-(2a-3b)^3+(4a+b)(16a^2-4ab+b^2)$

7. Polinomok szorzattá alakítása

7.1. ábra Kiemelés

7.2. ábra Minden megvan?

1. példa Határozzuk meg az x azon valós értékeit, amelyek esetén az alábbi egyhatározatlanú polinomok helyettesítési értéke nulla!

a) $2x^2 - 4x$ b) $x^5 - 9x^3$ c) $x^2 - 4x + 4$ d) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

Megoldás:

A polinomok helyettesítési értékének definíciója alapján olyan alaphalmazbeli számokat keresünk, melyeket az x helyébe helyettesítve a kifejezés értéke nulla lesz. Az ilyen számokat a **polinom gyökeinek** nevezzük. A magasabb fokú polinomok gyökeinek keresésében az egyik leghasznosabb módszer a szorzattá alakítás, mert egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

a) Tanultuk, hogy a szorzás disztributív az összeadásra nézve, azaz $c(a + b) = ca + cb$. Ha az egyenlőség jobb oldalából indulunk ki, akkor a $\boldsymbol{ca + cb = c(a + b)}$ **összefüggés azt fejezi ki, hogy a *c*-t kiemeltük** azokból a tagokból, amelyekben szorzótényezőként szerepelt, és **ezzel a *ca* + *cb* kifejezést szorzattá alakítottuk**.

Ez alapján alakítsuk szorzattá a $2x^2 - 4x$ polinomot!

A kifejezés mindkét tagjában szerepel x, és mindkét tag együtthatója páros.	$2x^2 - 4x =$
Alakítsuk át a polinomot úgy, hogy az egyes tagokban megjelenjen szorzótényezőként a $2x$!	$= 2x \cdot x - 2x \cdot 2 =$
Ezután emeljük ki a $2x$-et!	$= 2x(x - 2)$
Ezzel kaptunk egy háromtényzős szorzatot,	$2x(x - 2)$
amelynek első tényezője	2,
a második	x,
a harmadik egy kéttagú kifejezés,	$x - 2$.
A feladat szerint azt keressük, hogy ez a szorzat mikor lesz nulla, azaz	$2x(x - 2) = 0$.

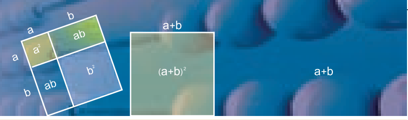
Használjuk fel, hogy egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$, vagy $x - 2 = 0$, azaz $x = 2$! Tehát a polinom gyökei a 0, illetve a 2.

b) Mivel $x^5 = x^3 \cdot x^2$, ezért mind a két tagban megjeleníthető az x^3 szorzótényezőként. Ezután **alakítsunk szorzattá kiemeléssel**!

$$x^5 - 9x^3 = x^3 \cdot x^2 - x^3 \cdot 9 = x^3(x^2 - 9)$$

Tudjuk, hogy $9 = 3^2$, ezért írjuk fel a kifejezést az alábbi módon!

$$x^5 - 9x^3 = x^3(x^2 - 3^2)$$



A második tényezőben két tag négyzetének a különbsége szerepel, amelyről eszünkbe juthat az előző leckében tanult azonosság, azaz $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Ha ennél az egyenlőségnél a jobb oldalból indulunk ki, akkor a tanult **azonosság alapján szorzattá alakítjuk két tag négyzetének a különbségét**, azaz $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$.

$$x^5 - 9x^3 = x^3(x^2 - 3^2) = x^3(x + 3)(x - 3)$$

Ezzel megint egy háromtényezős szorzatot kaptunk,	$x^3(x + 3)(x - 3)$
melynek első tényezője	x^3,
a második	$x + 3$,
a harmadik	$x - 3$.

Tehát $x^5 - 9x^3 = x^3(x + 3)(x - 3)$. Mivel egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezért $x^3 = 0$, vagy $x + 3 = 0$, vagy $x - 3 = 0$. Így a polinom gyökei: 0, –3 és 3.

c) Az $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2$ háromtagú összeg emlékeztethet minket az $a^2 - 2ab + b^2$ kifejezésre, amelyről tudjuk, hogy $a - b$ négyzetével egyenlő. Így $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = (x - 2)^2$. Mivel az $(x - 2)^2$ csak abban az esetben nulla, ha $x - 2 = 0$, így $x = 2$. A polinom gyöke a 2. Ebben a feladatban is **azonosságot alkalmaztunk a szorzattá alakításhoz**.

d) Az $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ polinom szorzattá alakítása már némi gyakorlatot igényel.

Azt észrevehetjük, hogy az első két tagban az x^2, a második két tagban a 4 jeleníthető meg szorzótényezőként.	$x^2 \cdot x + 2 \cdot x^2 -$ $- 4 \cdot x - 4 \cdot 2 =$
Emeljünk ki az első két tagból x^2-et, a második két tagból –4-et!	$= x^2 \cdot (x + 2) -$ $- 4(x + 2) =$
Megjelent mindkét tagban az $x + 2$ szorzótényezőként, így azt kiemelhetjük.	$= (x + 2)(x^2 - 4) =$
Az $x^2 - 4$ a két tag négyzetének különbsége alapján szorzattá alakítható.	$= (x + 2)(x + 2)(x - 2) =$ $= (x + 2)^2(x - 2)$

Tehát $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x + 2)^2(x - 2)$. A kapott kifejezés pontosan akkor nulla, ha $x = -2$ vagy $x = 2$. A polinom gyökei tehát a –2 és a 2.

Az előző példában a szorzattá alakítás két fontos módszerét ismertük meg. Az egyik a **kiemelés**, a másik a **nevezetes azonosságok** alkalmazása. A **kiemelés történhet csoportosítással**, mint ezt a d) részben láttuk.

7.3. ábra Dugonics András (1740–1818)

Dugonics András szegedi városi kapitány és Imre Katalin fia. Piarista szerzetes, író, egyetemi tanár, nyelvújító, a magyar algebrai műnyelv megalkotója.

A Magyar Hírmondó 1784. január 28-án megjelent száma így tudósít Dugonics András matematikai munkásságáról: „A BETŰSZÁMVETÉS, az a babonás szer, melynek számozásával a természetnek csoda titkos törvényeire egészen béhat az ésszel földet, tengert, poklot, eget nyugtalanul öszszejárkáló ember, az az áldott ALGEBRA, bátor szövevényes állapot magában, és tulajdonul maga nyelvén magával eszmélkedő rejtekmélység, ihol Pesten immár oly teljes magyaron nyomtatódik, hogy semmi idegen szót nem kölcsönöz más nemzettől.”

(Forrás: www.wikipédia.org; Gazda István: Reáltudományaink történetéből)

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 73 2012.06.25. 14:14:06

2. példa Alakítsuk szorzattá kiemeléssel az alábbi polinomokat!

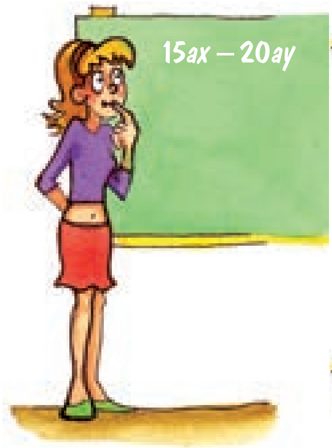
a) $15ax - 20ay$ b) $8x^4y - 12x^2y$ c) $25x^2y - 15xy + 10xy^2$

Megoldás:

a) $15ax - 20ay = 5a \cdot 3x - 5a \cdot 4y = 5a(3x - 4y)$

b) $8x^4y - 12x^2y = 4x^2y \cdot 2x^2 - 4x^2y \cdot 3 = 4x^2y \cdot (2x^2 - 3)$

c) $25x^2y - 15xy + 10xy^2 = 5xy \cdot x - 5xy \cdot 3 + 5xy \cdot 2y = 5xy(x - 3 + 2y)$



7.4. ábra Először kiemeljük az 5*a*-t

3. példa Alakítsuk szorzattá csoportosítással és kiemeléssel!

a) $ax - az + bx - bz$ b) $4ax + 3bx - 4ay - 3by$

c) $12ab + 18ac + 2b + 3c$ d) $10x^2 + 21dc - 14xd - 15xc$

e) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9$

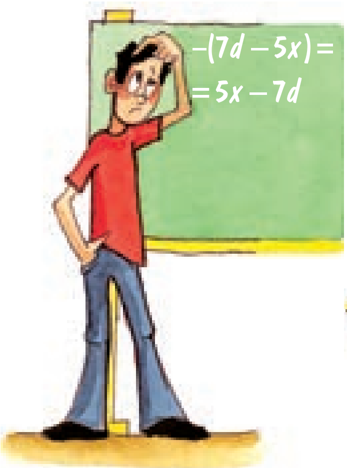
Megoldás:

a) $ax - az + bx - bz = a(x - z) + b(x - z) = (x - z)(a + b)$

b) $4ax + 3bx - 4ay - 3by = x(4a + 3b) - y(4a + 3b) =$
$= (4a + 3b)(x - y)$

c) $12ab + 18ac + 2b + 3c = 6a(2b + 3c) + 1(2b + 3c) =$
$= (2b + 3c)(6a + 1)$

d) $10x^2 + 21dc - 14xd - 15xc = 10x^2 - 14xd + 21dc - 15xc =$
$= 2x(5x - 7d) + 3c(7d - 5x)$.



7.5. ábra Ezt vegyük észre!

Vegyük észre, hogy ha a $(7d - 5x)$-et megszorozzuk -1-gyel, akkor az $(5x - 7d)$-t kapjuk, vagyis $5x - 7d = -(7d - 5x)$!
Ez alapján $2x(5x - 7d) + 3c(7d - 5x) = 2x(5x - 7d) - 3c(5x - 7d) =$
$= (5x - 7d)(2x - 3c)$.

Tehát $10x^2 + 21dc - 14xd - 15xc = (5x - 7d)(2x - 3c)$.

e) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9 = a^2(a + 3) + 3(a + 3) = (a + 3)(a^2 + 3)$

4. példa Alakítsuk szorzattá a két tag összegének, illetve különbségének négyzetére vonatkozó azonosságok alkalmazásával!

a) $4a^2 - 12a + 9$ b) $9x^2 + 6x + 1$

c) $25x^4 - 20x^2y + 4y^2$ d) $a^6 - 8a^3 + 16$

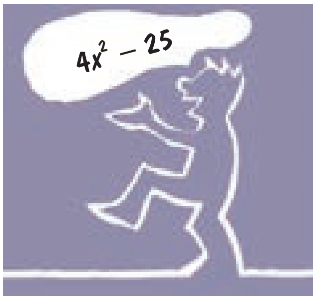
Megoldás:

a) $4a^2 - 12a + 9 = (2a)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2a + 3^2 = (2a - 3)^2$

b) $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x + 1 = (3x + 1)^2$

c) $25x^4 - 20x^2y + 4y^2 = (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 2y + (2y)^2 = (5x^2 - 2y)^2$

d) $a^6 - 8a^3 + 16 = (a^3)^2 - 2 \cdot 4 \cdot a^3 + 4^2 = (a^3 - 4)^2$



7.6. ábra Alakítsuk szorzattá!

5. példa Alakítsuk szorzattá a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosság alapján!

a) $4x^2-25$ b) $\frac{9}{49}a^2-81b^2$ c) $36a^6-49b^8$

d) $(a-4)^2-4x^2$ e) $(b-3)^2-25$

Megoldás:

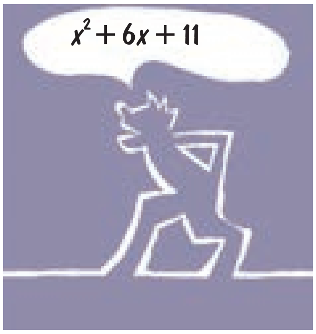
a) $4x^2-25=(2x)^2-5^2=(2x+5)(2x-5)$

b) $\frac{9}{49}a^2-81b^2=\left(\frac{3}{7}a\right)^2-(9b)^2=\left(\frac{3}{7}a+9b\right)\left(\frac{3}{7}a-9b\right)$

c) $36a^6-49b^8=\left(6a^3\right)^2-\left(7b^4\right)^2=\left(6a^3+7b^4\right)\left(6a^3-7b^4\right)$

d) $(a-4)^2-4x^2=(a-4)^2-(2x)^2=(a-4+2x)(a-4-2x)$

e) $(b-3)^2-25=(b-3)^2-5^2=(b-3+5)(b-3-5)=(b+2)(b-8)$



7.7. ábra Egészítsük ki teljes négyzetté!

6. példa Az alábbi kifejezéseket alakítsuk át úgy, hogy a változó csak egy kéttagú összeg négyzetében szerepeljen! (Ezt az átalakítást nevezik **teljes négyzetté kiegészítés**nek.)

a) $x^2+6x+11$ b) $x^2-8x+15$

c) $x^2+12x+11$ d) $3x^2-12x+9$

Megoldás:

a) $x^2+6x+11=x^2+2\cdot 3x+9+2=(x+3)^2+2$

b) $x^2-8x+15=x^2-2\cdot 4x+16-1=(x-4)^2-1$

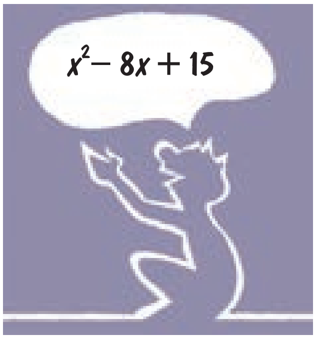
c) $x^2+12x+11=x^2+2\cdot 6x+36-25=(x+6)^2-25$

d) $3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3\left(x^2-2\cdot 2x+4-1\right)=$

$=3\left[(x-2)^2-1\right]=3(x-2)^2-3$

7. példa Alakítsuk szorzattá teljes négyzetté kiegészítéssel és a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosság felhasználásával az alábbi kifejezéseket!

a) $x^2-8x+15$ b) $x^2+12x+11$ c) $3x^2-12x+9$



7.8. ábra Számoljunk boldogan

Megoldás:

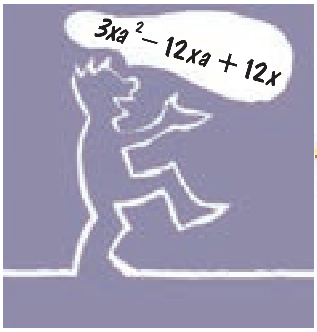
Használjuk fel az előző feladat eredményeit!

a) $x^2-8x+15=(x-4)^2-1=(x-4)^2-1^2=(x-4+1)(x-4-1)=$

$=(x-3)(x-5)$

b) $x^2+12x+11=(x+6)^2-25=(x+6)^2-5^2=$

$=(x+6+5)(x+6-5)=(x+11)(x+1)$



7.9. ábra Kellő gyakorlás után már könnyen megy

c) $3x^2 - 12x + 9 = 3\left[(x-2)^2 - 1\right] = 3(x-2+1)(x-2-1) =$

$= 3(x-1)(x-3)$

8. példa Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $a^4b^2 - a^2b^4 - a^2 + b^2$ b) $3xa^2 - 12xa + 12x$

c) $81 - x^2 + 6xy - 9y^2$ d) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

Megoldás:

a) $a^4b^2 - a^2b^4 - a^2 + b^2 = a^2b^2(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2) =$

$= (a^2 - b^2)(a^2b^2 - 1) = (a+b)(a-b)(ab+1)(ab-1)$

b) $3xa^2 - 12xa + 12x = 3x(a^2 - 4a + 4) = 3x(a-2)^2$

c) $81 - x^2 + 6xy - 9y^2 = 81 - (x^2 - 6xy + 9y^2) = 9^2 - (x - 3y)^2 =$

$= (9 + x - 3y)(9 - x + 3y)$

d) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 = a^2(a+b) - b^2(a+b) = (a+b)(a^2 - b^2) =$

$= (a+b)(a+b)(a-b) = (a+b)^2(a-b)$

Oldjuk meg!

1. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $3ax - 9a$ b) $14a^3 - 21a^2$ c) $18x^6 - 24x^4$ d) $ab^3 + a^4b^2$ e) $25a^4b^3 - 15a^2b^2 - 35a^3b^4$

2. Alakítsuk szorzattá!

a) $4ax - 4bx + 3ay - 3by$ b) $x^2 - xa - 4x + 4a$ c) $21a^2 + 20bc - 28ab - 15ac$

d) $24xa - 12xy + 5yb - 10ab$ e) $y + y^2 + y^3 + y^4$

3. Alakítsuk szorzattá!

a) $a^2 - 12a + 36$ b) $144x^2 + 72xy + 9y^2$ c) $y^4 - 16y^2 + 64$ d) $\frac{9}{4}b^6 - 6b^3c^4 + 4c^8$ e) $4a^2 - 81$

f) $x^4 - y^4$ g) $16a^6 - \frac{b^2}{9}$ h) $(2x-3)^2 - y^2$ i) $(a+2)^2 - 36$ j) $\frac{49}{121}(b-5)^2 - 64$ k) $(x-5)^2 - (y+2)^2$

4. Alakítsuk szorzattá!

a) $x^2 - 8x + 12$ b) $x^2 + 10x + 16$ c) $x^2 - 24x + 119$

d) $5x^2 - 30x + 25$ e) $-3x^2 + 12x - 9$ f) $-2x^2 - 20x - 48$

5. Alakítsuk szorzattá!

a) $x^2 - y^2 - x - y$ b) $14ax - 28ax^2 + 14ax^3$ c) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 6y$

d) $16 - 4x^2 + 20xy - 25y^2$ e) $a^3 - 6a^2 - 4a + 24$ f) $x^4 + x^2 + 1$

6. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit!

a) $x^2 - 12x$ b) $24x^2 - 16x$ c) $x^2 - 20x + 100$ d) $16x^2 + 24x + 9$

e) $x^2 - 10x + 9$ f) $x^2 + 14x + 13$ g) $16x^4 - x^2$ h) $x^3 - x^2 + x - 1$

7. Írjuk fel két tag összegének vagy különbségének köbeként!

a) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ b) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

d) $c^3 - 6c^2 + 12c - 8$ e) $27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

8. Alkalmazzuk az $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ és az $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosságot!

a) $x^3 - 8$ b) $y^3 + 27$ c) $a^3 - 1$ d) $125c^3 + 1$ e) $8a^3 - 27b^3$ f) $64x^3 + 125y^3$

8. Műveletek algebrai törtek között

Az algebrai törteket egyszerűsíthetjük, végezhetünk közöttük összevonást, szorzást és osztást, akárcsak a racionális számok között. A műveletek végrehajtása is nagyon hasonló az ott megismertekhez.

8. 1. Algebrai törtek egyszerűsítése

1. példa Hozzuk egyszerűbb alakra a következő törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{3a^3-2a^2}{9a^2-4}$ b) $\dfrac{12x^2-48}{9x^2-36x+36}$ c) $\dfrac{4x^4-4y^4}{16x^3y+16xy^3}$

Megoldás:

a) Értelmezzük a törteket! Keressük meg a nevezőben szereplő polinom gyökeit! Ilyen feladattal már az előző leckében is foglalkoztunk, a polinom szorzattá alakítása segített a megoldásban.

$9a^2-4=(3a)^2-2^2=(3a+2)(3a-2)=0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $3a+2=0$ vagy $3a-2=0$. Ebből a nevező gyökei: $-\dfrac{2}{3}$ és $\dfrac{2}{3}$.

A tört értelmezési tartománya az $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right\}$ halmaz. A tört egyszerűsítéséhez alakítsuk szorzattá a számlálót is! $3a^3-2a^2=a^2(3a-2)$.

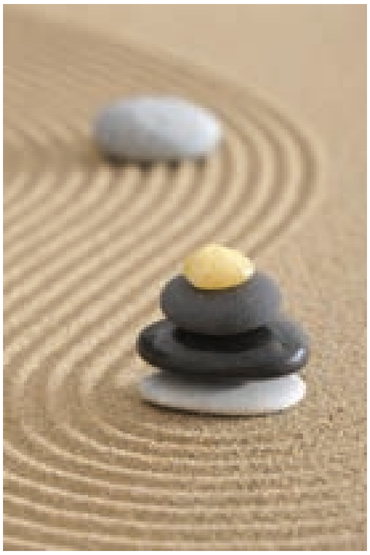
Így $\dfrac{3a^3-2a^2}{9a^2-4}=\dfrac{a^2(3a-2)}{(3a+2)(3a-2)}=\dfrac{a^2}{3a+2}$.

b) Értelmezzük a törtet! $9x^2-36x+36=9(x^2-4x+4)=9(x-2)^2=0$. Pontosan akkor teljesül, ha $x=2$. Így az értelmezési tartomány: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$\frac{12x^2-48}{9x^2-36x+36}=\frac{12(x^2-4)}{9(x-2)^2}=\frac{12(x-2)(x+2)}{9(x-2)^2}=\frac{4(x+2)}{3(x-2)}=\frac{4x+8}{3x-6}.$$

c) A tört értelmezéséhez megint alakítsuk szorzattá a nevezőt!
$16x^3y+16xy^3=16xy(x^2+y^2)=0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x=0$, vagy $y=0$. Tehát egyik sem lehet 0.

$$\frac{4x^4-4y^4}{16x^3y+16xy^3}=\frac{4\left(\left(x^2\right)^2-\left(y^2\right)^2\right)}{16xy(x^2+y^2)}=\frac{4\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{16xy\left(x^2+y^2\right)}=\frac{x^2-y^2}{4xy}.$$



8.1. ábra Törekedjünk az egyszerűségre

8. 2. Algebrai törtek összevonása

2. példa Végezzük el az alábbi összevonásokat a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\frac{3}{5x}+\frac{x+2}{3x^2}-\frac{7}{15x}$ b) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}+\frac{x-4}{x^2+2x}$

Megoldás:

a) Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Az összevonásnál közös nevezőre kell hoznunk a törteket. Mivel $15x^2=3x\cdot 5x=5\cdot 3x^2=x\cdot 15x$, ezért közös nevezőnek a $15x^2$-et érdemes választani, ezzel a választással a lehető legegyszerűbb számlálót alakíthatjuk ki. Ezt érdemes mindig szem előtt tartani a közös nevezőre hozásnál.

$$\frac{3}{5x}+\frac{x+2}{3x^2}-\frac{7}{15x}=\frac{9x+5(x+2)-7x}{15x^2}=\frac{9x+5x+10-7x}{15x^2}=\frac{7x+10}{15x^2}.$$

8.2. ábra Összevonás előtt

b) A törtek értelmezéséhez alakítsuk szorzattá a nevezőket!
$x^2-4=(x-2)(x+2)=0$ akkor és csak akkor, ha $x=2$, vagy $x=-2$.
$x-2=0$ akkor és csak akkor, ha $x=2$.
$x^2+2x=x(x+2)=0$ akkor és csak akkor, ha $x=0$ vagy $x=-2$.
Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$.

$$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x-2}+\frac{x-4}{x(x+2)}=$$

Mivel az $x(x-2)(x+2)$ az $(x-2)(x+2)$-nek x-szerese, az $x-2$-nek $x(x+2)$-szerese és az $x(x+2)$-nek $x-2$-szerese, ezért ezt érdemes közös nevezőnek választani, mert így a számláló is a lehető legegyszerűbb lesz.

$$=\frac{2x-x(x+2)+(x-4)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{2x-x^2-2x+x^2-2x-4x+8}{x(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{-6x+8}{x(x-2)(x+2)}$$

8.3. ábra Összevonás után

8. 3. Algebrai törtek szorzása, osztása

3. példa Végezzük el az alábbi műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\frac{x^2-4x}{x+2}\cdot\frac{x-2}{x^2-16}$ b) $\frac{x^2-10x+25}{6x-18}\cdot\frac{5x-15}{x^2-25}$

c) $\frac{6x^2-96}{12x^2-108x}:\frac{x^2+4x}{2x^2-162}$

Megoldás:

a) Mivel $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$, ezért az értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{-2;4;-4\}$. Az algebrai törtek szorzását ugyanúgy végezzük, mint a racionális törtszámok szorzását. Alakítsuk szorzattá a számlálókat, ill. a nevezőket, és ha lehet, egyszerűsítsünk.

$$\frac{x^2-4x}{x+2}\cdot\frac{x-2}{x^2-16}=\frac{x(x-4)}{x+2}\cdot\frac{x-2}{(x-4)(x+4)}=$$

Egyszerűsítsünk $x - 4$-gyel és végezzük el a számlálók, ill. a nevezők összeszorzását!

$$=\frac{x(x-2)}{(x+2)(x+4)}=\frac{x^2-2x}{x^2+6x+8}$$

b) Mivel $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, és $6x - 18 = 6(x - 3)$, ezért az értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{-5;3;5\}$.

$$\frac{x^2-10x+25}{6x-18}\cdot\frac{5x-15}{x^2-25}=\frac{(x-5)^2}{6(x-3)}\cdot\frac{5(x-3)}{(x-5)(x+5)}=\frac{5(x-5)}{6(x+5)}=\frac{5x-25}{6x+30}.$$

c) Az értelmezésnél figyelembe kell venni, hogy az osztó számlálója sem lehet nulla. Emiatt a következő szorzatokat kell vizsgálni: $12x^2 - 108x = 12x(x - 9)$, $x^2 + 4x = x(x + 4)$ és $2x^2 - 162 = 2(x^2 - 81) = 2(x - 9)(x + 9)$. Mivel egyik sem lehet 0, így az értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{-9;-4;0;9\}$. A törtek osztási szabálya értelmében:

$$\frac{6x^2-96}{12x^2-108x}:\frac{x^2+4x}{2x^2-162}=\frac{6x^2-96}{12x^2-108x}\cdot\frac{2x^2-162}{x^2+4x}=$$

$$=\frac{6(x^2-16)}{12x(x-9)}\cdot\frac{2(x-9)(x+9)}{x(x+4)}=\frac{6(x-4)(x+4)}{12x(x-9)}\cdot\frac{2(x-9)(x+9)}{x(x+4)}=$$

$$=\frac{(x-4)(x+9)}{x^2}=\frac{x^2+9x-4x-36}{x^2}=\frac{x^2+5x-36}{x^2}.$$

8.4. ábra Az idő is könnyebben repül, ha élvezettel számolunk

4. példa Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

$$\left(\frac{x+4}{2x-8}-\frac{x-4}{2x+8}+\frac{32}{x^2-16}\right):\frac{4}{x-4}$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{-4;4\}$.

$$\left(\frac{x+4}{2x-8}-\frac{x-4}{2x+8}+\frac{32}{x^2-16}\right):\frac{4}{x-4}=$$

$$=\left(\frac{x+4}{2(x-4)}-\frac{x-4}{2(x+4)}+\frac{32}{(x-4)(x+4)}\right)\cdot\frac{x-4}{4}=$$

$$=\frac{(x+4)^2-(x-4)^2+64}{2(x-4)(x+4)}\cdot\frac{x-4}{4}=\frac{16x+64}{2(x-4)(x+4)}\cdot\frac{x-4}{4}=$$

$$=\frac{16(x+4)}{2(x-4)(x+4)}\cdot\frac{x-4}{4}=2$$

8.5. ábra Mivel nullával nem osztunk …

Oldjuk meg!

1. Egyszerűsítsük az alábbi algebrai törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-2x}$ b) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-9x}$ c) $\dfrac{(x-4)^2-81}{5x^2-65x}$ d) $\dfrac{x^2-2x-15}{x^3-10x^2+25x}$

e) $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-12x+32}$ f) $\dfrac{10a^2+20ab+10b^2}{15a^4-15b^4}$ g) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$ h) $\dfrac{5a^2-5b^2}{10a^3+10b^3}$

2. Végezzük el az összevonásokat a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{6}{7x^3}-\dfrac{x-6}{3x^2}+\dfrac{11}{21x}$ b) $\dfrac{6}{2x+6}-\dfrac{3x-9}{x^2+6x+9}$ c) $\dfrac{5-y}{y^2-8y+16}+\dfrac{6}{5y-20}$

d) $\dfrac{3y+1}{y^2}+\dfrac{2y-3}{y^2+y}-\dfrac{5y-2}{y^2-y}$ e) $\dfrac{a+3}{2a+2}-\dfrac{2a-1}{2a-2}-\dfrac{a-3}{2a^2-2}$ f) $\dfrac{5y-3}{y^2+3y}-\dfrac{y+1}{3y^2+9y}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{y+3}$

g) $\dfrac{3}{a^2-1}+\dfrac{2}{a^2+2a+1}-\dfrac{5}{a^2-2a+1}$ h) $\dfrac{2a^2+4a}{a^3-8}-\dfrac{3-a}{a^2+2a+4}+\dfrac{1}{a-2}$

3. Végezzük el az alábbi műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{x^2}{x^2-1}\cdot\dfrac{x-1}{x}$ b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}\cdot\dfrac{x^2-4x}{6x^2-24x}$ c) $\dfrac{5x^2+100x+500}{x^2-100}\cdot\dfrac{4x^2-80x+400}{x^2+10x}$

d) $\dfrac{a^2-9}{a+2}:\dfrac{a-3}{2a+4}$ e) $\dfrac{2x-12}{2x-5}:\dfrac{x^2-12x+36}{4x^2-25}$ f) $\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}:\dfrac{a^3b-b^3a}{a^2b+ab^2}$

4. Végezzük el az alábbi műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{x^2-16}{10x+2}:\left(\dfrac{21x}{10x+2}-2\right)$ b) $\left(\dfrac{a+2}{a-1}-\dfrac{2}{a^2-1}\right):\dfrac{a+3}{a^2-1}$ c) $\left(\dfrac{2a+1}{5a-1}+\dfrac{3-2a}{5a+1}\right):\dfrac{24a-2}{25a^2-1}$

9. Számelmélet

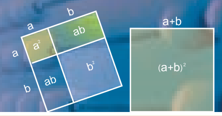
9. 1. Oszthatóság

9.1. ábra Osztozzunk!

A korábbi leckékben már találkoztunk olyan feladatokkal, amelyekben előkerült az oszthatóság. Például megnéztük, hogy ha egy kétjegyű számból kivonjuk a számjegyeinek az összegét, akkor a kilenc egész számú többszörösét kapjuk, vagy három egymást követő egész szám összege a három egész számú többszöröse.

Definíció Az a **természetes szám osztója** a b **természetes számnak,** ha létezik olyan q természetes szám, hogy $b = a \cdot q$. Jele: $a \mid b$ (olvasd: a osztója b-nek).

Megjegyzés:
Megtehetjük azt is, hogy az osztó, oszthatóság fogalmakat az egész számokra kiterjesztve definiáljuk. Ekkor az alábbi definíciót kapnánk.



Definíció Az a **egész számot** a b **egész szám osztójának** nevezzük, ha létezik olyan q egész szám, amelyre $b = a \cdot q$ teljesül.

Példák:
$5 | 20$, mert $20 = 5 \cdot 4$
$-3 | 15$, mert $15 = (-3) \cdot (-5)$
$0 | 0$, mert $0 = 7 \cdot 0$

9.2. ábra Néhány példa

A továbbiakban a természetes számok halmazán megfogalmazott oszthatóságot tartjuk szem előtt.

Az oszthatóság tulajdonságai: az alábbiakban $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

1. tulajdonság Bármely természetes szám osztója önmagának, azaz $a | a$.

$5|5$, mert $5 = 1 \cdot 5$
$2008|2008$, mert $2008 = 1 \cdot 2008$

9.3. ábra Néhány példa

Bizonyítás:
Mivel az 1 természetes szám, és $a = 1 \cdot a$, ezért igaz.

2. tulajdonság Ha $a | b$ és $b | c$, akkor $a | c$.

$3|12$ és $12|36$, ezért $3|36$
$19|57$ és $57|171$, ezért $19|171$

9.4. ábra Néhány példa

Bizonyítás:
Mivel $a | b$, ezért létezik olyan q természetes szám, amelyre $b = a \cdot q$ teljesül. Mivel $b | c$, ezért létezik olyan q' természetes szám, amelyre $c = b \cdot q'$ teljesül. Így $c = a \cdot q \cdot q'$, ahol $q \cdot q'$ természetes szám, így $a | c$.

3. tulajdonság Ha egy természetes szám osztója egy összeg mindkét tagjának, akkor osztója az összegnek is, azaz ha $a | b$ és $a | c$ akkor $a | b + c$.

$7|49$ és $7|77$, ezért
$7|(49 + 77)$, azaz $7|126$

$13|39$ és $13|91$, ezért
$13|(39 + 91)$, azaz $13|130$

9.5. ábra Néhány példa

Bizonyítás:
Mivel $a | b$, ezért létezik olyan q természetes szám, amelyre $b = a \cdot q$ teljesül. Mivel $a | c$, ezért létezik olyan q' természetes szám, amelyre $c = a \cdot q'$ teljesül. Így $b + c = a \cdot q + a \cdot q' = a(q + q')$, ahol $q + q'$ természetes szám, így $a | b + c$.

4. tulajdonság Ha egy természetes szám osztója egy összegnek és osztója az összeg egyik tagjának, akkor osztója az összeg másik tagjának is, azaz ha $a | b + c$ és $a | b$, akkor $a | c$.

$17|170$ és $17|51$, ezért
$17|(170 - 51)$, azaz $17|119$

$23|299$ és $23|230$, ezért
$23|(299 - 230)$, azaz $23|69$

9.6. ábra Néhány példa

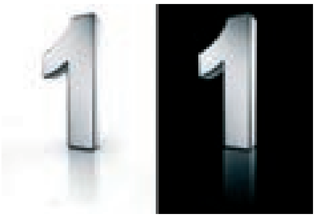
Bizonyítás:
Ha $a = 0$, akkor $b + c = 0$ és $b = 0$, így $c = 0$, tehát $a | c$. Ha $a \neq 0$, akkor $a | b + c$, ezért létezik olyan q természetes szám, amelyre $b + c = a \cdot q$ teljesül. Mivel $a | b$, ezért létezik olyan q' természetes szám, amelyre $b = a \cdot q'$ teljesül. Így $c = b + c - b = a \cdot q - a \cdot q' = a(q - q')$, ahol $q - q'$ természetes szám, mert $b + c \geq b$, így $q \geq q'$, tehát $a | c$.

5. tulajdonság Ha $a | b$ és $c | d$, akkor $ac | bd$. Ha $c = 1$ akkor az $a | bd$, azaz ha egy természetes szám osztója egy másiknak, akkor ezen szám bármely többszörösének is osztója.

$11|55$ és $8|48$, így $88|2640$
$13|52$ és $7|42$, így $91|2184$

9.7. ábra Néhány példa

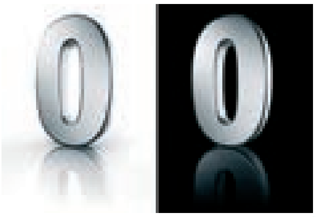
Bizonyítás:
Mivel $a|b$, ezért létezik olyan q természetes szám, amelyre $b = a \cdot q$ teljesül. Mivel $c|d$, ezért létezik olyan q' természetes szám, amelyre $d = c \cdot q'$ teljesül. Így $bd = a \cdot q \cdot c \cdot q' = ac \cdot qq'$, ahol qq' természetes szám, így $ac|bd$.


9.8. ábra $a = 1$

6. tulajdonság Ha $a|1$, akkor $a = 1$.

Bizonyítás:
Mivel $a|1$, ezért $a \leq 1$ és a pozitív egész, mert a nulla nem osztója az 1-nek, így $a = 1$.

7. tulajdonság Ha $a|b$ és $b|a$ akkor $a = b$.


9.9. ábra $a = b$

Bizonyítás:
1. Ha valamelyik 0, pl. legyen $a = 0$. Ebben az esetben a feltétel csak úgy teljesülhet, ha mindkettő nulla, így $a = b$. A $b = 0$ hasonlóan igazolható.
2. Ha mindkettő pozitív, ekkor az $a|b$ miatt $a \leq b$, és $b|a$ miatt $b \leq a$, így $a = b$.

1. példa Az alábbi állítások közül melyik igaz?
a) Ha $7|12x + 5y$, akkor $7|31x + 24y$, ahol x, y természetes számok.
b) Ha négy különböző természetes szám összege osztható néggyel, akkor legalább az egyik osztható néggyel.

Megoldás:
a) Mivel tudjuk, hogy $7|12x + 5y$, ezért érdemes a $31x + 24y$ kifejezést átalakítani úgy, hogy megjelenjen benne a $12x + 5y$ valahányszorosa és egy 7-tel osztható kifejezés.

$$31x + 24y = 24x + 10y + 7x + 14y = 2(12x + 5y) + 7(x + 2y)$$

Mivel az első tag a feltétel miatt, a második a definíció miatt osztható 7-tel, ezért a 3. tulajdonság alapján $7|31x + 24y$. Tehát az állítás igaz.
b) Az állítás nem igaz, például:$1 + 5 + 9 + 13 = 28$. Az összeg osztható néggyel, de a tagok közül egyik sem.

2. példa Két négyzetszám összege osztható hárommal. Igaz-e, hogy mindkét négyzetszám osztható kilenccel?

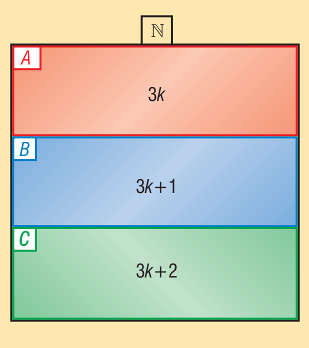
$1 = 0 \cdot 3 + 1$
$4 = 1 \cdot 3 + 1$
$9 = 3 \cdot 3 + 0$
$16 = 5 \cdot 3 + 1$
$25 = 8 \cdot 3 + 1$
$36 = 12 \cdot 3 + 0$

9.10. ábra Néhány példa

Megoldás:
Vizsgáljuk meg a négyzetszámok hármas maradékát! Hármas maradék szempontjából a természetes számok három diszjunkt halmazba sorolhatók, az egyikbe a $3k$, a másikba a $3k + 1$, a harmadikba a $3k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$ alakú számok tartoznak. Ezért a négyzetszámok a következő alakban írhatók fel: $(3k)^2$; $(3k+1)^2$; $(3k+2)^2$. Végezzük

el a négyzetre emeléseket: $9k^2$; $9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$; $9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$. Az első típusba tartozó négyzetszámok oszthatók 3-mal, a másodikba és a harmadikba tartozók pedig egy 3-mal osztható számnak és az 1-nek az összegeként írhatók fel, így a hármas maradékuk 1. **Tehát a négyzetszámok hármas maradéka 0 vagy 1.**

A feltétel szerint a két négyzetszám összege osztható 3-mal. A 4. tulajdonság miatt az nem lehet, hogy az egyik osztható hárommal, a másik nem. Ha egyik sem lenne osztható hárommal, akkor mindkét négyzetszám hármas maradéka 1 lenne, így az összegé 2, tehát nem lenne 3-mal osztható. Így csak az az eset lehet, hogy mindkét négyzetszám osztható 3-mal, de akkor 9-cel is. Ebben az esetben tényleg teljesül, hogy a két szám összege osztható 3-mal. **Tehát a két négyzetszám osztható kilenccel.**



9.11. ábra Szemléltetés Venn-diagramon

9. 2. Prímszám, összetett szám, a számelmélet alaptétele

A pozitív osztók száma szempontjából a természetes számok négy, páronként diszjunkt halmazba oszthatók:

1. Az 1-nek pontosan egy pozitív osztója van.

2.

Definíció Az olyan pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztójuk van, **prímszám**oknak nevezzük.

pl.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

9.12. ábra Prímszámok

3.

Definíció Az olyan pozitív egész számokat, amelyeknek kettőnél több pozitív osztójuk van, **összetett szám**oknak nevezzük.

pl.: 12, 21, 39, 45

9.13. ábra Összetett számok

4. A 0-nak végtelen sok pozitív osztója van.

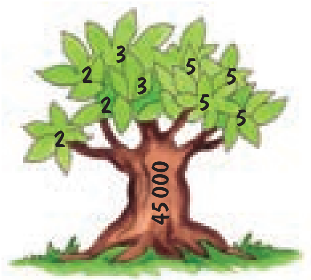
3. példa Írjuk fel a 45 000-t prímszámok szorzataként!

Megoldás:

Már általános iskolában is tanultuk, hogy miként lehet felbontani egy összetett számot prímszámok szorzatára. Keressük meg azt a legkisebb prímet, amellyel a 45 000 osztható. Ez a 2. Így $45\,000 = 2 \cdot 22\,500$. Ezután ezt a lépést ismételjük meg a 22 500-zal, azaz keressük meg azt a legkisebb prímszámot, amellyel a 22 500 osztható. Ez is a 2, $22\,500 = 2 \cdot 11250$. Ezt az eljárást folytatjuk addig, míg az eredmény prímszám nem lesz. Oldalt láthatjuk a prímtényezők praktikus megkeresését. Így $45\,000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4$. Ezt a felírást nevezzük prímhatványtényezős, vagy kanonikus alaknak. Egy prímszám kanonikus alakja egyenlő önmagával.

45000	2
22500	2
11250	2
5625	3
1875	3
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

9.14. ábra Felbontás prímtényezőkre



9.15. ábra Törzs és tényezői

Ezt az egyértelmű felbontást bármely összetett számmal elvégezhetjük. Erről szól a számelmélet alaptétele.

Tétel A számelmélet alaptétele:
bármely összetett szám, a tényezők sorrendjétől eltekintve, egyértelműen írható fel prímszámok szorzataként.

4. példa Hány pozitív osztója van a 45 000-nek?

Megoldás:
A 45 000 pozitív osztóinak kanonikus alakjában a prímek közül csak a 2, a 3 vagy az 5 szerepelhet, méghozzá a 2 legfeljebb a harmadik, a 3 legfeljebb a második és az 5 legfeljebb a negyedik hatványon. Olyan is előfordulhat, hogy ezek közül valamelyik prím nem szerepel a kanonikus alakban. Az összeszámlálásban segít a 9.16. táblázat. A 45 000 bármely pozitív osztóját előállíthatjuk úgy, hogy a táblázat minden oszlopából pontosan egy számot kiválasztunk, és a kapott három számot összeszorozzuk. Mivel az első oszlopból négy, a másodikból három, a harmadikból öt szám közül választhatunk, így összesen $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ pozitív osztója van a 45 000-nek.

1	1	1
2	3	5
2^2	3^2	5^2
2^3		5^3
		5^4

9.16. ábra Segédtáblázat a pozitív osztók meghatározásához

5. példa Hány négyzetszám osztója van a 45 000-nek?

Megoldás:
Az 1 négyzetszám és osztója a 45 000-nek. Mit mondhatunk az egynél nagyobb négyzetszámok kanonikus alakjáról? **Mivel előállnak egynél nagyobb pozitív egészek négyzeteként, ezért a szorzat és a hatvány hatványozására vonatkozó azonosság alapján minden prímhatvány kitevője páros,** pl.

$$\left(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7\right)^2 = \left(2^3\right)^2 \cdot \left(3^2\right)^2 \cdot \left(5^5\right)^2 \cdot 7^2 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^{10} \cdot 7^2.$$

Ez igaz fordítva is, azaz **ha az egynél nagyobb pozitív egész szám kanonikus alakjában minden prímhatvány kitevője páros, akkor az a szám négyzetszám.**

$$\text{Pl. } 2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^{12} \cdot 7^2 = \left(2^4\right)^2 \cdot \left(3^3\right)^2 \cdot \left(5^6\right)^2 \cdot 7^2 = \left(2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 7\right)^2.$$

A példákban látott módszerek felhasználásával lehet bizonyítani a két állítást. Ez alapján a 45 000 négyzetszám osztóinak kanonikus alakjában csak a következő prímhatványok szerepelhetnek: 2^2, 3^2, 5^2, 5^4. Az összeszámlálásban egy, a negyedik példában használt táblázathoz hasonló táblázat és az ahhoz kapcsolódó módszer segít. A négyzetszám osztók száma: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

1	1	1
2^2	3^2	5^2
		5^4

9.17. ábra Segédtáblázat a négyzetszám osztók meghatározásához

Már Eukleidész Elemek című művében is szerepel az alábbi tétel és bizonyítása. (A mű elolvasható interneten is a http://mek.oszk.hu címen.)

9.18. ábra Eukleidész Kr. e. 300 körül élt, az alexandriai matematikusiskola megalapítója.

Tétel Végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, azaz véges sok prímszám van. Legyenek ezek a prímek: $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$! Legyen $t = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$! Az előállításból (konstrukcióból) következően az t szám nem lehet osztható a $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$ prímszámok egyikével sem, de biztosan van prímosztója, mert 1-nél nagyobb szám. Tehát létezik a $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$ prímszámokon kívül még prímszám. Ezzel ellentmondásra jutottunk, így az a feltevés, hogy véges sok prímszám van, helytelen. Ebből következően végtelen sok prímszám létezik.

(Ezt a bizonyítási módszert **indirekt bizonyításnak** nevezzük. Lényege: feltesszük az állítás ellentettjéről, hogy igaz, és ebből kiindulva, helyes következtetésekkel ellentmondásra jutunk. Ez azt jelenti, hogy a feltételezésünk helytelen volt, így az eredeti állítás igaz.)

A bizonyítás lenyűgözően elegáns, ötletes és egyszerű.

A prímszámok mindig is a számelmélettel foglalkozók figyelmének középpontjában álltak. Sokan próbálkoztak és próbálkoznak ma is prímképletek előállításával.

6. példa Van-e olyan $x \in \mathbb{Z}^+$ szám, amelyre az $x^2 + x + 17$ polinom helyettesítési értéke nem prím?

Megoldás:
Először próbálkozzunk, hátha találunk a „kicsi” pozitív egész számok között ilyen értéket! Készítsünk egy táblázatot! (9.20. ábra)

A kapott helyettesítési értékek mindegyike prím. Eddig az ilyen jellegű példákban néhány eset vizsgálata után megfogalmaztunk egy sejtést. Ezt most is megtehetjük. Sejtés: az $x^2 + x + 17$ polinom helyettesítési értéke minden $x \in \mathbb{Z}^+$ esetén prím.

Mivel a prímszámok szabálytalanul helyezkednek el a pozitív egész számok között, nehéznek, megfoghatatlannak tűnik a sejtés bizonyítása. Foglalkozzunk a polinommal! Alakítsuk át egy kicsit: $x^2 + x + 17 = x(x + 1) + 17$. Némi gondolkodás után rájöhetünk arra, hogy $x = 16$ esetén a helyettesítési érték:

$$16(16 + 1) + 17 = 16 \cdot 17 + 17 = 17 \cdot 17,$$

ami nem prím. Tehát találtunk olyan pozitív egész számot, amely esetén a polinom helyettesítési értéke nem prím. A sejtés helytelennek bizonyult. A feltett kérdésre a válasz: igen, pl. $x = 16$.

A feladattal kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy 1-től 15-ig az összes pozitív egész számra prím az $x^2 + x + 17$ polinom helyettesítési értéke. A prímszámkeresés mindig sok embert foglalkoztatott.

Az Elemek című könyvről

Az i. e. 300 körül összeállított matematikai munka a második legtöbb kiadást megért írás az emberiség történetében (ebben csak a Biblia előzi meg), és évszázadokon keresztül a „helyes” és „tiszta” gondolkodás mintaképe volt. A legtöbb ország iskoláiban még ma is nagy hangsúlyt fektetnek az Elemek geometriájának oktatására, nem is annyira annak hasznossága miatt, hanem inkább azért, mert a műnek és tartalmának didaktikai erényei vitathatatlanok. Persze az axiomatikus-deduktív matematikai kifejtés e remekműve nem egyetlen szerző munkásságának az eredménye, hanem több matematikusnemzedék erőfeszítéseinek közös gyümölcse, melyet Eukleidész „csak” összegyűjtött, egységes formába öntött és közreadott. A könyvet feltétlenül el kell olvasnia mindenkinek, aki érdeklődik a matematika története iránt.

Forrás: http://hps.elte.hu/~kutrovatz/courses/gorog/EuklT.html

9.19. ábra Egy kis érdekesség

x	helyettesítési érték
1	19
2	23
3	29
4	37
5	47

9.20. ábra Nézzünk néhány példát!

9.21. ábra Mindig magasabbra!

Az ezzel kapcsolatos ismereteknek és legfrissebb eredményeknek a http://www.mersenne.org/prime.htm angol nyelvű honlapon lehet utánanézni. A legnagyobb, ma (2008. augusztus 28.) ismert prímszám $2^{43\,112\,609}-1$, amelyet 2008. augusztus 23-án talált két amerikai matematikus. A számnak 12 978 189 számjegye van. Megjegyezzük érdekességként, hogy 100 000 dollárt ajánlottak fel annak a személynek vagy csoportnak, akik először találnak olyan prímet, amely számjegyeinek a száma tízmillió fölé megy. Ez az összeg már gazdára talált.

9. 3. Oszthatósági szabályok

7. példa Melyek azok az $\overline{xyzv}$ négyjegyű pozitív egész számok, amelyek oszthatók a) 2-vel, b) 5-tel, c) 4-gyel, d) 3-mal, illetve 9-cel, e) 11-gyel ?

$4 \mid 37596$, mert $4 \mid 96$

$3 \mid 51$, mert $5+1=6$ és $3 \mid 6$.

$9 \mid 27549$, mert $2+7+5+4+9=27$ és $9 \mid 27$.

$11 \mid 215644$, mert $2-1+5-6+4-4=0$ és $11 \mid 0$.

9.22. ábra Nézzünk néhány példát!

Megoldás:

a), b) Az $\overline{xyzv}=1000x+100y+10z+v$, ahol x nullától különböző, y, z és v pedig tetszőleges számjegyek. Az első három tag mindegyike osztható 10-zel, így 2-vel és 5-tel is. Ezért a 3. és a 4. oszthatósági szabály alapján az $\overline{xyzv}$ szám pontosan akkor lesz 2-vel, illetve 5-tel osztható, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel, illetve 5-tel.

c) Mivel az $1000x$ és a $100y$ osztható 4-gyel, ezért a 3. és a 4. oszthatósági szabály alapján a szám pontosan akkor lesz osztható 4-gyel, ha a $10z+v$ osztható néggyel, azaz az utolsó két számjegyéből képezett szám osztható néggyel.

d) Alakítsuk át a kifejezést az alábbi módon!

$1000x+100y+10z+v=999x+99y+9z+(x+y+z+v)$.

Az első három tag osztható 9-cel, így 3-mal is. Tehát a szám pontosan akkor osztható 3-mal, illetve 9-cel, ha az $x+y+z+v$ kifejezés, azaz a számjegyek összege osztható 3-mal, illetve 9-cel.

e) Az 1001, a 99, a 11 és a 0 osztható 11-gyel. Így alakítsuk át a kifejezést az alábbi módon:

$$1000x+100y+10z+v=1001x+99y+11z+(v-z+y-x).$$

Az első három tag mindegyike osztható 11-gyel, ezért az $\overline{xyzv}$ szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha a $v-z+y-x$ összeg osztható 11-gyel.

Az előző feladatban tapasztaltakat általánosan is megfogalmazhatjuk, és természetesen ezek bizonyíthatók is.

Tétel Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 2-vel (5-tel), ha az utolsó számjegye osztható 2-vel (5-tel).

Tétel Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel (25-tel), ha az utolsó két számjegyéből képezett kétjegyű szám osztható 4-gyel (25-tel).

Tétel Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 3-mal (9-cel), ha a számjegyeinek az összege osztható 3-mal (9-cel).

Tétel Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha számjegyeit az utolsótól kezdve váltakozó előjellel összeadva a kapott összeg osztható 11-gyel.

8. példa Prímszám-e
a) a $2^{2008}+3^{2010}$, b) a $10^{2009}+11$, c) az első öt pozitív számjegy valamilyen sorrendjével felírt ötjegyű szám?

Megoldás:
a) Vizsgáljuk meg a 2 és a 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak a végződését. Ehhez készítsünk táblázatokat!
Mindkét esetben a végződések négyes periódussal ismétlődnek. A hatvány végződése attól függ, hogy mennyi a kitevő négyes maradéka. Mivel a 2008 osztható néggyel, ezért a 2^{2008} hatra végződik, akárcsak a 2^4. A 2010 négyes maradéka 2, ezért a 3^{2010} 9-re végződik, akárcsak a 3^2. A két szám összege 5-re végződik, ezért osztható öttel, és nagyobb, mint öt, így nem prímszám.

b) A tíz 2009. hatványának a tízes számrendszerbeli alakjában egy darab 1-es és 2009 db 0 szerepel. Ha ehhez hozzáadunk 11-et, akkor a kapott szám számjegyeinek az összege 3, így osztható hárommal. Mivel nagyobb háromnál, így nem prím.
c) A felírt számok mindegyikében az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek szerepelnek, tehát a számjegyeik összege azonos, méghozzá 15. Így mindegyik osztható hárommal, és nagyobb háromnál, tehát egyik sem prím.

9.25. ábra Prím? Príma? Prímás!

9.23. ábra Van három kívánságod

kettő-hatvány	végződés
2	2
2^2	4
2^3	8
2^4	6
2^5	2
2^6	4
2^7…	8…

három-hatvány	végződés
3	3
3^2	9
3^3	7
3^4	1
3^5	3
3^6	9
3^7…	7…

9.24. ábra Nézzünk néhány példát!

9. 4. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

9.26. ábra Ifjú kémikus

9.27. ábra Ifjú fizikus

1	2	3	4	6	12
1	2	4	7	14	28

(12,28) = 4

9.28. ábra Nézzünk egy példát!

9. példa Két iskola tantestülete megegyezett abban, hogy a 9. évfolyamos diákjaik között a természettudományi tárgyakból csapatversenyt szerveznek. Az egyik iskolából 80-an, a másikból 72-en vesznek részt a vetélkedőn. A csapatok létszáma azonos, és minden csapatban csak iskolatársak lehetnek együtt. Hány fősek legyenek a csapatok, hogy számuk, ilyen feltételek mellett, a lehető legkevesebb legyen? Mennyi ekkor a csapatok száma?

Megoldás:
Mivel a csapatok létszáma azonos, ezért ez a szám a 80-nak és a 72-nek is osztója, tehát **közös osztójuk**. Mivel a csapatok számának minimálisnak kell lennie, ezért a 80 és a 72 **közös osztói közül a legnagyobbat keressük**. Ennek meghatározását már általános iskolában is tanultuk. Írjuk fel mindkét szám kanonikus alakját: $80 = 5 \cdot 2^4$ és $72 = 2^3 \cdot 3^2$. A közös osztóban csak olyan prímtényező szerepelhet, amely mindkét számnak osztója, ez jelen esetben a 2. A kitevője legfeljebb 3 lehet, mert különben nem lenne osztója a 72-nek. Mivel a legnagyobb ilyen tulajdonságú számot keressük, ezért a csapatlétszám: $2^3 = 8$. **Ezt a számot nevezzük a 80 és a 72 legnagyobb közös osztójának.** Jelölés $(80; 72) = 8$. Tehát a csapatok száma legalább $10 + 9 = 19$.

10. példa Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\dfrac{8100}{16632}$ b) $\dfrac{6336}{2275}$

Megoldás:
a) Egyszerűsítés esetén a számláló és a nevező legnagyobb közös osztóját kell meghatároznunk, és azzal kell elosztani a két számot. Mivel $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $16632 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$, ezért $(16200; 16632) = 2^2 \cdot 3^3 =$ $= 108$, így $\dfrac{8100}{16632} = \dfrac{75}{154}$.

b) Mivel $6336 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11$ és $2275 = 5^2 \cdot 7 \cdot 13$, ezért a két számnak nincs közös prímosztója, így a legnagyobb közös osztójuk 1. Az ilyen számokat **relatív prímeknek** nevezzük. Ebből kifolyólag a tört nem egyszerűsíthető.

Definíció Két pozitív egész szám közös osztói közül a legnagyobbat a két szám **legnagyobb közös osztó**jának nevezzük. Ha a két szám *a* és *b*, akkor a jelölés: $(a; b)$.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 88 2012.06.25. 14:16:08

Két egynél nagyobb egész szám legnagyobb közös osztóját előállíthatjuk a két szám kanonikus alakjából úgy, hogy vesszük a közös prímtényezőket – ha vannak – az előforduló legkisebb kitevőjű hatványon, és az így kapott prímhatványokat összeszorozzuk. Ha nincs közös prímtényezőjük, akkor a legnagyobb közös osztójuk 1.

Definíció Ha két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor azokat **relatív prím**eknek nevezzük.

$\boxed{(36;25) = 1}$

9.29. ábra Nézzünk egy példát!

Be lehet bizonyítani, hogy két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója minden közös osztójuknak a többszöröse.

Kettőnél több pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját is értelmezhetjük. A meghatározás a pozitív egész számok kanonikus alakjából történhet. Például: $(6336;\ 8100;\ 16632) = (2^6 \cdot 3^2 \cdot 11;\ 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2;\ 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

11. példa Közös végállomásról indul a 84-es busz és a 9-es troli. A menetrend szerint délelőtt 9 órától 13 óráig a troli 8 percenként, a busz 20 percenként indul. 9 órakor egyszerre hagyja el a végállomást egy busz és egy troli. Ez hányszor fog még bekövetkezni 13 óráig?

9.30. ábra Csúcsforgalom

Megoldás:

Először nézzük meg, hogy kilenc óra után mikor indul először egyszerre egy troli és egy busz! Most olyan pozitív egész számot keresünk, amelynek a 8 és a 20 közös osztója. Mivel a legkisebb ilyen számra van szükségünk, ezért **a két szám legkisebb közös többszörösét** keressük. Ennek jele: [8; 20]. A számok kanonikus alakja: $8 = 2^3$ és $20 = 2^2 \cdot 5$. Mivel mindkét számnak többszöröse, ezért a 2 és az 5 szerepel a prímtényezői között, és a 2 kitevője legalább három, az 5-é pedig legalább 1. Ennél nagyobb nem lehet, és más prímszám sem szerepelhet a kanonikus alakjában, mert a legkisebb ilyen számot keressük. Tehát a $[8;\ 20] = 2^3 \cdot 5 = 40$. Legközelebb 9 óra 40 perckor indulnak egyszerre, és ez negyven percenként megismétlődik. Mivel 9 órától 13 óráig négy óra, azaz 240 perc telik el, ezért 9 óra után ez $240 : 40 = 6$ esetben fog még bekövetkezni.

12. példa Végezzük el az alábbi műveletet!

$$\frac{1}{8100} - \frac{1}{16632}$$

Megoldás:

A két tört közös nevezőre hozásához a nevezők legkisebb közös többszörösét kell megkeresnünk. Ehhez az előző feladatban felvázolt elvet kell követnünk. A két szám kanonikus alakja: $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $16\,632 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$. A legkisebb közös többszörös: $[8100;\ 16\,632] = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 89 2012.06.25. 14:16:14

Így $\dfrac{1}{8100}-\dfrac{1}{16632}=\dfrac{2\cdot 7\cdot 11-3\cdot 5^2}{2^3\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}=\dfrac{79}{1247400}$.

3 6 9 12 15 18...
4 8 12 16 20 24

[3,4] = 12

9.31. ábra Nézzünk egy példát!

Definíció Két pozitív egész szám közös pozitív többszörösei közül a legkisebbet a két szám **legkisebb közös többszörösének** nevezzük. Ha a két szám *a* és *b*, akkor a jelölés: [*a*; *b*].

Két egynél nagyobb egész szám legkisebb közös többszörösét előállíthatjuk a két szám kanonikus alakjából úgy, hogy vesszük a bennük szereplő prímszámokat az előforduló legnagyobb kitevőjű hatványon, és az így kapott prímhatványokat összeszorozzuk.

Be lehet bizonyítani, hogy két pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse minden közös többszörösüknek az osztója.
Természetesen kettőnél több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösét is értelmezhetjük. A meghatározás a pozitív egész számok kanonikus alakjából történhet.

Például: $[6336;\ 8100;\ 16632]=[2^6\cdot 3^2\cdot 11;\ 2^2\cdot 3^4\cdot 5^2;\ 2^3\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11]=$ $=2^6\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11=9\,979\,200$.

9.32. ábra Püthagorasz

13. példa A $\overline{53x37y}$ hatjegyű számban határozzuk meg az *x* és *y* számjegyeket úgy, hogy osztható legyen 36-tal!

Megoldás:
Egy pozitív egész szám pontosan akkor osztható 36-tal, ha osztható 4-gyel és 9-cel, mert a két szám relatív prím, így legkisebb közös többszörösük a szorzatuk. Alkalmazzuk a néggyel oszthatóság szabályát! Eszerint $4\,|\,\overline{53x37y}$ akkor és csak akkor, ha $4\,|\,\overline{7y}$, azaz ha $y=2$ vagy $y=6$. A kilenccel oszthatóság szabálya szerint $9\,|\,\overline{53x37y}$ akkor és csak akkor, ha $9\,|\,5+3+x+3+7+y$. Eszerint $y=2$ esetében $9\,|\,20+x$ kell, hogy teljesüljön, így $x=7$. Az $y=6$ esetében $9\,|\,24+x$ kell, hogy teljesüljön, azaz $x=3$. A két hatjegyű szám: 537 372, 533 376.

9.33. ábra Leonhard Euler

Már Püthagorasz iskolájában megjelent önálló területként a számelmélet. A püthagoraszi szemlélet *„a dolgok természete, lényege: a szám”* tételben foglalható össze. Megvizsgálták a számok oszthatóságának kérdéseit, és különböző számokhoz különböző tulajdonságokat kapcsoltak. Ezek máig is élő számelméleti problémákhoz vezettek. Így például tökéletes számnak nevezték azokat a pozitív egész számokat, amelyek egyenlők a náluk kisebb pozitív osztóik összegével. Ilyen pl. a 6 = 1+2+3 vagy a 28 = 1+2+4+7+14. Manapság tökéletes számoknak az olyan pozitív egész számokat nevezzük, melyek kétszerese egyenlő pozitív osztóik összegével. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük: már Eukleidész bizonyította, hogy a $2^{p-1}(2^p-1)$ alakú számok – ahol a 2^p-1 prímszám – tökéletes számok. A 2^p-1 alakú szám csak akkor lehet prímszám, ha p is prímszám. Az ilyen prímszámokat Marin Mersenne (1588–1648) francia matematikusról Mersenne-prímeknek nevezték el. A leckében közölt, ma ismert legnagyobb prímszám is ilyen alakú. Leonhard Eulernek (1707–1783) sikerült bizonyítania, hogy a páros számok közül csak a $2^{p-1}(2^p-1)$ alakú számok lehetnek tökéletes számok. A ma ismert legnagyobb tökéletes szám: $2^{43\,112\,608}(2^{43\,112\,609}-1)$. Még nem sikerült bizonyítani, hogy végtelen sok Mersenne-prím, így azt sem, hogy végtelen sok páros tökéletes szám van. Az is nyitott kérdés, hogy van-e páratlan tökéletes szám. A görögök közül még érdemes megemlítenünk Eratoszthenész és Diophantosz nevét. Eratoszthenész eljárást adott a prímszámok kiválogatására. Ezt a módszert a szakirodalomban Eratoszthenész szitája néven lehet megtalálni. Diophantosz olyan problémákat tárgyal az Arithmetika című művében, melyek racionális együtthatójú, racionális megoldásokkal rendelkező egyenletekhez vezetnek. Az ő nevét az úgynevezett diphantoszi egyenletek őrzik. Ezek olyan egész együtthatós algebrai egyenletek, melyek megoldásait az egész vagy racionális számok körében keressük.

Rendszeres és tudatos számelméleti kutatásról Pierre Fermat (1601–1665) óta beszélünk. Az ő nevéhez fűződik az a tétel, amely 350 évig megoldatlan probléma volt, és izgalomban tartotta a matematikus társadalmat. Az általa éppen olvasott könyv (Diophantosz egyik műve) margójára az alábbiakat írta: „Lehetetlen egy köbszámot felírni két köbszám összegeként, vagy egy negyedik hatványt felírni két negyedik hatvány összegeként; általában lehetetlen bármely magasabb hatványt felírni két ugyanolyan hatvány összegeként. Igazán csodálatos bizonyítást találtam erre a tételre, de ez a margó túlságosan keskeny, semhogy ideírhatnám.” A tétel röviden annyi, hogy az $x^n+y^n=z^n$, $(n\in\mathbb{Z}^+\setminus\{1;2\})$ egyenletnek nincs megoldása a rendezett pozitív egész számhármasok körében. Fermat később sehol sem tesz említést erről a bizonyításról, így nagy valószínűséggel rájött, hogy az helytelen volt. A problémával nagyon sok matematikus foglalkozott, de csak 1995-ben sikerült bebizonyítania Andrew Wiles angol matematikusnak hét évi, titokban végzett munka után. Először 1993-ban publikálta bizonyítását, amelyről kiderült, hogy hibás. Egy tanítványa segítségével 1994 őszére kiküszöbölte a hibát, így 1995-ben elfogadták bizonyítását.

A számelmélettel kapcsolatban mindenképpen meg kell említenünk Legendre (1752–1833), Lagrange (1736–1813) francia matematikusok és Carl Friedrich Gauss (1777–1855) német matematikus nevét. Gauss összegyűjtötte a számelmélet – amelyet ő a matematika királynőjének nevezett – eredményeit, és azt olyan mértékben egészítette ki, hogy az Aritmetikai vizsgálatok című művének 1801-es megjelenésétől szokás számítani a modern számelmélet kezdetét.

9.34. ábra Pierre Fermat

9.35. ábra Carl Friedrich Gauss

9.36. ábra Andrew Wiles

Oldjuk meg!

1. Öt különböző egész szám összege osztható 5-tel. Lehet-e, hogy közülük
a) egyik sem osztható 5-tel;
b) az egyik osztható 5-tel, a többi nem;
c) kettő osztható 5-tel, három nem;
d) három osztható 5-tel, kettő nem;
e) egy osztható 5-tel, négy nem?

2. Ebben a feladatban állításokat fogalmaztunk meg. Minden állítást jellemezz egy-egy betűvel: A = biztosan igaz, B = lehetetlen, C = lehet igaz is, de nem biztos!
a) Négy természetes szám összege páros.
b) Öt prímszám összege páratlan.
c) $5 \mid 6^{2009} + 7^{2008}$
d) Van olyan prímszám, amelyben a számjegyek összege 2007.
e) Ha x hetes maradéka 2, és y hetes maradéka 4, akkor $7 \mid 4x + 5y$.
f) Ha $12 \mid n^2$, akkor $12 \mid n$.
g) Meg tudunk adni kilenc egész számot úgy, hogy összegük és szorzatuk is –9 legyen.

3. Milyen számjegyre végződik a $2^{103} \cdot 3^{52} \cdot 6^{78} \cdot 7^{21}$ szorzat?

4. Van-e olyan x és y természetes szám, amelyre teljesül, hogy a 17 osztója a $20x - 11y$-nak, de nem osztója a $46x + 7y$-nak?

5. Határozzuk meg a négyzetszámok lehetséges utolsó számjegyét! Négyzetszám-e a $10^{2010} + 10^{1005} + 7$?

6. Két négyzetszám összege osztható 4-gyel. Mennyi e két négyzetszám négyes maradékának a szorzata?

7. Hány olyan p prímszám van, amely esetén
a) $p + 100$ és a $p + 50$, b) $20p^2 + 1$ is prím?

8. Hány pozitív osztója van a 75 600-nak?

9. Hány négyzetszám osztója van a 75 600-nak?

10. Van-e olyan kétjegyű szám, amelynek 10 osztója van?

11. Mikor osztható az $\overline{abcde}$ ötjegyű szám 8-cal? Fogalmazzuk meg a szabályt általánosan is!

12. Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\dfrac{756}{792}$ b) $\dfrac{441000}{58212}$

13. Adjunk meg három olyan pozitív egész számot, amelyek legnagyobb közös osztója 1, de páronként nem relatív prímek!

14. Egy 5,25 m hosszú és 2,75 m hosszú téglalap alapú előszobát szeretnének hidegburkolattal lefedni, vagyis kicsempézni úgy, hogy ne kelljen egyik csempét sem elvágni. Legalább hány csempére van szükség, ha azok négyzet alakúak?

15. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\dfrac{7}{1125} + \dfrac{11}{1350}$ b) $\dfrac{23}{108} + \dfrac{17}{50} - \dfrac{11}{45}$

16. Két pozitív egész szám relatív prím, és legkisebb közös többszörösük 392. Melyik lehet ez a két szám?

17. Határozzuk meg az x, y számjegyeket, ha

a) $15 \mid \overline{71x46y}$, b) $12 \mid \overline{1y7342x}$, c) $45 \mid \overline{345xy}$, d) $72 \mid \overline{71x46y}$.

18. Egy kerékpár első fogaskerekén 20, a hátsón 12 fog van. Hányszor kell körbe tekerni a pedált, hogy a fogaskerekek az eredeti helyzetükbe kerüljenek vissza?

19. Mely pozitív egész számoknak van páratlan sok pozitív osztójuk?

10. Számrendszerek

A pozitív egész számok számjegyekkel való, helyi értékes leírása ma már semmi gondot nem okoz, a mindennapi életben állandóan használjuk. Talán el sem gondolkozunk azon, hogy ez az írásmód mennyire megkönnyítette az alapműveletek elvégzését és a különféle számításokat.

Mielőtt rátérnénk a számrendszerek általános tárgyalására, elemezzük, mit jelent a tízes számrendszerbeli helyi értékes számírás. A tíz nemnegatív egész kitevőjű hatványai a szokott módon: 10^0: egy, 10^1: tíz, 10^2: száz, 10^3: ezer stb. Láthatjuk, hogy minden esetben tíz kisebb egységet foglalunk egy nagyobb egységbe, vagyis 10 db egyes egy tízes, 10 db tízes egy százas, 10 db százas egy ezres stb. Ebből látszik, hogy annak jelölésére, hogy egy adott egységből mennyi van, 10 db szimbólumot kell bevezetni, ezek a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek. A helyi értékes számírásnak a lényege az, hogy ha leírjuk a 21 045 jelet, akkor ez a $2\cdot 10\,000 + 1\cdot 1000 + 0\cdot 100 + 4\cdot 10 + 5\cdot 1 = 2\cdot 10^4 + 1\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 5\cdot 10^0$ összeget jelenti.

Nem csak tízes csoportokat hozhatunk létre. Ha például 6 kisebb egységet foglalunk egy nagyobb egységbe, akkor a helyi értékek a hat nemnegatív egész kitevőjű hatványait jelentik, a számjegyek pedig 0, 1, 2, 3, 4, 5 lehetnek. Ekkor hatos számrendszerbeli számot kapunk: $23\,102_6$ jelentése $2\cdot 6^4 + 3\cdot 6^3 + 1\cdot 6^2 + 0\cdot 6 + 2\cdot 6^0$. Ezt átírhatjuk tízes számrendszerbe. Tehát $23\,102_6 = 2\cdot 6^4 + 3\cdot 6^3 + 1\cdot 6^2 + 0\cdot 6 + 2\cdot 6^0 = 2\cdot 1296 + 3\cdot 216 + 1\cdot 36 + 0\cdot 6 + 2\cdot 1 = 3278$. A tízet, a hatot a **számrendszer alapszámának** nevezzük.

A számrendszer alapszáma bármilyen egynél nagyobb pozitív egész szám lehet. Ha a számrendszer alapszáma g, akkor a számjegyek $g-1$-nél nem nagyobb nemnegatív egész számok, a helyi értékek a g nemnegatív egész kitevőjű hatványai. Ha a számrendszer alapszáma nagyobb, mint 10, akkor felhasználhatjuk számjegynek pl. az A, B, C, D, E, F betűket, amelyek rendre a 10, 11, 12, 13, 14 és 15 számokat jelölik. **Nem tízes alapú számrendszerben felírt szám esetén a szám mellett jobb alsó indexben feltüntetjük a számrendszer alapszámát.**

pl:

$10101_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2^0$

$45102_8 = 4\cdot 8^4 + 5\cdot 8^3 + 1\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 2\cdot 8^0$

$AC3_{16} = 10\cdot 16^2 + 12\cdot 16 + 3\cdot 16^0$

10.1. ábra Nézzünk néhány példát!

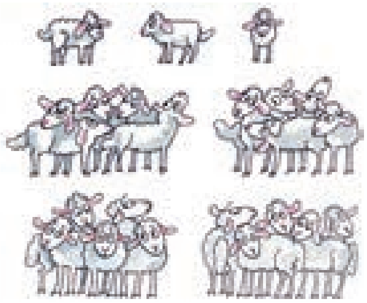
1. példa Írjuk át tízes számrendszerbe a $511\,203_7$ számot!

Megoldás:

Az előzőek alapján $511\,203_7 = 5\cdot 7^5 + 1\cdot 7^4 + 1\cdot 7^3 + 2\cdot 7^2 + 0\cdot 7 + 3\cdot 7^0 = 86\,880$.

1 db	3125-ös csoport
1 db	625-ös csoport
4 db	125-ös csoport
4 db	25-ös csoport
4 db	5-ös csoport
3 db	1-es csoport

10.2. ábra Nézzünk egy példát!



10.3. ábra A nyáj egy része

2. példa Írjuk át ötös számrendszerbe a 4373 tízes számrendszerbeli számot!

Megoldás:
Az eddigiekből következik, hogy most öt kisebb egységből képezünk egy nagyobb egységet. Először megnézzük, hogy hány 5-ös csoportot hozhatunk létre.
4373:5 = 874, a 3-as maradék azt jelenti, hogy kimaradt 3 db 1-es.
3
Most nézzük meg, hogy az ötös csoportokból hány újabb nagyobb ötös, azaz 25-ös csoportot hozhatunk létre.
874:5 = 174, a 4-es maradék azt jelenti, hogy kimaradt 4 db ötös csoport.
4
Most már 125-ös csoportokat alakítunk ki.
174:5 = 34, itt a maradék a kimaradt 25-ös csoportok számát jelenti.
4
A 625-ös csoportok száma:
34:5 = 6, a maradék a kimaradt 125-ös csoportok számát jelenti.
4
A 3125-ös csoportok száma:
6:5 = 1, azaz létrejön egy 3125-ös csoport, és marad egy 625-ös csoport.
1
1:5 = 0.
1
Ez alapján a szám: $114\,443_5 = 1\cdot5^5 + 1\cdot5^4 + 4\cdot5^3 + 4\cdot5^2 + 4\cdot5^1 + 3\cdot5^0$

3. példa Milyen alapú számrendszerben igazak az alábbi egyenlőségek?
a) $37_x + 28_x = 66_x$ b) $320_x - 233_x = 21_x$

Megoldás:
a) Mivel a számrendszer alapszáma x, ezért a következő egyenlőséget írhatjuk fel:
$3x + 7 + 2x + 8 = 6x + 6$. Ebből $5x + 15 = 6x + 6$, így $x = 9$. Tehát $37_9 + 28_9 = 66_9$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.
b) A számrendszer alapszáma megint x, így az egyenlőség a következő: $3x^2 + 2x - (2x^2 + 3x + 3) = 2x + 1$. Összevonás után: $x^2 - x - 3 = 2x + 1$. Rendezzük úgy az egyenletet, hogy a bal oldalon legyenek az ismeretlent tartalmazó tagok, a jobb oldalon a konstans. Így $x^2 - 3x = 4$, azaz $x(x - 3) = 4$. Mivel az x pozitív egész, ezért a 4-et felírtuk két olyan pozitív osztójának a szorzataként, melyek különbsége 3. Ez csak úgy lehet, ha $x = 4$. Tehát $320_4 - 233_4 = 21_4$.

4. példa Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $134_6 + 245_6$ b) $211_6 \cdot 423_6$

Megoldás:

A műveletek elvégzése előtt ismerkedjünk meg a hatos számrendszer műveleti tábláival! Az átvitelre figyeljünk mindkét műveletnél! A műveleti tábla és a megoldás a 10.4-es és a 10.5-ös ábrákon látható.

A számrendszereknek manapság elsősorban a műszaki tudományokban, a számítástechnikában van jelentősége. A számítástechnikában főként a kettes (bináris), nyolcas (oktális) és tizenhatos (hexadecimális) számrendszereket használják. A történelem során viszont mindig is fontos szerepet töltöttek be a számrendszerek. Egyiptomban a Rhind-papirusz (http://hu.wikipedia.org/wiki/Rhind-papirusz) tanúsága szerint a Kr. e. 2000 körüli időszakban már kialakult a tízes számrendszer, de minden magasabb tízes egységre külön jelet használtak, nem ismerték a helyi értékes írásmódot. Ugyanekkor Mezopotámiában a késői sumér korban helyi értékes hatvanas számrendszert használtak. Ennek emléke az óra, perc, másodperc közötti 60-as váltószám. Kínában is a tízes számrendszer volt elterjedt, hieroglifikus számjegyekkel. Az erre vonatkozó írások az időszámítás kezdete körül megjelent – Matematika kilenc fejezetben című – munkában találhatók. A helyi értékes írásmód a XII. századtól vált ismertté, valószínűleg hindu hatásra. A hinduk, mint ez az ősi, Kr. e. forrásokból kiderül, szintén tízes számrendszert használtak, de ez eleinte nem volt helyi értékes. A helyi értékes írásmód csak 500 körül jelent meg náluk, és óriási jelentősége volt, mert ez terjedt aztán el Európában az arabok közvetítésével. Ekkor vezetik be a nullát, ami mérföldkő a számírásban. Az első hiteles emlék 876-ból maradt fönn, amelyben a maira erőteljesen emlékeztető számjegyek találhatók, a nullát kis kör jelöli. Az arab tudósok körében a VIII–IX. század környékén terjedt el a hindu számírás; a kor legnagyobb arab matematikusa, al-Hvárizmi már az új számírással írta algebra könyvét a IX. század elején. A mű eredetije elveszett, csak latin fordítása maradt fenn. Ebből a könyvből és más arab forrásokból ismerték meg Európában az újfajta számírást, ezért vált arab számírás néven ismertté.

Egy híres francia matematikus, P. S. Laplace (1749–1827) ezt írta a hindu számírásról: „A hinduktól jutott el hozzánk az a csodálatos számírási rendszer, amelyben minden szám felírható tíz jegygyel azáltal, hogy minden jelnek alaki és helyi értéket tulajdonít. Ez a nagy jelentőségű és zseniális módszer olyan egyszerűnek tűnik, hogy emiatt fel sem tudjuk fogni igazán a nagyszerűségét. De éppen egyszerűsége és a műveletek nagyon könnyű elvégezhetősége helyezi ezt az aritmetikai rendszert a leghasznosabb felfedezések sorába. Hogy milyen nehéz lehetett egy ilyen módszer felfedezése, arra következtethetünk abból a tényből, hogy az ókor két legnagyobb

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

összeadástábla a 6-os számrendszerben

$$\begin{array}{r} 134_6 \\ +\,245_6 \\ \hline 423_6 \end{array}$$

10.4. ábra A 6-os számrendszer összeadástáblája

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

szorzástábla a 6-os számrendszerben

$$\begin{array}{l} \quad\underline{211_6} \cdot 423_6 \\ 1244 \\ \quad 422 \\ \underline{+\;\;1033} \\ 134053_6 \end{array}$$

10.5. ábra A 6-os számrendszer szorzástáblája

10.6. ábra Számoljunk!

elméjének, Arkhimédésznek és Apollóniosznak a zsenije sem jutott el a helyi értékes számírási rendszer felfedezéséig.”

Az észak-kaliforniai yuki indiánoknál a nyolcas számrendszer, míg a majáknál a húszas számrendszer volt használatos. A közép-amerikai aztékok számrendszere a tízes és a húszas számrendszer keveredését mutatja, de nem volt helyi értékes. Ezenkívül a tizenkettes számrendszer emlékei élnek a tucatban, a 12 hónapban, a nappal és az éjszaka 12 órára való osztásában. Ugyancsak erre utal, hogy néhány nyelvben az első tizenkét számnak önálló elnevezése van, gondoljunk csak a számok angol neveire. (Forrás: Filep-Bereznai: A számírás töténete)

Oldjuk meg!

1. Írjuk át tízes számrendszerbe!
a) 32110_4 b) 11011001_2 c) 56123_8 d) 122430_7

2. Írjuk fel a megadott számokat a megadott számrendszerben!
a) 112 a kettesben b) 241 a hármasban c) 4123 a hatosban d) 21421 a hetesben

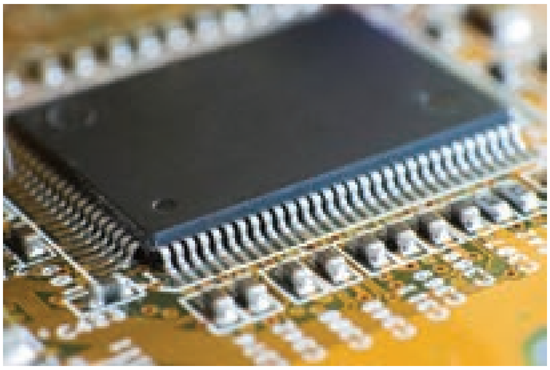
3. Írjuk fel az
a) 12345410 számot százas számrendszerben!
b) 10110011_2 számot négyes számrendszerben!
c) 12212_3 számot kilences számrendszerben!

4. Számítsuk ki!
a) $1123_5 + 4332_5$ b) $112_5 \cdot 340_5$

5. Az $132x3_5$ osztható néggyel. Mennyi lehet az x értéke?

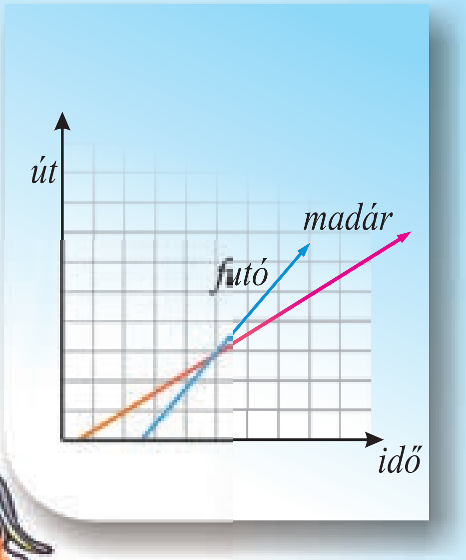
6. Az $5433x_6$ osztható hárommal. Mennyi lehet az x értéke?

7. Adjuk meg az x értékét, hogy fennálljon az egyenlőség!
a) $76_x - 37_x = 39_x$ b) $121_x : 11_x = 11_x$



10.7. ábra Mely számrendszerekkel van kapcsolata a képen látható chipnek?

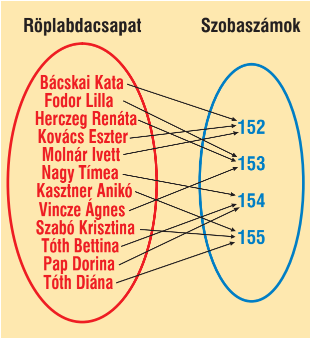
III. fejezet
Függvények



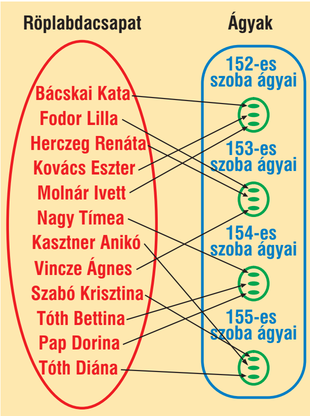
Mi, mitől és hogyan függ?

Függvények

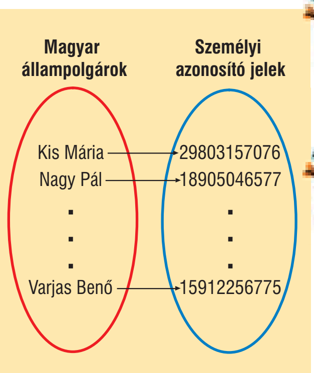
1. A függvény fogalma, jelölések, elnevezések



1.1. ábra Függvény



1.2. ábra Kölcsönösen egyértelmű függvény



1.3. ábra Ősök és képek

A hétköznapi életben nagyon sok területen találkozhatunk a függvény fogalmával. Az alábbiakban nézzünk erre néhány példát!

Egy középiskola 12 lányból álló röplabdacsapata edzőtáborba megy. A tábort szervező tanár a diákoknak 4 db 3 ágyas (152-től 155-ig számozott) szobát rendel, és minden tanulót beoszt valamelyik szobába. Így a csapat minden tagjához hozzárendelt pontosan egy szobaszámot. Az ilyen hozzárendelést **függvény**nek nevezzük. Ezt szemléltethetjük Venn-diagrammal. (1.1. ábra)

A diákok a szálláshelyre való érkezéskor elfoglalják szobáikat, és elosztják egymás között az ágyakat. Minden diákhoz ily módon hozzárendelünk egy-egy ágyat, méghozzá különböző diákokhoz különböző ágyakat. Ezt a hozzárendelést **kölcsönösen egyértelmű függvénynek** mondjuk. Venn-diagrammal szemléltessük a hozzárendelést! (1.2. ábra)

Az állampolgárok nyilvántartásának és azonosításának megkönnyítése céljából hazánkban minden magyar állampolgár rendelkezik egy személyi azonosító jellel. Ez egy tizenegy számjegyből álló számsor. Tehát a magyar állampolgárok halmaza és a tizenegy jegyű számok halmaza között – törvényben előírt szabály szerint – hozzárendelést hoznak létre. Így minden magyar állampolgárhoz tartozik pontosan egy tizenegy jegyű szám. A magyar állampolgárok halmaza és a személyi azonosító jelek halmaza (a tizenegy jegyű számok egy részhalmaza) közötti hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű függvény.
Venn-diagrammal szemléltessük a hozzárendelést! (1.3. ábra)

Az előző példák mindegyikében függvényt adtunk meg. Az első és a második esetben a függvény **értelmezési tartománya** a kiránduló diákok halmaza, a harmadik példában a magyar állampolgárok halmaza volt. A szobaszámok, az ágyak, a személyi azonosító jelek halmaza a megfelelő függvény **képhalmaza**. A képhalmaznak azt a legbővebb részhalmazát, amelynek minden elemét hozzárendeltük valamelyik értelmezési tartománybeli elemhez, **értékkészletnek** nevezzük.

Definíció Adott két nem üres halmaz: *A* és *B*. Ha az *A* halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük a *B* halmaz egy és csakis egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést **függvénynek** nevezzük.

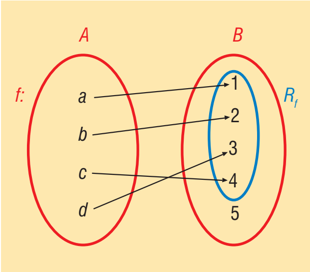
Definíció Az *A* halmaz a függvény **értelmezési tartománya,** a *B* halmaz a függvény **képhalmaza**. A képhalmaz azon legbővebb részhalmazát, amelynek minden elemét hozzárendeltük valamelyik értelmezési tartománybeli elemhez, **értékkészletnek** nevezzük.

Az *A* halmazbeli elemeket **ősöknek,** a *B* halmazbeli elemeket **képeknek** is mondjuk.

Definíció Azokat a hozzárendeléseket, amelyeknél minden A halmazbeli elemnek pontosan egy képe van, és minden értékkészletbeli elemnek pontosan egy őse van, **kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésnek (kölcsönösen egyértelmű függvénynek)** nevezzük.

Az a függvény, amely a röplabdacsapat tagjaihoz egy-egy szobaszámot rendelt, nem volt kölcsönösen egyértelmű, mert ugyanazt a szobaszámot több röplabdáshoz is hozzárendelte.

A függvények jelölésére gyakran az f, g, h, i, j stb. betűket használjuk. A függvények megadásánál először az értelmezési tartományt adjuk meg, majd azt az egyértelmű utasítást, amely alapján hozzárendeljük az értelmezési tartomány elemeihez a képhalmaz elemeit. Ezt az utasítást nevezzük a **függvény hozzárendelési szabályának**. Nézzünk még további példákat!



1.4. ábra Az $f: A \to R_f$ kölcsönösen egyértelmű függvény

1. példa Egy harmincfős osztályban a közelgő farsangra tombolajegyeket árul az osztálytitkár. A jegyek ára 150 Ft, és legfeljebb 30 darabot adhat el. Adjuk meg a bevételt az eladott jegyek függvényében!

Megoldás:
A függvény értelmezési tartománya: $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 30\}$. A darabszámot jelöljük x-szel, $x \in A$. A képhalmaz lehet pl. $\mathbb{N}$. A hozzárendelési utasítást az alábbi módon adhatjuk meg: $x \mapsto 150x$ (olvasd: „x-hez rendeljük $150x$-et").
A függvény megadása:

$$f\colon \{0, 1, 2, 3, \ldots, 30\} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 150x.$$

Az f függvény értelmezési tartományát szokás D_f-fel, az értékkészletét R_f-fel jelölni. Ebben a példában az értékkészlet: $R_f = \{0, 150, 300, 450, \ldots, 4500\}$. Az f függvény az $x = 3$ értékhez a 450-et rendeli. Ezt az f függvény **$x = 3$ helyen felvett helyettesítési értékének** nevezzük, és $f(3) = 450$ módon jelöljük. Ezt úgy is szoktuk mondani, hogy az f függvény a 3 helyen 450-et vesz fel. **Az f függvény x helyen felvett helyettesítési értékét $f(x)$-szel jelöljük.** Ennek felhasználásával az előző függvényt úgy is megadhatjuk, hogy $f\colon \{0, 1, 2, 3, \ldots, 30\} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 150x$.


1.5. ábra Veszel tombolajegyet?

2. példa Függvényt adnak-e meg minden esetben az alábbi hozzárendelések?
a) Egy osztály minden tanulójához rendeljük hozzá azt a hónapot, amelyikben született!
b) Egy osztály minden tanulójához rendeljük hozzá azt a hónapot, amelyikben van névnapja!
c) Egy adott tanórán az osztályteremben levő minden székhez hozzárendeljük azt a tanulót, aki éppen akkor rajta ül.

1.6. ábra Boldog szülinapot!

1.7. ábra Hiányzik valaki?

1.8. ábra Jól látom?

Megoldás:
a) Igen, mert minden diákhoz pontosan egy olyan hónapot rendelünk, amelyben született.
b) Nem, hiszen előfordulhat olyan, akihez több hónapot is rendelünk, mert például István névnap augusztus 3-án, 20-án, szeptember 2-án és december 26-án is van. Sőt, lehet az osztálynak olyan tanulója is, akinek több keresztneve van. Ehhez a tanulóhoz több hónapot is rendelünk.
c) Nem, mert lehet olyan szék, amelyen nem ül senki. Tehát nem minden elemhez rendelünk hozzá.

3. példa Az alábbi $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ hozzárendelések függvényt adnak-e meg? Ha igen, írjuk le a függvényt jelölésekkel!
a) Minden pozitív természetes számhoz hozzárendeljük a kétszeresét.
b) Minden pozitív természetes számhoz hozzárendeljük a pozitív osztóit.
c) Minden pozitív természetes számhoz hozzárendeljük a legkisebb prímosztóját.

Megoldás:
a) Igen, hiszen minden pozitív egész számnak pontosan egy kétszerese van. A függvény jelölésekkel: $g\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+,\ g(x) = 2x$.
b) Nem, mert pl. a 4-hez az 1-et, a 2-t és a 4-et hozzá kell rendelni.
c) Nem, mert az 1-hez nem rendelünk semmit.

4. példa A sík pontjainak halmazát jelöljük S-sel. Legyen adott az S síkon egy t egyenes. Az S pontjaihoz rendeljük hozzá az S pontjait úgy, hogy minden ponthoz hozzárendeljük a t-re vonatkozó tükörképét. Függvény-e ez a hozzárendelés?

Megoldás:
A tengelyes tükrözés általános iskolában már tanult hozzárendelési szabályát felhasználva tudjuk, hogy igen. Ebben a példában az értelmezési tartomány és az értékkészlet is ponthalmaz, ráadásul a két halmaz egyenlő. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű is.

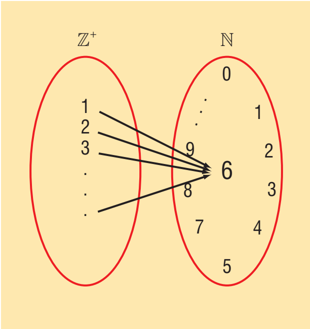
5. példa Fogalmazzuk meg szavakkal az alábbi függvényeket!
a) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x(x-1)$ b) $g\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$
c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x+3$

Megoldás:
a) Minden racionális számhoz rendeljük hozzá a számnak és a nála eggyel kisebb számnak a szorzatát!
b) Minden pozitív egész számhoz rendeljük hozzá a reciprokát!
c) Minden valós számhoz rendeljük hozzá az ellentettjénél hárommal nagyobb számot!

A függvényfogalom definíciójában két halmaz között teremtünk kapcsolatot. Ezek nemcsak számhalmazok lehetnek, hanem az elemeik lehetnek emberek, pontok, székek, lehet hőmérséklet, idő stb. **A hozzárendelési szabályt is megadhatjuk többféleképpen: utasítással, képlettel, táblázattal, grafikonnal.**

6. példa Legyen az $f\colon\ \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$, $f(x) = 6^x$ utolsó számjegye és legyen $g\colon\ \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6$! Hasonlítsuk össze a két függvényt!

Megoldás:
Mind az f, mind a g függvény értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Mivel a 6 minden pozitív egész kitevőjű hatványa 6-ra végződik, ezért az f függvény minden pozitív egészhez a 6-ot rendeli, ahogyan a g függvény is. Ekkor azt mondjuk, hogy a két függvény egyenlő.



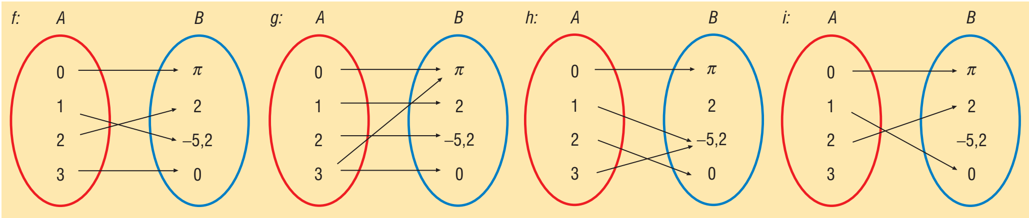
1.9. ábra $f(x) = 6$

Definíció **Két függvény** akkor és csakis akkor **egyenlő,** ha értelmezési tartományuk azonos, és az értelmezési tartomány bármely elemére a két függvény helyettesítési értéke egyenlő.
Ugyanez matematikai jelekkel:
Legyen $f\colon D_f \to R_f,\ x \mapsto f(x)$ és a $g\colon D_g \to R_g,\ x \mapsto g(x)$ két függvény!

$$f = g \Leftrightarrow D_f = D_g \text{ és } \forall x \in D_f \text{ esetén } f(x) = g(x)$$

Oldjuk meg!

1. Az alábbi hozzárendelések közül
a) melyek függvények;
b) melyek kölcsönösen egyértelműek?
Adjuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, a 2-höz tartozó helyettesítési értékét!



1.10. ábra 1. feladat

2. Az alábbi hozzárendelések közül melyek határoznak meg függvényt?
a) Egy gimnázium minden tanulójához rendeljük hozzá az előző év végi matematikaosztályzatát!
b) Minden osztályzathoz rendeljük hozzá azt a diákot, akinek az előző év végi matematika-érdemjegye ez az osztályzat!
c) A 2007-ben megjelent regényekhez rendeljük hozzá a könyvet megjelentető kiadót!
d) A 2007-ben megjelent versekhez rendeljük hozzá a vers költőjét!
e) A Föld minden városához rendeljük hozzá a földrajzi szélességüket!
f) A Föld minden országához rendeljük hozzá az ország folyóit!

3. Fogalmazzuk meg szavakkal az alábbi függvényeket!

a) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q},\ f(x)=\dfrac{3}{2}x-1$ b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ x\mapsto x^2+1$ c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+,\ h(x)=|x-5|$

d) $i:[-2;3[\ \to\mathbb{R},\ i(x)=\dfrac{1}{x-3}$ e) $j:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+,\ x\mapsto 2007^x$ utolsó számjegye

f) $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ k(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ha } x>5 \\ 4x+5, & \text{ha } x\le 5 \end{cases}$

4. Olvassuk el az alábbi matematikai jelekkel leírt kifejezéseket!

a) $f(34,5)=12$ b) $g(-2)=0$ c) $h\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\sqrt{3}-1\dfrac{4}{23}$ d) $i\left(\sqrt{5}\right)=-12,76$

5. Írjuk le matematikai jelekkel az alább megadott függvényeket!

a) Minden valós számhoz hozzárendeljük az ellentettjét.
b) Minden egész számhoz hozzárendeljük a háromszorosát.
c) Minden pozitív számhoz hozzárendeljük a reciprokánál 1-gyel kisebb számot.
d) Minden negatív racionális számhoz hozzárendeljük a köbénél 27-tel nagyobb számot.
e) Minden egynél nagyobb pozitív egész számhoz hozzárendeljük a nála nem nagyobb pozitív egészek szorzatát.
f) Minden kétjegyű pozitív egész számhoz hozzárendeljük az 1-et, ha a szám prím, és a 0-t egyébként.

6. Legyen az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3}{2}x-4$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{5x-1}{x^2+1}$!

Határozzuk meg

a) az *f* és *g* függvények $2;1;0;-2;-\dfrac{4}{3}$ helyen vett helyettesítési értékeit;

b) az $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot g(-1)$ szorzat értékét;

c) az $\dfrac{f(5)}{g(0)}$ tört értékét;

d) a $\dfrac{14}{3}\cdot f\left(\dfrac{2}{7}\right)-\dfrac{5}{6}\cdot g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ kifejezés értékét!

7. Egyenlők-e az alábbi *f* és *g* függvények?

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{ha } x\ne 2 \\ 4, & \text{ha } x=2 \end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-,\ f(x)=|2x-3|$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-,\ g(x)=\begin{cases} 2x-3, & \text{ha } x\ge 1,5 \\ 3-2x, & \text{ha } x<1,5 \end{cases}$

c) $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+,\ f(x)=5^x$ utolsó számjegye és $g:\mathbb{Z}^+\to\{5\},\ g(x)=5$

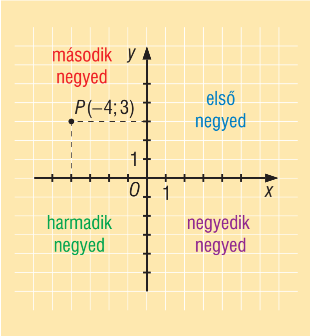
d) $f:\{1;2,3,5,7\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=x-2$ és
g: az egyjegyű pozitív prímekhez hozzárendeljük a náluk kettővel kisebb számokat

2. A koordináta-rendszer I.

A továbbiakban a valós számok valamely részhalmazán értelmezett, valós értékű függvényekkel foglalkozunk. Az ilyen függvényeket **valós függvényeknek** nevezzük, ábrázolásuk a **Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben** történhet. (2.1. ábra) A síkbeli koordináta-rendszer lényege, hogy a sík pontjai és a rendezett számpárok között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést hozunk létre.

A koordináta-rendszer két egymásra merőleges tengelyből áll, ezek számegyenesek, a metszéspontjuk az origó. A egyik tengely az x vagy abszcisszatengely, a másik pedig az y vagy ordinátatengely. Egy síkbeli ponthoz rendelt rendezett számpár első tagja a pont ***x* koordinátája** vagy **abszcisszája,** amely a pont y tengelytől mért előjeles távolságát adja meg. A második tagja a pont ***y* koordinátája** vagy **ordinátája,** amely a pont x tengelytől való előjeles távolsága.

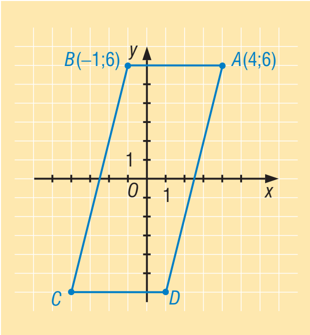
Már általános iskolában is ábrázoltunk függvényeket, elsősorban lineáris függvényeket, koordináta-rendszerben. Most nézzünk néhány példát arra vonatkozólag, hogyan lehet ponthalmazokat szemléltetni a koordinátasíkon!



2.1. ábra Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer

1. példa Adott a koordinátasíkon az $A(4;6)$ és a $B(-1;6)$ pont. Az A pont origóra vett tükörképe legyen C, a B pont origóra vett tükörképe pedig D pont! Készítsünk ábrát! Milyen négyszög az $ABCD$ négyszög? Határozzuk meg a területét!

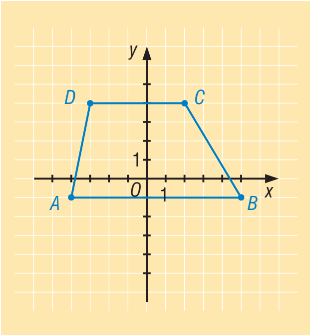
Megoldás:
Ha egy pontot tükrözünk az origóra, akkor a koordinátái ellentettjükre változnak. Ez alapján a $C(-4;-6)$, a $D(1;-6)$ pont lesz. (2.2. ábra) Mivel a négyszög középpontosan szimmetrikus, ezért paralelogramma. A területét úgy számítjuk ki, hogy az egyik oldalát megszorozzuk a hozzá tartozó magasságával. Ez alapján a területe: $T = 60$ területegység.



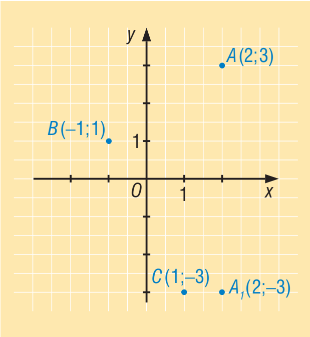
2.2. ábra 1. példa

2. példa Olvassuk le a 2.3. ábráról az A, B, C, D rácspontok koordinátáit! Milyen négyszöget határoznak meg a pontok? Határozzuk meg a négyszög területét!

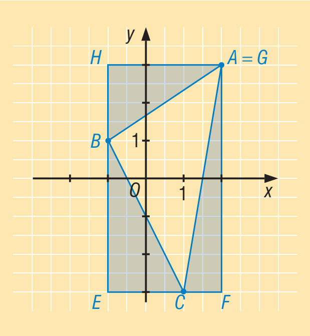
Megoldás:
Az A, B, C, D pontok koordinátái: $A(-4;-1)$, $B(5;-1)$, $C(2;4)$ és $D(-3;4)$. A négyszög trapéz, mert az AB oldala párhuzamos a CD oldalával, de az már nem igaz, hogy paralelogramma, mert a másik két oldala nem párhuzamos. A területe: $T = \dfrac{9+5}{2} \cdot 5 = 35$ területegység.



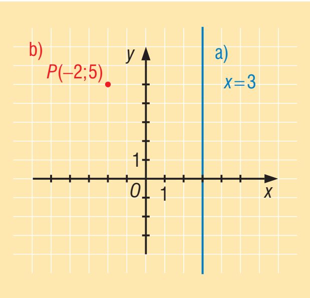
2.3. ábra 2. példa



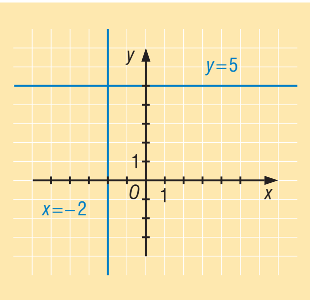
2.4. ábra Első lépések



2.5. ábra Trükkös megoldás



2.6. ábra 4. a), b) példa



2.7. ábra 4. c) példa

3. példa Vegyük fel a koordinátasíkon az $A(2;3)$ pontot! Legyen B az a pont a koordinátasíkon, amelynek abszcisszája az A pont abszcisszájának ellentettjénél eggyel nagyobb, ordinátája pedig az A pont ordinátájánál kettővel kisebb! Legyen C az a pont, amelyet úgy kapunk, hogy az A pontot tükrözzük az x tengelyre, és a kapott pont abszcisszáját eggyel csökkentjük! Határozzuk meg az ABC háromszög területét!

Megoldás:
A B pont abszcisszája vagy x koordinátája –2-nél eggyel nagyobb szám, azaz -1, míg ordinátája vagy y koordinátája 1. Az A pont x tengelyre vett tükörképe az $A_1(2;-3)$ pont, így $C(1;-3)$. (2.4. ábra)

Próbáljuk a lehető legkevesebb számolással, egy ügyes trükk felhasználásával meghatározni a háromszög területét!

Vegyük fel a 2.5. ábrának megfelelően az $EFGH$ téglalapot! A téglalap EF oldala 3 egység, FG oldala 6 egység, így annak területe 18 területegység. Ebből kiindulva meghatározhatjuk a kérdezett értéket, ha kivonjuk a téglalap területéből a BEC, a CFG és a GHB derékszögű háromszög területét. Mivel egy derékszögű háromszög területét megkaphatjuk úgy, hogy két befogójának a szorzatát elosztjuk kettővel, így $T_{BEC}=\frac{4\cdot 2}{2}=4$ (t.e.), $T_{CFG}=\frac{6\cdot 1}{2}=3$ (t.e.), $T_{BHA}=\frac{2\cdot 3}{2}=3$ (t.e.). Tehát az ABC háromszög területe 8 területegység.

4. példa Határozzuk meg a koordinátasíkon azon pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbi feltételek!
a) $x=3$ b) $x=-2$ és $y=5$ c) $x=-2$ vagy $y=5$

Megoldás:
a) Ennek a feltételnek azok és csak azok a pontok felelnek meg, amelyek az x tengelyt a $(3;0)$ pontban metsző, arra merőleges egyenesen vannak. (2.6. ábra)
b) Mivel a két feltételnek együtt kell teljesülnie, ezért a megoldás a $P(-2;5)$ pont. (2.6. ábra)
c) Mivel a két feltétel közül legalább az egyiknek teljesülnie kell, ezért a keresett ponthalmaz két egyenes, amelyek a 2.7. ábrán láthatók.

5. példa Adott az alábbi két ponthalmaz:

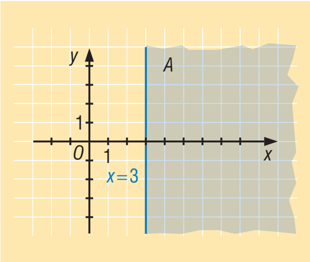
$$A=\{(x;y)\mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ x\geq 3\};$$

$$B=\{(x;y)\mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ y\leq -3\}.$$

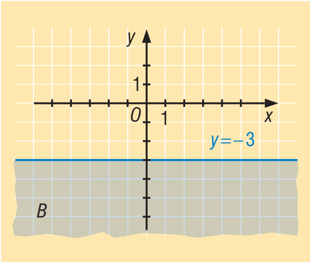
Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az A és a B halmazt!
Szemléltessük a koordinátasíkon az a) $A\cap B$; b) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ halmazokat!

Megoldás:

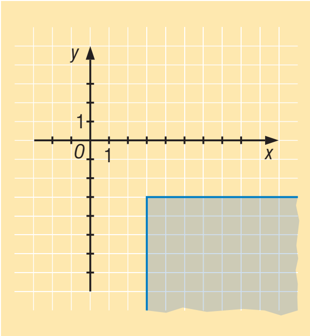
Mivel az A halmaz esetén a keresett pontok y koordinátája tetszőleges, és az x 3-nál nem kisebb, ezért ennek a halmaznak az $x = 3$ egyenes és az attól pozitív irányban levő félsík felel meg. Hasonló megfontolások alapján a B halmaz az $y = -3$ egyenes és az attól negatív irányban levő félsík. (2.8. ábra, 2.9. ábra)



2.8. ábra A halmaz



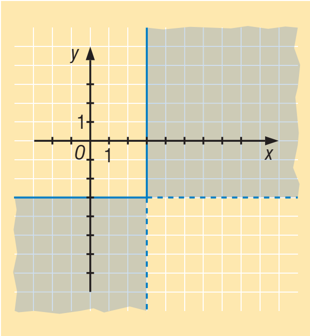
2.9. ábra B halmaz



2.10. ábra $A \cap B$

a) Két halmaz metszetének definíciója alapján azon pontok halmazát keressük a koordinátasíkon, amelyek mindkét halmaznak elemei. A keresett halmaz a 2.10. ábrán látható. A folytonos vonal azt jelöli, hogy a határ is hozzátartozik a ponthalmazhoz.

b) Az $A \setminus B$ azon pontok halmaza, melyek az A halmaznak elemei, de a B halmaznak nem. Ez alapján a 2.8. ábrán besatírozott részből ki kell venni a 2.9. ábrán látható síkrészt. Hasonló megfontolások alapján a $B \setminus A$ halmaz esetén a 2.9. ábrán besatírozott részből ki kell venni 2.8.ábrán besatírozott részt. Így az előző két halmaz uniója a 2.11. ábrán látható síkrész. A szaggatott vonal azt jelöli, hogy a határ nem tartozik hozzá a ponthalmazhoz.



2.11. ábra $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő pontokat:
$A(4;-4)$, $B(-5;7)$, $C(3;8)$, $D(-1;-3)$, $E(0;3)$, $F(-6;0)$!

2. Határozzuk meg az előző feladatbeli A, B és C pontok által meghatározott háromszög területét!

3. Vegyük fel azon pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek koordinátáira az alábbiak teljesülnek! Írjuk le matematikai jelekkel a koordináták közötti összefüggéseket!

a) Az abszcisszája 5-nél nem nagyobb pozitív egész szám, az ordinátája kettővel nagyobb az abszcisszájánál.

b) Az abszcisszája 5-nél nem nagyobb pozitív egész szám, az ordinátája kétszerese az abszcisszájának.

c) Az abszcisszája –10 és 10 közé eső, 3-mal osztható szám, az ordinátája az abszcisszájánál 1-gyel kisebb.

d) Az ordinátája 7-nél kisebb, –1-nél nem kisebb egész szám, az abszcisszája pedig az ordináta felénél eggyel nagyobb szám.

4. Ábrázoljuk azon pontok halmazát a koordinátasíkon, amelyek koordinátái teljesítik az alábbi feltételeket!

a) $x = 4$ b) $y = -3$ c) $x = 2$ és $y = -5$ d) $x = 1$ vagy $y = -4$
e) $2 < x < 5$ f) $-3 \le y \le 4$ g) $x \le 3$ és $2 \le y$ h) $4 \le x$ vagy $-3 \le y$

5. Adott két halmaz:

$A = \{(x;y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ x \le 5\}$;
$B = \{(x;y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ y > 2\}$.

Ábrázoljuk a koordinátasíkon az alábbi halmazokat!

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$ e) $\overline{A} \cap \overline{B}$ f) $\overline{A \cup B}$

6. Adott a koordinátasíkon a $P(3;5)$ pont. Tükrözzük a P pontot az $x = 1$ egyenesre, így kapjuk a Q pontot! Ezután a P és a Q pontot is tükrözzük az $F(1;2)$ pontra, az így kapott pontok legyenek P_1 és Q_1. Milyen négyszög a PQP_1Q_1 négyszög? Határozzuk meg a területét!

7. Egy bolha a koordináta-rendszer origójában ül. Minden ugrása egy egység hosszú, és csak „jobbra" vagy „felfelé" ugorhat. Hány különböző helyre juthat el, ha legfeljebb 10 ugrást tesz meg?

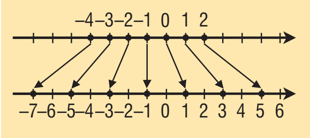
8. Hány különböző helyre juthat el legfeljebb 10 ugrással az előző bolha, ha „balra" illetve „lefelé" is ugorhat?

3. Függvények szemléltetése

Az eddigi példáinkban a két halmaz közötti hozzárendeléseket, függvényeket Venn-diagrammal szemléltettük, elemeik között nyilakkal jelöltük a hozzárendelési utasítást. A valós függvényeket más módon is szemléltethetjük.

Legyen az $f: \{x \mid -4 \le x \le 2,\ x \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 2x + 1$ függvény! Vegyünk fel két párhuzamos számegyenest (3.1. ábra)! Az egyik szemléltesse az f függvény értelmezési tartományát, a másik számegyenes az f függvény értékkészletét! Az értelmezési tartomány minden eleméből (x-ből) egy nyíl vezet az értékkészlet x-hez rendelt eleméhez ($f(x)$-hez). Az így kapott ábrát **nyíldiagram**nak nevezzük. Az ábrázolás megkönnyítése érdekében készítsünk értéktáblázatot: írjuk fel az értelmezési tartomány elemeit és mindegyik alá a hozzá rendelt helyettesítési értéket! (3.1. ábra)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
$2x+1$	−7	−5	−3	−1	1	3	5



3.1. ábra Nyíldiagram

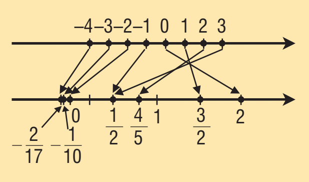
1. példa Szemléltessük a

$$g: \{x \mid -4 \le x \le 3,\ x \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$

függvényt nyíldiagrammal!

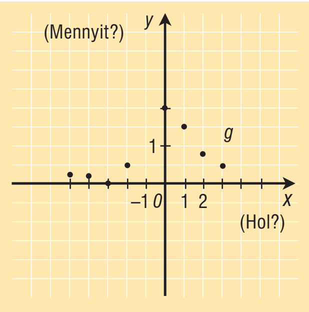
Megoldás:
Készítsünk értéktáblázatot!

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x+2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2+1	17	10	5	2	1	2	5	10
$\frac{x+2}{x^2+1}$	$-\frac{2}{17}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$



3.2. ábra Ábrázolás nyíldiagrammal

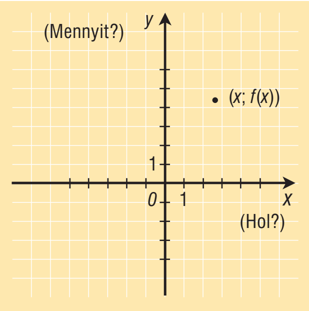
A g függvény nyíldiagrammal való ábrázolása már nem olyan könnyű, mint az f függvényé, és a 3.2. ábrán kiigazodni is nehéz. Célszerű a nyíldiagramnál „jobb” ábrázolási módot keresni. Ha az előző példában a hozzárendelést olyan számpárokkal szemléltetjük, amelyeknek első eleme a g értelmezési tartományából való (x), a második eleme az x-hez rendelt $g(x)$, akkor nyolc rendezett számpárt kapunk, és ezekhez hozzárendelhetjük (kölcsönösen egyértelmű módon) a koordinátasík nyolc pontját.



3.3. ábra Ábrázolás koordinátasíkon

x (Hol?)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)=\frac{x+2}{x^2+1}$ (Mennyit?)	$-\frac{2}{17}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$
Rendezett számpárok $(x; g(x))$	$\left(-4;-\frac{2}{17}\right)$	$\left(-3;-\frac{1}{10}\right)$	$(-2;0)$	$\left(-1;\frac{1}{2}\right)$	$(0;2)$	$\left(1;\frac{3}{2}\right)$	$\left(2;\frac{4}{5}\right)$	$\left(3;\frac{1}{2}\right)$

A derékszögű koordináta-rendszerben az ehhez a 8 számpárhoz rendelt pontok halmaza a g függvény grafikonja (3.3. ábra).



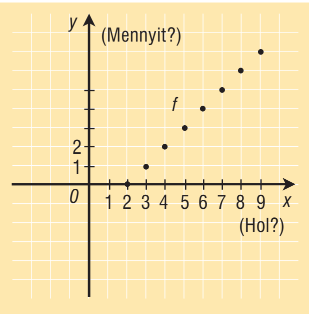
3.4. ábra Egy f függvény grafikonjának egy tetszőleges pontja

Definíció Legyen f: $A \to B$ függvény, és A, B a valós számok halmazának egy-egy részhalmaza. Ekkor az ***f* függvény grafikonján** vagy **képén** azon pontok halmazát értjük a derékszögű koordináta-rendszerben, amely pontok első koordinátája az A halmaz eleme: (x), a második koordinátája pedig az x-hez tartozó függvényérték: $f(x)$.

2. példa Ábrázoljuk az alábbi függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben! Hány pontból áll a függvények képe? Összeköthetők-e ezek a pontok a grafikonok megrajzolásakor?
Rendeljük hozzá minden 2-nél nem kisebb pozitív egyjegyű egészhez
a) a nála kettővel kisebb számot;
b) a legnagyobb prím osztóját!

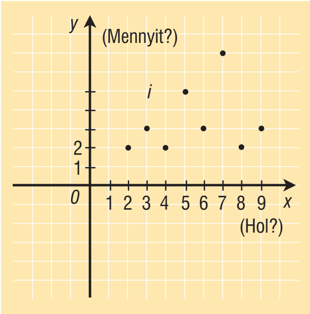
Megoldás:
Az a) pontban megadott függvény (képe: 3.5. ábra) matematikai jelekkel:

$$f:\{2;3;4;5;6;7;8;9\} \to \{0;1;2;3;4;5;6;7\},\ f(x)=x-2.$$



3.5. ábra Az f függvény képe

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 107 2012.06.25. 14:17:54



3.6. ábra Az *i* függvény képe

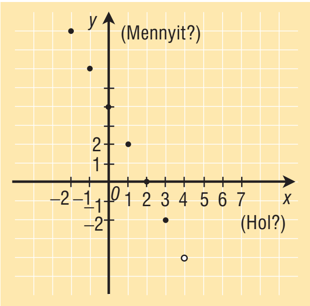
x	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)=x-2$	0	1	2	3	4	5	6	7
$(x;f(x))$	(2; 0)	(3; 1)	(4; 2)	(5; 3)	(6; 4)	(7; 5)	(8; 6)	(9; 7)

A b) pontban megadott függvény (képe: 3.6. ábra) matematikai jelekkel:

$i:\{2;3;4;5;6;7;8;9\}\to\{2;3;5;7\}$, $i(x)=x$ legnagyobb prím osztója.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
$i(x)$	2	3	2	5	3	7	2	3
$(x;i(x))$	(2; 2)	(3; 3)	(4; 2)	(5; 5)	(6; 3)	(7; 7)	(8; 2)	(9; 3)

Az *f* és az *i* függvény értelmezési tartománya is a {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} nyolcelemű halmaz, ezért mindkét függvény grafikonja nyolc elszigetelt pontból áll. Így az említett függvények képének megrajzolásakor ezek a pontok nem köthetők össze.

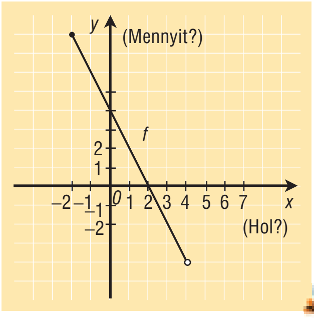


3.7. ábra Az *f* függvény grafikonjának néhány pontja

3. példa Ábrázoljuk az $f:[-2;4[\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+4$ függvényt derékszögű koordináta-rendszerben!

Megoldás:
Mivel az *f* függvény értelmezési tartománya végtelen sok elemet tartalmaz, ezért nem tudjuk a grafikon minden pontját kijelölni. A grafikon néhány pontját ábrázolhatjuk. (3.7. ábra) Vajon az ábrázolt pontok összeköthetők-e a grafikon megrajzolásakor? Ha igen, akkor milyen vonallal köthetők össze?

Jelenlegi ismereteink alapján ezekre a kérdésekre nem tudunk válaszolni, de tapasztalataink alapján elfogadjuk (ezt később igazoljuk), hogy a vázolt pontok egy egyenesre illeszkednek. A függvény képe egy szakasz, amelyhez a (–2;8) hozzá tartozik (tömött karikával jelöljük); a (4;–4) pont pedig már nem (üres karikával jelöljük).



3.8. ábra Az *f* függvény grafikonja

Az *f* függvény képének van olyan pontja, amely az *x* tengelynek is pontja, ez a pont fontos jellemzője a függvénynek. E pont első koordinátáját a függvény **zérushely**ének nevezzük.

Definíció Egy *f* függvény **zérushely**einek nevezzük az értelmezési tartományának mindazon *x* értékeit, amelyekre $f(x)=0$. (Szemléletesen: a függvény grafikonja és az *x* tengely közös pontjának első koordinátája.)

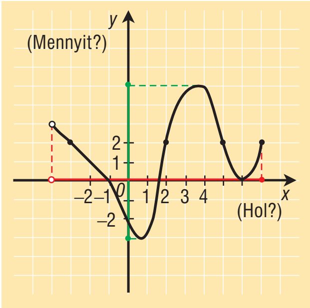
4. példa Adott az f függvény grafikonja (3.9. ábra).

a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és zérushelyeit!

b) $f(-2) = ?$ Mennyi a függvény helyettesítési értéke –2-nél?

c) Mely valós x-re teljesül, hogy $f(x) = 2$? Hol veszi fel a függvény a 2 értéket?

d) Mely valós x-re teljesül, hogy $f(x) > 2$? Hol vesz fel a függvény 2-nél nagyobb értéket?



3.9. ábra Az f függvény grafikonja

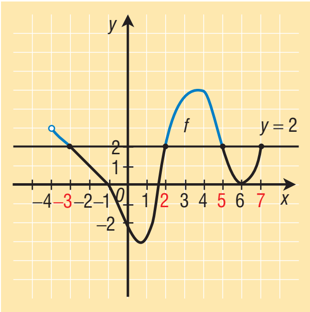
Megoldás:

a) Az f függvény értelmezési tartománya: azon x értékek halmaza, amelyekhez értékeket rendel, tehát $D_f =]-4; 7]$; értékkészlete: azon értékek halmaza, amelyeket hozzárendeltünk az x-ekhez, így $R_f = [-3; 5]$; zérushelyei (szemléletesen az x tengellyel való közös pontok első koordinátái, abszcisszái): $x_1 \approx -1$; $x_2 \approx 1{,}6$; $x_3 \approx 6$.

b) Az f függvény $x = -2$ helyen vett helyettesítési értéke az 3.9. ábráról leolvasva közelítőleg 1, matematikai jelekkel $f(-2) \approx 1$.

c) Az $f(x) = 2$ egyenlet megoldásakor keressük az x változó azon értékeit, amelyekhez az f függvény 2-t rendel. A keresett x értékek tehát: $x_1 = -3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 5$; $x_4 = 7$. (3.10. ábra)

d) Az $f(x) > 2$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a változó értékeket (x-eket), amelyekhez az f függvény 2-nél nagyobb értéket rendel. (Szemléletesen: hol halad az f függvény gafikonja az $y = 2$ egyenletű egyenes „fölött”?) A keresett x értékek a feladat c) részének megoldása és a 3.10. ábra alapján: $-4 < x < -3$ vagy $2 < x < 5$, ahol $x \in \mathbb{R}$.



3.10. ábra Kék szín jelöli az f függvény grafikonjának azon pontjait, amelyeknek y koordinátája 2-nél nagyobb

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben! Hány pontból áll a függvények képe? Összeköthetők-e ezek a pontok? Rendeljük hozzá minden 12-nél nem nagyobb pozitív egészhez

a) a reciprokának hatszorosát;

b) az ellentettjénél 2-vel kisebb számot!

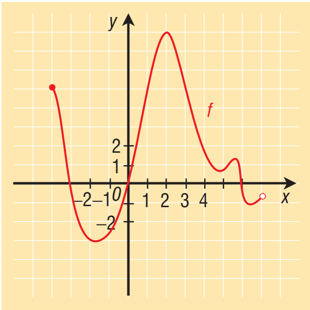
2. Adott az f függvény grafikonja (3.11. ábra).

a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és zérushelyeit!

b) Mivel egyenlő $f(1)$?

c) Mely valós x-re teljesül, hogy $f(x) = 5$?

d) Mely valós x-re teljesül, hogy $f(x) < 5$?

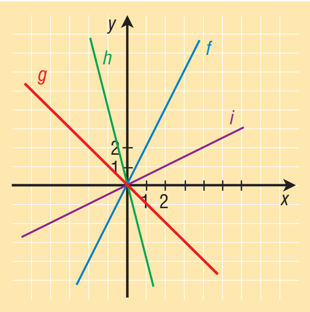


3.11. ábra A 2. feladathoz tartozó f függvény grafikonja

4. Lineáris függvények, egyenes arányosság

x	0	2
$f(x) = 2x$	0	4
$g(x) = -x$	0	–2
$h(x) = -4x$	0	–8
$i(x) = \frac{1}{2}x$	0	1

4.1. ábra A grafikonok 2-2 pontjának meghatározása



4.2. ábra Ábrázolás koordinátasíkon

1. példa Ábrázoljuk az alább megadott függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben! Milyen közös tulajdonságai vannak az alább megadott függvényeknek?

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=2x\,;\ \ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x\,;$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -4x\,;\quad i:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1}{2}x$

Megoldás:

Korábbi ismereteink alapján tudjuk, hogy az *f*, *g*, *h*, *i* függvények grafikonja egyenes, ezért az ábrázolásukhoz elegendő két-két pontjuk meghatározása. (4.1. és 4.2. ábra)

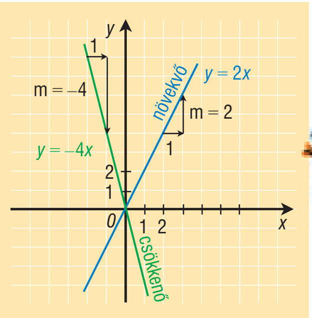
A függvények közös jellemzője az, hogy a hozzárendelési utasításaikban az *x*-et egy-egy valós számmal szorozzuk meg, azaz a hozzárendelés $x\mapsto mx$ alakú. Az *m* együtthatót az egyenes **meredekségének** nevezzük. Ez az *m* meredekség jellemzi az egyenest: ha a változó értékét 1-gyel növeljük, akkor a függvényérték *m*-mel változik. (4.3. ábra)

Vegyük észre, hogy ha *m* pozitív, akkor növekvő *x*-ek esetén növekednek a függvényértékek is, negatív *m* esetén pedig az *x*-ek növekedésével csökkennek a függvényértékek! (Ha $m = 0$, akkor minden függvényérték 0.)

Definíció Azt mondjuk, hogy az f függvény **szigorúan monoton növekvő** az értelmezési tartományának egy intervallumán, ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ elemeihez rendelt függvényértékekre az $f(x_1) < f(x_2)$ reláció áll fenn.

Ha a függvényértékek között egyenlőség is fennállhat, akkor az *f* függvényt **monoton növekvő**nek mondjuk ezen az intervallumon.

Szemléletesen: nagyobb változóértékhez nagyobb függvényérték tartozik. Például: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=2x$ és az $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{2}x$ függvények a $]-\infty;\infty[$-on szigorúan monoton növekvőek.



4.3. ábra Szigorúan monoton függvények grafikonjai

Definíció Azt mondjuk, hogy az *f* függvény **szigorúan monoton csökkenő** az értelmezési tartományának egy intervallumán, ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ elemeihez rendelt függvényértékekre az $f(x_1) > f(x_2)$ reláció áll fenn.

Ha a függvényértékek között egyenlőség is fennállhat, akkor az *f* függvényt **monoton csökkenőnek** mondjuk ezen az intervallumon.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 110 2012.06.25. 14:18:09

Például: $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -4x$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x$ függvények a $]-\infty;\infty[$-on, vagyis az értelmezési tartományukon végig szigorúan monoton csökkenőek.

2. példda Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1}{2}x-1$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -4x+3$ függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben!

Megoldás:
Mindkét függvény képe egyenes, ábrázolásukhoz elegendő két-két pontjuk megadása. Például: az *f* függvény $x=0$-hoz -1-et, $x=8$-hoz 3-at rendel. (4.5. ábra) Az *f* és a *g* függvények hozzárendelési utasítása $x\mapsto mx+b$ alakú ($m\neq 0$; $m, b\in\mathbb{R}$), az *f* függvénynél $m=\frac{1}{2}$, $b=-1$; a *g* függvény esetén $m=-4$, $b=3$.

Definíció Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx+b$ alakú függvényeket, (ahol $m\neq 0$, $m, b\in\mathbb{R}$) **elsőfokú függvényeknek** nevezzük.

Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=b$ alakú függvények az ún. **konstans** függvények, amelyeknek képe az *x* tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindazokat a függvényeket, amelyeknek képe egyenes, **lineáris függvényeknek** nevezzük. (Ezek az elsőfokú, illetve konstans függvények.)

3. példa Számítsuk ki az alábbi függvények $x=0$ helyen vett helyettesítési értékét, majd ábrázoljuk a függvényeket!

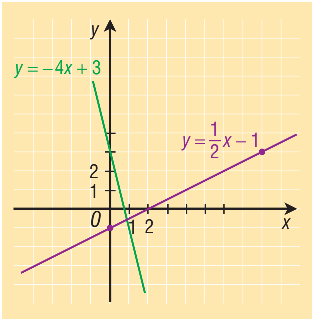
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+5;$ $\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-\frac{1}{2}x-3;$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=4.$

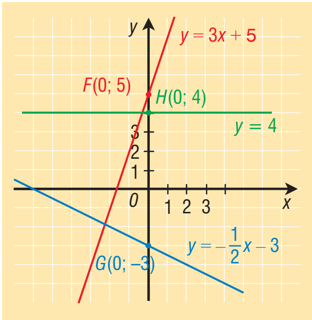
Megoldás:
Az *f* függvény $x=0$ helyen vett helyettesítési értéke $f(0)=3\cdot 0+5=5$, a *g* függvényé $g(0)=-\frac{1}{2}\cdot 0-3=-3$, a *h* függvényé pedig $h(0)=4$. (4.6. ábra)

Vegyük észre, hogy az $x=0$ helyen vett helyettesítési érték éppen a hozzárendelési utasításban szereplő *b* konstanssal egyenlő! Mivel *b* könnyen leolvasható a hozzárendelési szabályból, ezért célszerű az egyenes ábrázolásánál egyik pontnak ezt a pontot választani. Mindig igaz, hogy az $f(x)=mx+b$ hozzárendelési szabállyal megadott függvények $x=0$-hoz tartozó függvényértéke $f(0)=m\cdot 0+b=b$-vel egyenlő, ez a $(0;b)$ pontját határozza meg a függvény grafikonjának. A $(0;b)$ pont viszont nem más, mint az egyenes *y* tengellyel való metszéspontja.

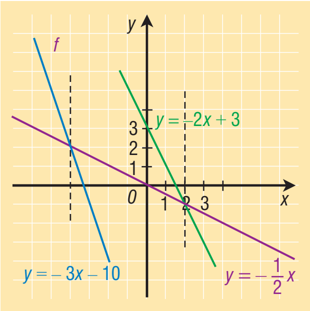
4.4. ábra A testmagasság az életkor függvényében



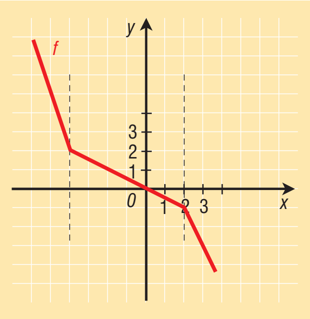
4.5. ábra A 2. példa grafikus megoldása



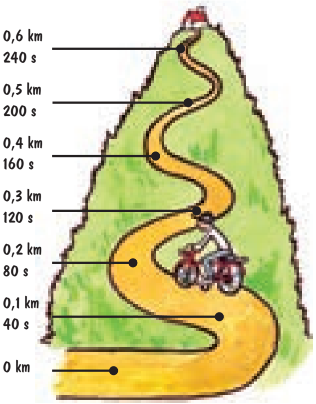
4.6. ábra A 3. példa grafikus megoldása



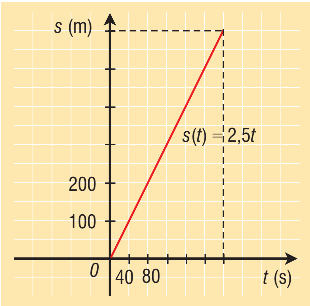
4.7. ábra A 4. példa megoldásában segít



4.8. ábra Az f függvény grafikonja



4.9. ábra Kerékpártúra



4.10. ábra $s \sim t$ grafikon

4. példa Ábrázoljuk és jellemezzük az f függvényt!

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-2x+3, & \text{ha } x\ge 2;\\ -\dfrac{1}{2}x, & \text{ha } -4\le x<2;\\ -3x-10, & \text{ha } x<-4.\end{cases}$$

Megoldás:

Az f függvény grafikonja a hozzárendelési szabály szerint az $x\mapsto -2x+3$, $x\mapsto -\frac{1}{2}x$ és az $x\mapsto -3x-10$ elsőfokú függvények grafikonjaiból (4.7.) „összerakható" a 4.8. ábrán látható módon. Az f függvény a $]-\infty;\infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, zérushelye $x=0$.

5. példa Egy gyakorlott kerékpáros egyenletes mozgással halad. A 0 kilométerkőtől kezdve 40 másodpercenként rápillant a kilométerórájára, s megjegyzi az adatokat. A dombtetőre érkezve az 4.9. ábra szerinti feljegyzést készíti el.

Foglaljuk táblázatba az 4.9. ábra adatait! Milyen kapcsolat van a t idő alatt megtett út és a t idő között? Rendeljük hozzá a megfigyelés kezdetétől eltelt időhöz (t-hez) a t idő alatt megtett utat (s), ábrázoljuk az így kapott függvény grafikonját!

Megoldás:

Vegyük észre, hogy a t idő alatt megtett út és a t idő között szoros kapcsolat van: 2-szer, 3-szor, 4-szer annyi idő alatt a túrázó 2-szer, 3-szor, 4-szer annyi utat tett meg!

t(s)	40	80	120	160	200	240
s(m)	100	200	300	400	500	600

A megtett út és az eltelt idő hányadosa állandó:

$$\frac{100}{40}=\frac{200}{80}=\frac{300}{120}=\frac{400}{160}=\frac{500}{200}=\frac{600}{240}=2,5.$$

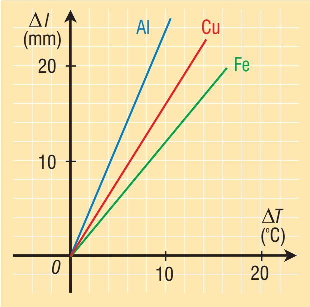
Az útnak és az időnek ezt a kapcsolatát úgy is nevezik, hogy a két mennyiség **egyenesen arányos**, és az arányossági tényezője 2,5. (A fizikában erre a kapcsolatra $s\sim t$ jelölés használatos.)

A $\dfrac{\text{megtett út}}{\text{eltelt idő}}=\text{állandó}=2,5$ azt jelenti, hogy a megtett út mindig 2,5-szerese az időnek, tehát a megtett út és az idő közötti kapcsolatot az $s=s(t)=2,5t$ formula írja le, amely alapján a keresett függvény elsőfokú függvény, grafikonja origó kezdőpontú félegyenes.

Definíció Ha két változó mennyiség összetartozó értékeinek hányadosa állandó vagy mindkét érték egyszerre 0, akkor azt mondjuk, hogy a két mennyiség **egyenesen arányos.**

Általában minden $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx$ függvényről azt mondhatjuk, hogy **egyenes arányosság,** melynek arányossági tényezője m. Az f képe origóra illeszkedő egyenes.

6. példa A mellékelt grafikon azonos hosszúságú, alumíniumból (Al), rézből (Cu) és vasból (Fe) készült rudak hőmérséklet-változásra (ΔT) bekövetkező megnyúlását (Δl) ábrázolja. (4.11. ábra)
a) Milyen kapcsolat van az egyes rudak megnyúlása és hőmérséklet-változása között?
b) Hány mm a megnyúlása az egyes rudaknak 1 ºC-nyi hőmérséklet-változás hatására?
c) 10 ºC-nyi hőmérséklet-változás hatására az alumíniumból készült rúd megnyúlása hányszorosa a rézből, illetve a vasból készült rúd megnyúlásának?



4.11. ábra A hőtágulás szemléltetése

Megoldás:
a) A megnyúlás–hőmérséklet-változás grafikon mindhárom rúd esetén origón átmenő egyenes, ezért az egyes rudak megnyúlása és a hőmérséklet-változás között egyenes arányosság van.
b) A grafikonokról leolvasható, hogy 10 ºC-nyi hőmérséklet-változás hatására az alumíniumból készült rúd megnyúlása 24 mm, a rézből készült rúdé 16 mm, a vasból készült rúd megnyúlása pedig 11 mm. Így 1 ºC-nyi hőmérséklet-változás hatására az alumíniumrúdnak 2,4 mm, a rézrúdnak 1,6 mm és a vasrúdnak 1,1 mm a megnyúlása.
c) A b) rész miatt az alumíniumból készült rúd megnyúlása $\frac{24}{16}=$ $=1{,}5$-szerese a rézből és $\frac{24}{11}$-szerese a vasból készült rúd megnyúlásának.

7. példa Egy 36 fős, szerenádot adó osztályt a fogadó tanár meggyes lepénnyel szeretne megkínálni. 24 szelet meggyes sütihez 20 dkg liszt, 20 dkg margarin, 4 egész tojás, 15 dkg cukor, valamint 80 dkg kimagozott meggy és a meggyhez még 12 dkg cukor szükséges. Mennyit vásároljon a tanár az egyes összetevőkből, hogy a diákoknak 3–3 szelet lepény jusson?

4.12. ábra A zene öröm, a süti finom

Megoldás:
A süteményt alkotó anyagok mennyisége és a szeletek száma között egyenes arányosság van: kétszer, háromszor annyi szelet süteményhez kétszer, háromszor akkora mennyiség kell az egyes összetevőkből.

4.13. ábra $a = \dfrac{v}{t}$

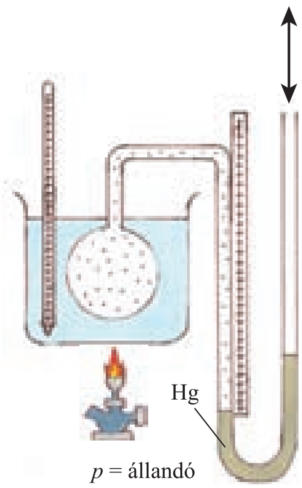
Például az ismeretlen mennyiségű lisztet x dkg-nak tekintve, az adatokat áttekinthető formában írhatjuk fel:

3·36 = 108 szelet	x dkg
24 szelet	20 dkg

Az összetartozó értékek aránya állandó, ezért $\dfrac{x}{20} = \dfrac{108}{24}$, ahonnan $x = 20 \cdot \dfrac{108}{24} = 20 \cdot 4{,}5 = 90$. Itt az arányossági tényező tehát 4,5, azaz minden hozzávalónak a receptben megadott mennyiségét 4,5-del kell szorozni.

24 szelethez: 4 db tojás kell, így 108 szelethez 4,5·4 = 18 db.
24 szelethez: 27 dkg cukor kell, így 108 szelethez 4,5·27 = 121,5 dkg.
24 szelethez: 80 dkg meggy kell, így 108 szelethez 4,5·80 = 360 dkg.

Tehát lisztből és margarinból 90–90 dkg-ot (a liszt és a margarin mennyisége megegyezett 24 szelet esetén, így 108 szeletnél is ugyanannyi kell belőlük), cukorból 121,5 dkg-ot, meggyből 360 dkg-ot és 18 db tojást kell vásárolni.



4.14. ábra $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$

Az állandó nyomást a Hg-szintkülönbség állandóságával biztosítjuk.

A természetben lejátszódó folyamatokat leíró mennyiségek között nagyon fontos és gyakran előforduló kapcsolat az egyenes arányosság. Erre mutatunk még néhány példát.

1. Kezdősebesség nélküli, egyenletesen gyorsuló mozgásnál a test gyorsulása a pillanatnyi sebességének és a mozgás idejének hányadosával egyenlő állandó: $a = \dfrac{v}{t}$. Adott állandó gyorsulás esetében a mozgás ideje és a pillanatnyi sebesség egyenesen arányosak egymással.

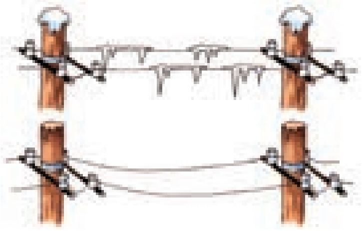
2. Ha az állandó tömegű gázok állapotváltozását figyeljük állandó nyomáson (izobár állapotváltozás), akkor azt kapjuk, hogy a kisebb térfogatú gáz hőmérséklete kisebb. A térfogatuk és az abszolút hőmérsékletük hányadosa állandó, vagyis ezek egyenesen arányos mennyiségek.

$$\left(\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} - \text{Gay-Lussac I. törvény.}\right)$$

3. Ha az állandó tömegű gázok állapotváltozását figyeljük állandó térfogaton (izochor állapotváltozás), akkor azt kapjuk, hogy a kisebb nyomású gáz hőmérséklete kisebb. A nyomás és a hőmérséklet hányadosa állandó, vagyis ezek egyenesen arányos mennyiségek.

$$\left(\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} - \text{Gay-Lussac II. törvény.}\right)$$

4. Szilárd test hosszának változása (Δl) egyenesen arányos a test kezdeti hosszával (l_0) és a hőmérséklet-változással (ΔT). A lineáris hőtágulás törvénye: $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$.



4.15. ábra $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = -2x + 5$; b) $g(x) = x - 4$; c) $h(x) = -\frac{1}{2}x$; d) $i(x) = \frac{5}{3}x + 5$; e) $j(x) = -4x - 3$;

f) $k(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{ha } x \geq 2 \\ 4, & \text{ha } -3 \leq x < 2 \\ -x + 1, & \text{ha } x < -3 \end{cases}$; g) $l(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha } x \leq -4 \\ \frac{3}{2}x + 6, & \text{ha } x > -4 \end{cases}$

2. Határozzuk meg és ábrázoljuk azt a lineáris függvényt, amely grafikonjának meredeksége *m*, és grafikonja *y* tengellyel való metszéspontjának ordinátája *b*!

a) $m = 2$, $b = -3$ b) $m = -2$, $b = 6$ c) $m = \frac{3}{4}$, $b = 3$ d) $m = \frac{5}{2}$, $b = 0$

e) $m = -\frac{2}{3}$, $b = -2$ f) $m = 0$, $b = 2$ g) $m = 0$, $b = -3$ h) $m = 0$, $b = 0$

3. Határozzuk meg és ábrázoljuk azt a lineáris függvényt, amelynek grafikonja áthalad az *A* és a *B* pontokon!

a) $A(1; 3)$, $B(3; 5)$ b) $A(-1; -2)$, $B(-3; 2)$ c) $A(1; -3)$, $B(2; -6)$ d) $A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $B(-3; 0)$

4. 6 szeletes pizzához 30 dkg liszt, 1 dkg cukor, 80 dkg paradicsom, 5 g oregánó, 3 dkg élesztő és 15 dkg sajt szükséges. Mekkora mennyiség kell az egyes összetevőkből, ha egy tízfős társaságot szeretnénk vendégül látni úgy, hogy mindenkinek 4-4 szelet pizza jusson?

5. Egy gázpalackban levő gáz hőmérsékletét 15%-kal megnöveltük. Hány %-kal változik a palackban levő gáz nyomása?

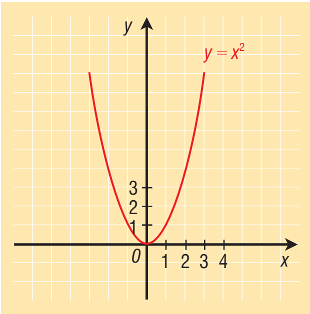
5. A másodfokú függvény

1. példa Mekkora annak a négyzetnek a területe, amelynek kerülete 4*x* egység?

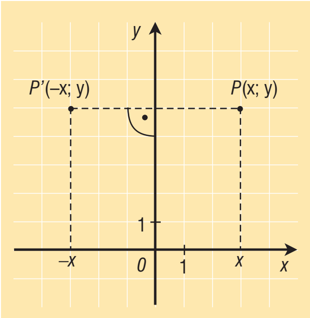
Megoldás:
A négyzet területének (*T*) mérőszáma egyenlő az oldalhossz (*x*) mérőszámának négyzetével, így a keresett terület $T = x^2$ képlettel felírható. (A felírásból észrevehető, hogy a terület nagysága az oldal nagyságától függ.)

Ezzel a formulával egy függvényt értelmezhetünk, mégpedig azt a függvényt, amely minden pozitív valós számhoz (a négyzet oldalának mérőszáma csak pozitív lehet) hozzárendeli a négyzetét (második hatványát): $t: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $t(x) = x^2$.

Értelmezzük az *f* függvényt ugyanilyen hozzárendelési szabállyal a valós számok halmazán. (Ez az előbbi függvénynek a kiterjesztése.) Ekkor az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Ábrázoljuk és jellemezzük az *f* függvényt! (5.1. ábra)



5.1. ábra $f(x) = x^2$



5.2. ábra A páros függvény két tetszőleges pontjának képe

Az f függvény grafikonjának neve **parabola** (pozitív irányba nyíló parabola). Jól látható, hogy a kapott grafikon szimmetrikus az y tengelyre. Mivel bármely x valós számnak és ellentettjének, azaz $-x$-nek a négyzete egyenlő egymással: $x^2 = (-x)^2$, ezért az f függvény az x-hez ugyanazt a függvényértéket rendeli, mint a $-x$-hez. Az f függvényt ekkor **páros** függvénynek nevezzük (5.2. ábra).

Definíció Egy függvényt **párosnak** nevezünk, ha rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:
- az értelmezési tartományának minden elemével együtt annak ellentettje is eleme az értelmezési tartományának; (ha $x \in D_f$, akkor $-x \in D_f$);
- minden értelmezési tartománybeli elem ellentettjéhez az eredeti elemhez rendelt függvényértéket rendeli; (minden $x \in D_f$ esetén $f(-x) = f(x)$).

Az előbb említettekből rögtön következik, hogy ha egy $P(x; y)$ pont rajta van egy páros függvény képén, akkor annak az y tengelyre vett tükörképe, a $P'(-x; y)$ pont is rajta van a függvény grafikonján. Páros függvény képe tehát tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.

Az f függvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, zérushelye: $x = 0$.

Az f függvény a $]-\infty; 0]$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $[0; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő.

Vegyük észre, hogy a függvény a 0 helyen 0-t, minden más helyen pozitív értéket vesz fel, ez azt jelenti, hogy a 0-hoz tartozó függvényérték a legkisebb függvényértéke. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $x_0 = 0$ **helyen** a függvénynek **minimuma** van, a minimum értéke $f(x_0) = f(0) = 0$.

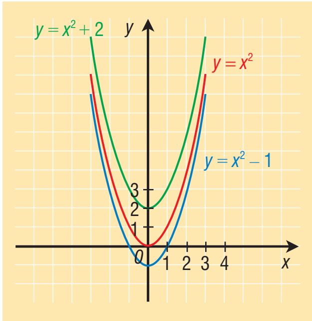
5.3. ábra Páros találat

Definíció Egy f függvénynek **minimuma** van az értelmezési tartományához tartozó x_0 **helyen**, ha az ott felvett $f(x_0)$ függvényértéknél kisebb értéket sehol sem vesz fel a függvény. (Az értelmezési tartományához tartozó x_0 helyen felvett $f(x_0)$ az értékkészlet legkisebb eleme.)

2. példa Írjuk fel a hozzárendelés szabályát szövegesen, majd ábrázoljuk a függvényeket:
a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$; b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$!

Megoldás:
a) Minden valós számhoz rendeljük hozzá a négyzeténél 1-gyel kisebb számot!
A biztonságos ábrázolás érdekében célszerű értéktáblázatot készítenünk:

x	–2	–1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
x^2-1	**3**	**0**	**–1**	**0**	**3**



5.4. ábra Tologatás az y tengely mentén

Az értéktáblázat második és harmadik sorának összehasonlításából észrevehetjük, hogy az $f(x)=x^2-1$ függvény ugyanazon x értékekhez 1-gyel kisebb függvényértéket rendel, mint a $h(x)=x^2$ függvény. Így például a $h(x)=x^2$ függvény grafikonjának (–2; 4) pontjából az f függvény grafikonjának (–2; 4 – 1), azaz (–2; 3) pontja kapható meg. Hasonlóan a h függvény (1; 1) pontjából az f függvény (1; 0) pontja lesz. Az $f(x)=x^2-1$ függvény képét tehát megkaphatjuk úgy, hogy a $h(x)=x^2$ függvény grafikonját eltoljuk az y tengely mentén 1 egységgel negatív irányba, „lefelé”. (5.4. és 5.5. ábra)

b) Minden valós számhoz rendeljük hozzá a négyzeténél 2-vel nagyobb számot!

x	–2	–1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
x^2+2	**6**	**3**	**2**	**3**	**6**

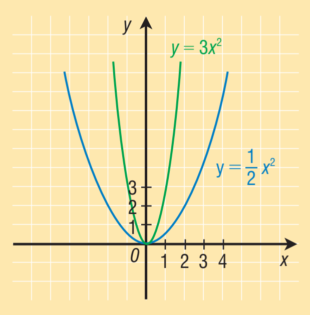
5.5. ábra Horgonyt le!

Észrevehetjük, hogy a $g(x)=x^2+2$ függvény ugyanazon x értékekhez 2-vel nagyobb függvényértéket rendel, mint a $h(x)=x^2$ függvény. Így például a $h(x)=x^2$ függvény grafikonjának (–2; 4) pontjából a g függvény grafikonjának (–2; 4 + 2), azaz (–2; 6) pontja kapható meg. Hasonlóan a h függvény (1; 1) pontjából a g függvény (1; 3) pontja lesz. A $g(x)=x^2+2$ függvény képét tehát megkaphatjuk úgy, hogy a $h(x)=x^2$ függvény grafikonját eltoljuk az y tengely mentén 2 egységgel pozitív irányba („felfelé”). (5.4. és 5.6. ábra)

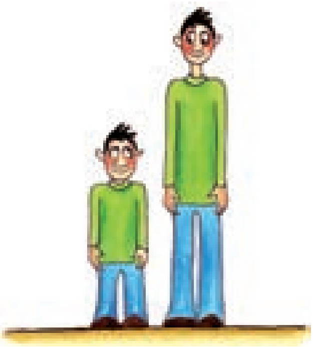
Mind az f, mind a g függvény grafikonját a $h(x)=x^2$ alapfüggvény képének segítségével ábrázoltuk. Az alapfüggvény $h(x)$ függvényértékéhez egy-egy konstanst adtunk, azaz $f(x)=h(x)-1$ és $g(x)=h(x)+2$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az f és a g függvényeket a h függvényből **transzformációval** hoztuk létre. A függvényértékeket változtattuk meg, ezért ezt a transzformációt **függvényérték-transzformációnak** nevezzük.

5.6. ábra Hálót fel!

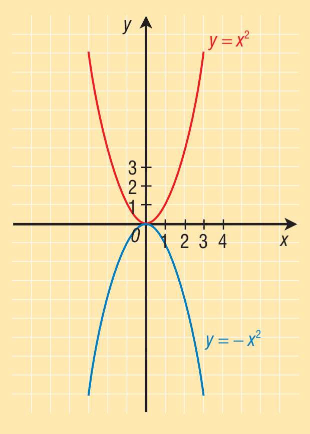
3. példa Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ és a $g(x)=3x^2$ függvényeket!



5.7. ábra Nyújtva, zsugorítva



5.8. ábra Én zsugorodom, vagy ő nyúlik?



5.9. ábra $f(x) = -h(x)$

5.10. ábra Tükörkép

Megoldás:

Az ábrázolást ebben az esetben is megkönnyítheti az értéktáblázat. A 2. példa alapján viszont egyszerű meggondolni, hogy az *f*, illetve a *g* függvény grafikonját hogyan lehet megkapni a $h(x) = x^2$ alapfüggvény grafikonjából.

Az f illetve a g függvény ugyanazon *x*-ekhez $\frac{1}{2}$-szer, illetve 3-szor akkora függvényértéket rendel, mint az alapfüggvény, azaz $f(x) = \frac{1}{2} \cdot h(x)$ és $g(x) = 3 \cdot h(x)$. Ezért az f függvény grafikonját megkaphatjuk, ha az alapfüggvény grafikonját (a normál parabolát) az y tengely mentén $\frac{1}{2}$-ére zsugorítjuk; a g képét pedig akkor, ha az alapfüggvény grafikonját az *y* tengely mentén 3-szorosára megnyújtjuk. (5.7. ábra)

Ebben az esetben is a függvényértékeket változtattuk meg (**függvényérték-transzformációt** végeztünk): a függvényértékeket az *f* függvény esetén egy 0 és 1 közé eső, *g* esetén egy 1-nél nagyobb számmal szoroztuk meg.

Vegyük észre, hogy ha egy parabolát eltolunk, akkor szintén parabolát kapunk! Az már nem olyan természetes, de szintén teljesül, hogy ha egy parabolát megnyújtunk vagy zsugorítunk, akkor is parabolát kapunk.

4. példa Ábrázoljuk az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ függvény grafikonját! Jellemezzük az *f* függvényt!

Megoldás:

Az alapfüggvény a $h(x) = x^2$ $(D_h = \mathbb{R})$ függvény. Az f függvény ugyanazon *x*-ekhez a h függvény által hozzárendelt $h(x)$ függvényérték –1-szeresét rendeli, azaz $f(x) = -h(x)$. Ez a **függvényérték-transzformáció** az alapfüggvény képének (normál parabolának) az ***x* tengelyre való tükrözését** eredményezi. Például az alapfüggvény a 2-höz a 4-et rendeli, míg az *f* függvény a 2-höz a 4 ellentettjét, a mínusz 4-et, így az alapfüggvény grafikonjának $(2; 4)$ pontjából az *f* függvény grafikonjának $(2; -4)$ pontját kaphatjuk meg, amely a $(2; 4)$ pont *x* tengelyre vonatkozó tükörképe. (5.9. ábra)

A függvény zérushelye az $x = 0$, a $]-\infty; 0]$-on szigorúan monoton növekvő, a $[0; \infty[$ -on szigorúan monoton csökkenő. A függvény páros, mert bármely *x* esetén $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$, értékkészlete a nempozitív valós számok halmaza.

Vegyük észre, hogy a függvény a 0 helyen 0-t, minden más helyen negatív értéket vesz fel, ez azt jelenti, hogy a 0-hoz tartozó függvényérték a legnagyobb függvényértéke. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $x_0 = 0$ **helyen** a függvénynek **maximuma** van, a maximum értéke $f(x_0) = 0$.

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ függvény grafikonja negatív irányba nyíló parabola.

5.11. ábra Magasabbra nem megy?

Definíció Egy *f* függvénynek **maximuma** van az értelmezési tartományához tartozó x_0 **helyen**, ha az ott felvett $f(x_0)$ függvényértéknél nagyobb értéket sehol sem vesz fel a függvény. (Az értelmezési tartományához tartozó x_0 helyen felvett $f(x_0)$ az értékkészlet legnagyobb eleme.)

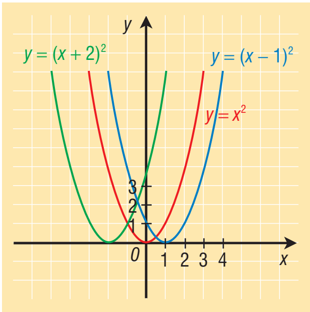
Definíció A függvények minimumát és maximumát közös néven **szélsőérték**nek nevezzük. Ennek megfelelően a minimumhelyeket és a maximumhelyeket **szélsőértékhely**eknek is nevezzük.

5. példa Ábrázoljuk az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2$ és a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x+2)^2$ függvényeket!

Megoldás:
Készítsünk értéktáblázatot az *f* függvény ábrázolásának megkönnyítése érdekében! A táblázat középső sorában tüntessük fel a $h(x) = x^2$ alapfüggvény megfelelő értékeit is.

x	–2	–1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$(x-1)^2$	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**

A táblázatból látszik, hogy az *f* függvény ugyanazokat a függvényértékeket 1-gyel nagyobb *x*-eknél veszi fel, mint az alapfüggvény. (Például a 4 függvényértéket az *f* az $x = -1$-nél, az alapfüggvény az $x = -2$-nél veszi fel.) Ezért a *h* függvény képe az *x* tengely mentén 1 egységgel pozitív irányba tolódik. Az alapfüggvény hozzárendelési szabályában az *x* (változó) helyére $(x - 1)$-et írva az *f* függvény hozzárendelési szabályát kapjuk: $h(x-1) = (x-1)^2 = f(x)$. Ekkor a változót változtattuk meg. (5.12. ábra) (Ilyenkor a **változó transzformációjá**ról beszélünk.)
Vizsgáljuk ugyanígy a *g* függvényt!



5.12. ábra Tologatás az *x* tengely mentén

5.13. ábra Hol a helye?

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x+2)^2$	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**

A táblázatból látszik, hogy a g függvény ugyanazokat a függvényértékeket 2-vel kisebb x-eknél veszi fel, mint az alapfüggvény. (Például a 4 függvényértéket a g az $x = 0$-nál, az alapfüggvény az $x = 2$-nél veszi fel.) Ezért a h alapfüggvény képe az x tengely mentén 2 egységgel negatív irányba tolódik. Az alapfüggvény hozzárendelési szabályában az x (változó) helyére $(x+2)$-t írva a g függvény hozzárendelési szabályát kapjuk: $h(x+2) = (x+2)^2 = g(x)$. Ez is a **változó transzformációja.** (5.8. ábra)

6. példa Ábrázoljuk és jellemezzük az

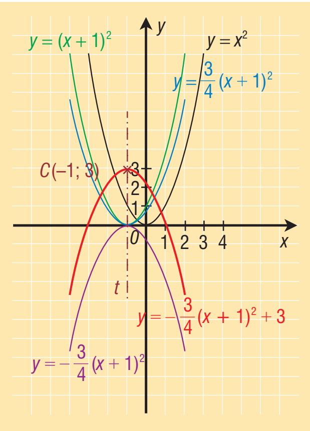
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^2+3 \quad \text{függvényt!}$$

Megoldás:
Az f függvény képét megkaphatjuk függvénytranszformációk segítségével, az $x \mapsto x^2$ alapfüggvény grafikonjából kiindulva.
1. lépésben az $f_1(x) = (x+1)^2$ függvény grafikonját vázolhatjuk fel úgy, hogy az $x \mapsto x^2$ alapfüggvény grafikonját az x tengely mentén 1 egységgel negatív irányba toljuk.
(Ez a **változó** transzformációja, mert a változóhoz konstanst adtunk.)

2. lépésben az $f_2(x) = \frac{3}{4}(x+1)^2$ függvény képét kaphatjuk meg az $f_1(x) = (x+1)^2$ függvény grafikonjából úgy, hogy azt az y tengely mentén $\frac{3}{4}$-ére zsugorítjuk.
(Ez **függvényérték-**transzformáció, hiszen a függvényértékeket egynél kisebb pozitív számmal szoroztuk.)

3. lépésben az $f_3(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^2$ grafikonja az $f_2(x) = \frac{3}{4}(x+1)^2$ függvény grafikonjának az x tengelyre vonatkozó tükörképe.
(Ez **függvényérték-**transzformáció, mert a függvényértékek ellentettjét vettük.)

4. lépésben az $f(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^2+3$ képéhez jutunk akkor, ha az $f_3(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^2$ grafikonját az y tengely mentén 3 egységgel „felfelé" eltoljuk.
(Ez **függvényérték-**transzformáció, mert a függvényértékekhez konstanst adtunk.)
Az egyes transzformációk, lépések során kapott grafikonokat a 5.14. ábra mutatja.



5.14. ábra Lépesről lépésre

Az $f(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^2+3$ függvény jellemzése:

Zérushely: $x_1 = 1;\ \ x_2 = -3;$

Szélsőérték: a maximum helye $x = -1;$

a maximum értéke $f(-1) = 3;$

Monotonitása: a $]-\infty; -1]$-on szigorúan monoton növekvő,

a $[-1; \infty[$-on szigorúan monoton csökkenő;

Nem páros

Grafikonja negatív irányba nyíló parabola.

Az előző példákból is látszik (később be is bizonyítjuk), hogy a parabola tengelyesen szimmetrikus görbe.

A parabola szimmetriatengelyét a parabola tengelyének nevezzük. A parabola azon pontját, amely illeszkedik a parabola tengelyére, **tengelypont**nak hívjuk. Például a 5.14. ábrán a parabola tengelye (t) az $x = -1$ egyenletű egyenes, tengelypontja $C(-1; 3)$.

Az f függvény hozzárendelési szabályában a kijelölt műveleteket elvégezve az $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ adódik. Az f függvény hozzárendelési szabályát ebben az alakban is megadhattuk volna, de a függvény transzformáció segítségével történő ábrázolásához a hozzárendelési szabályt az $f(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^2 + 3$ formára kellett volna alakítani. Lássunk most egy példát erre az átalakításra.

5.15. ábra Parabolaantennák

7. példa Ábrázoljuk az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ függvény grafikonját!

Megoldás:

Az átalakítás első lépése, hogy kiemeljük az x^2 együtthatóját, a 2-t:

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2\left(x^2 - 2x - 3\right) =$$

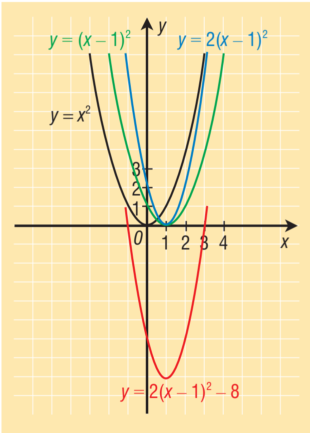
majd a zárójelen belül teljes négyzetté alakítunk:

$$= 2\left[(x-1)^2 - 1 - 3\right] =$$

végül rendezzük a kifejezést:

$$= 2(x-1)^2 - 8.$$

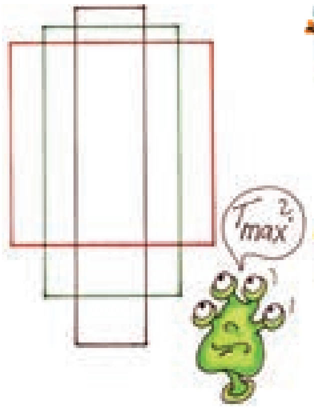
Tehát $f(x) = 2(x-1)^2 - 8$. Az előző példák alapján az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából transzformációk sorával eljuthatunk az f képéhez, amelyeket a 5.16. ábra szemléltet.



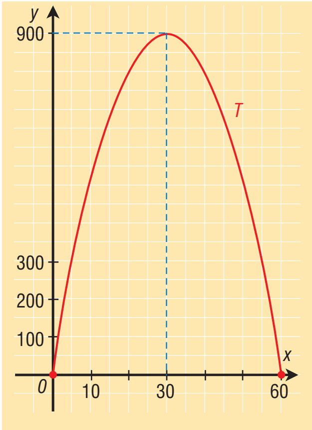
5.16. ábra Lépésről lépésre

Vegyük észre, hogy az 1–7. példákban szereplő függvények hozzárendelési szabályának van közös vonása, mégpedig az, hogy mindegyik az x változónak a másodfokú kifejezése, azaz $ax^2 + bx + c$ alakúak, ahol a, b, c valós számok és $a \neq 0$! Például a 2. példában szereplő f függvénynél $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, a 3. példában szereplő g függvénynél $a = 3$, $b = 0$, $c = 0$, a 7. példában szereplő függvénynél $a = 2$, $b = -4$, $c = -6$.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 121 2012.06.25. 14:19:34



5.17. ábra Mikor járok jobban?



5.18. ábra A T függvény grafikonja

5.19. ábra „Szabadesés”

Definíció Azokat a valós számok halmazán értelmezett függvényeket, amelyeknek hozzárendelési szabálya $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) alakú, **másodfokú függvények**nek nevezzük.

A másodfokú függvények grafikonja **parabola.**

8. példa A Kapjamarja nevű bolygóra érkező telepesek családonként egy 120 méter hosszú drótkerítést kapnak, amellyel egy téglalap alakú telket keríthetnek be maguknak. Mekkora lehet az ilyen feltételek mellett bekerített telek maximális területe? Mekkorák ebben az esetben a téglalap oldalai?

Megoldás:
A bekerített téglalap kerülete a feladat szövege alapján 120 méter, ahonnan adódik, hogy a téglalap két szomszédos oldalának összege (a félkerület) 60 méter.

Jelöljük a téglalap egyik oldalát x-szel $(0 < x < 60)$! Ekkor a másik oldala $60 - x$. A telek területe az x másodfokú függvénye: $T = T(x) =$
$$= x(60-x) = -x^2 + 60x = -\left(x^2 - 60x\right) = -\left(x^2 - 60x + 900 - 900\right),$$
amelyet átalakítva $T(x) = -(x-30)^2 + 900$ adódik.

A T függvény grafikonját a 5.18. ábra szemlélteti, ahonnan könnyen leolvasható, hogy a T függvénynek maximuma van, a maximum helye $x = 30$, a maximum értéke 900.

Tehát a telek területének maximális értéke $900\ \text{m}^2$, s ekkor a téglalap alakú telek oldalai 30 m-esek, azaz a téglalap négyzet.

A természetben lejátszódó folyamatokat jellemző mennyiségek közötti kapcsolatot gyakran másodfokú függvények segítségével tudjuk leírni, íme néhány példa.

1. Egyenletesen gyorsuló mozgásnál a test által megtett út (s) a mozgás idejének (t) másodfokú függvénye. Adott kezdősebesség (v_0) és állandó gyorsulás (a) esetén a megtett út: $s = s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

2. A h magasságból szabadon eső testnél a $h(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ összefüggés adja meg a h távolságot a t idő függvényében, ahol a g az ún. nehézségi gyorsulás, amely Magyarországon $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

3. Az egyensúlyi helyzettől számított x kitérésnél a rugóban „tárolt” rugalmas energiát az $E_{\text{rugalmas}} = \frac{1}{2} Dx^2$ összefüggés határozza meg, ahol E_{rugalmas} a rugó rugalmas (vagy potenciális) energiája, D pedig a rugóra jellemző állandó, az ún. rugóállandó.

$E_{rugalmas}$: a rugó rugalmas energiája a kitérés (x) másodfokú függvénye.

4. Galilei fedezte fel az ingaóra ingájának lengésideje (T) és az inga hossza (l) között az $l = \frac{g}{4\pi^2}T^2$ összefüggést (ahol g a már említett nehézségi gyorsulás), a formulából kiolvasható, hogy az inga hossza a lengésidő másodfokú függvénye.

5.20. ábra Ingaóra

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a tanult szempontok alapján (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, menete, szélsőértékek, paritás) az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $x \mapsto x^2 - 4$ b) $x \mapsto x^2 + 2$ c) $x \mapsto \frac{3}{2}x^2$ d) $x \mapsto \frac{1}{3}x^2$ e) $x \mapsto -2x^2$ f) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$

g) $x \mapsto (x-3)^2$ h) $x \mapsto (x+4)^2$ i) $x \mapsto (x-2)^2$ j) $x \mapsto (x+5)^2$ k) $x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$

l) $x \mapsto -(x+1)^2 + 4$ m) $x \mapsto 3(x-5)^2 - 3$ n) $x \mapsto \frac{3}{2}(x-3)^2 + 6$

2. Ábrázoljuk az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $x \mapsto x^2 - 4x$ b) $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ c) $x \mapsto x^2 + 2x + 3$ d) $x \mapsto -x^2 - 5x$

e) $x \mapsto x^2 + 8x - 10$ f) $x \mapsto -3x^2 + 6x - 3$ g) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ h) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$

3. Tekintsük az f: $[-3; 3[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ függvényt!
a) Határozzuk meg az $f(-2) - f(1)$ értéket!
b) Adjunk meg egy olyan zárt intervallumot, ahol az f függvény szigorúan monoton nő!
c) Mely változó(k)hoz rendeli az f függvény a -6 függvényértéket?
d) Határozzuk meg az f függvény szélsőértékét!

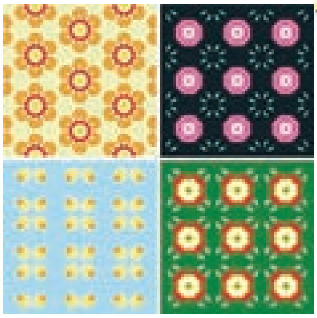
4. Tekintsük az $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ és a $g(x) = x - 1$ ($D_f = D_g = \mathbb{R}$) függvényeket!
a) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f és a g függvények grafikonját!
b) Állapítsuk meg, hogy mely x értékre teljesül az $f(x) = g(x)$ egyenlőség!
c) Határozzuk meg a $g\left(\frac{3}{7}\right) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right)$ értékét!

5. Egy vállalkozás költségét a $C(x) = 25\,675x + 50\,000$ függvény írja le, a bevételét pedig az $R(x) = -25x^2 + 75\,725x - 50\,000$ függvény a darabszám ($x > 0$, $x \in \mathbb{Z}$) függvényében. ($C(x)$ és $R(x)$ értéke ezer forintban értendő.)
a) Írjuk fel a nyereséget ($\pi(x)$) a darabszám függvényében!
b) Milyen darabszámok előállítása esetén lesz a termelés nyereséges?
c) Hány termék előállítása esetén lesz a nyereség maximális? Mekkora ez a maximális nyereség?

6. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + p$ függvényt! Határozzuk meg a p valós számot úgy, hogy
a) az f függvény $x = -\frac{3}{2}$ helyen felvett értéke $\frac{5}{3}$ legyen;
b) az f függvénynek pontosan egy zérushelye legyen;
c) az f függvény szélsőértéke -1 legyen!

7. Tekintsük az $f(x)=-x^2+2x+3$ és $g(x)=p$ $\left(D_f=D_g=\mathbb{R},\ p\in\mathbb{R}\right)$ függvényeket!
a) Határozzuk meg a p valós számot úgy, hogy egyetlen olyan valós x legyen, amelyre $f(x)=g(x)$ teljesül!
b) Határozzuk meg a p valós számot úgy, hogy ne legyen olyan valós x, amelyre $f(x)=g(x)$ teljesül!

6. A négyzetgyök fogalma, négyzetgyökfüggvény



6.1. ábra 64 cm^2-es textilnégyzetekből szép foltmunka készíthető

1. példa Mekkora annak a négyzetnek a kerülete, amelynek területe 64 cm^2?

Megoldás:
Tudjuk, hogy egy négyzet területe egyenlő az oldalhosszának a négyzetével, a kerülete az oldalhosszának a négyszerese. Tehát arra vagyunk kíváncsiak, melyik az a pozitív szám, amelynek a négyzete 64. Ezt felírhatjuk egyenlet segítségével is. Jelöljük a-val a négyzet oldalának hosszát, így $a^2=64$, ahol $a>0$. Könnyen meghatározhatjuk az a értékét: $a=8$ cm. Olyan pozitív számot kerestünk, amelynek négyzete 64, ezt a számot 64 négyzetgyökének nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt{64}$. Tehát $\sqrt{64}=8$. Így a négyzet kerülete: $k=4a=32$ cm.

A négyzetre emelés definíciója alapján tudjuk, hogy

$$2{,}5^2=6{,}25;\qquad (-2)^2=4;\qquad 0^2=0.$$

Ha egy valós számot négyzetre emelünk, csak nemnegatív valós számot kaphatunk eredményként, így csak nemnegatív valós számnak értelmezhetjük a négyzetgyökét.

2. példa Legyen adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ függvény. Hol veszi fel ez a függvény a 9 értéket?

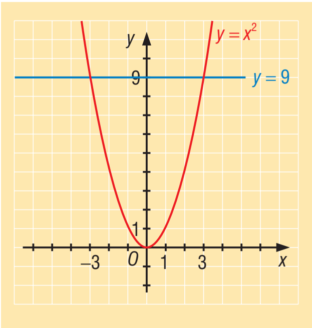
Megoldás:
Keressük azon valós számokat, amelyek négyzete 9. Ezt írjuk fel egyenlettel!

$$x^2=9,\ \text{ahol}\ x\in\mathbb{R}.$$

Két olyan valós szám van, amely megoldása az egyenletnek, az egyik $x_1=3$, a másik $x_2=-3$. Nekünk a függvényfogalom szempontjából fontos, hogy a négyzetgyökvonás a valós számok halmazán egyértelmű legyen, ezért megállapodunk abban, hogy a nemnegatív számok négyzetgyöke csak nemnegatív lehet. (6.2. ábra)

Ezek szerint: $3=\sqrt{9}$ és $-3=-\sqrt{9}$.

Ez alapján megfogalmazhatjuk a négyzetgyök definícióját.



6.2. ábra A 2. példa grafikus megoldása

Definíció Egy a nemnegatív valós szám **négyzetgyöke** az a nemnegatív valós szám, amelynek négyzete a.

Például: $\sqrt{16}=4$, mert $4>0$, és $4^2=16$.

$\sqrt{\frac{49}{144}}=\frac{7}{12}$, mert $\frac{7}{12}>0$, és $\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{49}{144}$.

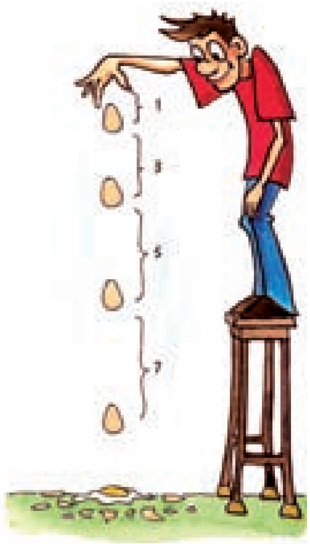
6.3. ábra Zuhanás

3. példa A h magasságból leejtett test t idő alatt ér földet. A $h=\frac{1}{2}g\cdot t^2$ összefüggés adja meg a magasságot (h) a leesés idejének függvényében (t). A g neve nehézségi gyorsulás, amely Magyarországon $g=9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, de az egyszerűbb számolás érdekében ezt vegyük $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$-nek! Adjuk meg a leesés t idejét a h magasság függvényében! Töltsük ki a táblázatot!

t(s)	10	15	7,21	$\sqrt{5}$					
h(m)					5	20	30	45	100

Megoldás:
A keresett összefüggést megkaphatjuk, ha a megadott formulából kifejezzük az időt. Így $t^2=\frac{2\cdot h}{g}$, azaz $t=\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}$, $h\in\mathbb{R}_0^+$. A feladatbeli képlet alapján kiszámolhatjuk a táblázat első oszlopában hiányzó adatot, hiszen $h=\frac{1}{2}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(10\ \mathrm{s})^2=500\ \mathrm{m}$. Ehhez hasonlóan járhatunk el az ezt követő három oszlop esetén is. Az ötödik oszloptól a $t=\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}$ képletet kell használnunk. Ez alapján pl. a nyolcadik oszlop hiányzó adatát az alábbi módon számolhatjuk ki: $t=\sqrt{\frac{2\cdot 30\ \mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\approx 2{,}45\ \mathrm{s}$. Ehhez hasonlóan számolhatjuk ki a többi esetben is az időt.

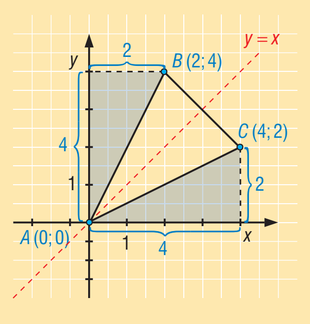
t(s)	10	15	7,21	$\sqrt{5}$	1	2	2,45	3	4,47
h(m)	500	1125	259,92	25	5	20	30	45	100



6.4. ábra Az első, a második, a harmadik és a negyedik másodpercben megtett utak aránya 1:3:5:7

Mivel a nemnegatív valós számok négyzetgyöke egyértelműen meghatározott, ezért megadhatunk olyan függvényt, amely minden nemnegatív valós számhoz hozzárendeli a négyzetgyökét:

Definíció $f:(\mathbb{R}_0^+)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{x}.$
Ezt a függvényt nevezzük **négyzetgyökfüggvény**nek.

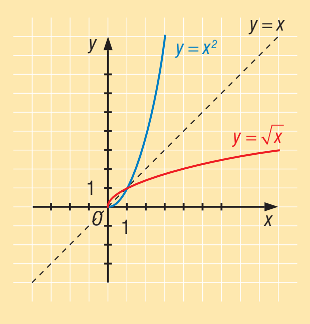


6.5. ábra Az *ABC* háromszög

4. példa Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azt a háromszöget, amelynek csúcsai: $A(0;0)$, $B(2;4)$, $C(4;2)$! Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egyenlő szárú, és határozzuk meg a szimmetriatengelyét!

Megoldás:
Tekintsük az 6.5. ábrán besatírozott derékszögű háromszögeket! Ezeknek egyenlő két-két befogója, ezért az átfogójuk is. Ha az egyik háromszöget tengelyesen tükrözzük az $y = x$ egyenletű egyenesre, akkor a másik háromszöget kapjuk. Így az *ABC* háromszög szimmetriatengelye ez az egyenes.

Vegyük észre, hogy az előző feladatban szereplő *B* pont második koordinátája az első koordinátájának a négyzete, míg a *C* pont második koordinátája az első koordinátájának a négyzetgyöke. Így a *B* pont rajta van a $g:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$, a *C* pont pedig az $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonján.



6.6. ábra Az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ függvények inverz kapcsolatának ábrázolása

Az előbb látottakhoz hasonlóan bizonyítható, hogy a *g* függvény grafikonját az $y = x$ egyenesre tükrözve az *f* függvény grafikonját kapjuk, tehát az *f* függvény grafikonja egy fél parabola. A grafikon a 6.6. ábrán látható. Azt mondjuk, hogy az *f* függvény a *g* függvény inverze.

A későbbiekben még foglalkozunk a függvények közötti inverzkapcsolattal.

5. példa Jellemezzük az $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ függvényt!

Értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza.	$D_f = \mathbb{R}_0^+$.
Értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza.	$R_f = \mathbb{R}_0^+$
Zérushely	$x = 0$
Minimumhelye	$x = 0$
Minimuma	$f(0) = 0$
Maximuma	nincs
Monotonitása	a $[0;\infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő

6. példa Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a) $\sqrt{x-3}$; b) $\sqrt{16x^2 - 24x + 9}$; c) $\sqrt{-x}$;

d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$; e) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$!

Megoldás:

a) Mivel négyzetgyököt csak nemnegatív számból vonhatunk, így $x-3 \geq 0$, azaz $x \geq 3$. Tehát az értelmezési tartomány: $[3;\infty[$.

b) A négyzetgyök alatt egy teljes négyzet szerepel, mert $16x^2-24x+9=(4x-3)^2$. Mivel bármely valós szám négyzete nemnegatív, ezért a kifejezés értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$.

c) Az előzőekhez hasonlóan $-x \geq 0$, azaz $x \leq 0$. Az értelmezési tartomány: $]-\infty;0]$.

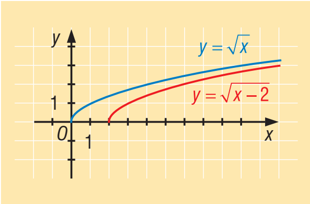
d) Ebben az esetben mind a két tagnak értelmezhetőnek kell lennie. Így annak kell teljesülnie, hogy $x \geq 1$ és $x \leq 1$. Mindkét egyenlőtlenségnek csak az $x=1$ felel meg, így az értelmezési tartomány: $\{1\}$.

e) Az első tag csak a nemnegatív számok halmazán, a második pedig a negatív számok halmazán értelmezett, így az értelmezési tartomány üres halmaz.

7. példa Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényeket:

a) $f:[2;\infty[\to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x-2}$;

b) $h:]-\infty;0] \to \mathbb{R},\ h(x)=\sqrt{-x}$!



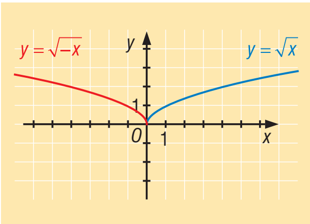
6.7. ábra 7. példa $f(x)$

Megoldás:

a) Az f függvény ugyanazt az értéket 2-vel nagyobb helyen veszi fel, mint az alapfüggvény $\left(x \mapsto \sqrt{x}\right)$, így a grafikonját úgy kapjuk, hogy az alapfüggvény grafikonját 2-vel eltoljuk az x tengely mentén pozitív irányba. (6.7. ábra)

Az értékkészlete a nemnegatív számok halmaza, a nullát, amely a minimuma is, $x=2$ esetén veszi fel, amely így egyben a minimumhelye is. Maximuma nincs. Az értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő. Se nem páros, se nem páratlan.

b) A h függvény az alapfüggvénnyel azonos értékeket –1-szeres helyeken vesz fel, így az alapfüggvény grafikonját tükrözni kell az y tengelyre. A jellemzés itt is könnyen leolvasható a grafikonról. (6.8. ábra)



6.8. ábra 7. példa $h(x)$

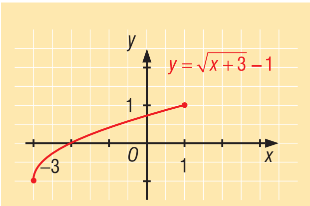
8. példa Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Határozzuk meg a szélsőértékeiket és szélsőértékhelyeiket, ha van!

a) $f:[-3;1] \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+3}-1$

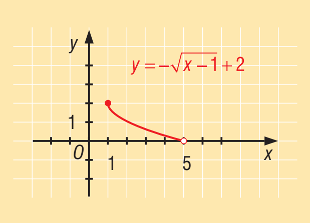
b) $g:[1;5[\to \mathbb{R},\ g(x)=-\sqrt{x-1}+2$

Megoldás:

a) A grafikont úgy kapjuk, hogy az alapfüggvény grafikonját eltoljuk az x tengely mentén negatív irányban 3 egységgel $\left(x \mapsto \sqrt{x+3}\right)$, majd az így kapott görbét az y tengely mentén negatív irányban 1 egységgel $\left(x \mapsto \sqrt{x+3}-1\right)$. Az így felvett parabolaívnek csak azt a részét tekintjük, amely a [–3;1] intervallumhoz tartozik. (6.9. ábra).



6.9. ábra 8. példa $f(x)$



6.10. ábra 8. példa $g(x)$

A szélsőértékek és azok helyei leolvashatók az ábráról. Maximumhelye: $x = 1$, maximuma: $f(1) = 1$, minimumhelye: $x = -3$, minimuma: $f(-3) = -1$.

b) A g függvény képét úgy kapjuk, hogy az alapfüggvény grafikonját eltoljuk az x tengely mentén pozitív irányban 1 egységgel $\left(x \mapsto \sqrt{x-1}\right)$, majd a –1-es szorzó miatt ezt tükrözzük az x tengelyre $\left(x \mapsto -\sqrt{x-1}\right)$, végül eltoljuk az y tengely mentén pozitív irányban 2 egységgel $\left(x \mapsto -\sqrt{x-1}+2\right)$, és az így kapott görbének az [1;5[intervallumhoz tartozó részét tekintjük. (6.10. ábra)

A függvénynek minimuma nincs, mert az 5 nem eleme az értelmezési tartománynak, maximumhelye: $x = 1$, a maximuma: $g(1) = 2$.

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki!

a) $\sqrt{196}$; $\sqrt{1024}$; $\sqrt{14400}$; $\sqrt{625}$ b) $\sqrt{1,69}$; $\sqrt{2,25}$; $\sqrt{0,0025}$; $\sqrt{12,96}$

c) $\sqrt{\frac{121}{81}}$; $\sqrt{\frac{16}{49}}$; $\sqrt{\frac{289}{100}}$; $\sqrt{\frac{961}{10000}}$

2. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi kifejezések értelmezhetők!

a) $\sqrt{2x-7}$; $\sqrt{3x+8}$; $\sqrt{7-4x}$; $\sqrt{-5x-3}$ b) $\sqrt{\frac{1}{x}}$; $\sqrt{\frac{1}{x-4}}$; $\sqrt{\frac{-2}{x-3}}$; $\sqrt{\frac{-1}{2+3x}}$

c) $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+3}$; $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}$; $\sqrt{-x+5}-\sqrt{-3-2x}$

d) $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-2x}$; $\sqrt{11-x}+\sqrt{\frac{2}{x-11}}$; $\sqrt{11x+5}+\frac{3}{\sqrt{11x-5}}$

3. Ábrázoljuk és jellemezzük a tanult szempontok alapján (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, menete, szélsőértékek, paritás) az alábbi függvényeket!

a) $a(x)=-\sqrt{x-5}$ $(x \geq 5)$ b) $b(x)=2\sqrt{x+4}$ $(x \geq -4)$ c) $c(x)=-\sqrt{x}+3$ $(x \geq 0)$

d) $d(x)=5,0\sqrt{x}-2$ $(x \geq 0)$ e) $e(x)=\sqrt{x-3}+2$ $(x \geq 3)$ f) $f(x)=-\sqrt{-x}+1$ $(x \leq 0)$

4. Fonálingának nevezünk egy könnyű fonálon függő, kisméretű és aránylag nagy tömegű testet a fonállal együtt. Ha a fonálingát felkötjük, majd a nyugalmi helyzetéből kitérítjük és elengedjük, akkor függőleges síkban lengéseket végez, a fonálra kötött test egy köríven mozog. Egy teljes lengés alatt a test kétszer egymás után végigfut a köríven, az ehhez szükséges időt hívjuk lengésidőnek, és T-vel jelöljük. Ha az inga kitérése kicsi, akkor a lengésidőre a $T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$ összefüggést kapjuk, ahol l az inga hossza, g pedig a nehézségi gyorsulás.

a) Adjuk meg az inga hosszát a lengésidő függvényében!

b) Töltsük ki a táblázatot!

T(s)				1	3	5
l(m)	0,1	5	1			

(A π -t vegyük 3,14-nek, a g-t $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ -nek!)

c) Hányszorosára változtassuk az inga hosszát, hogy a lengésideje kétszeresére, háromszorosára változzon?
d) Hány százalékkal csökkent az inga hossza, ha lengésideje 50%-kal csökken?
e) Hány százalékkal nőtt az inga hossza, ha lengésideje 50%-kal nő?

7. Az abszolútérték-függvény

Találkoztunk már korábban az abszolút érték fogalmával. A pontosság kedvéért adjuk most meg ezen fogalmak definícióját!

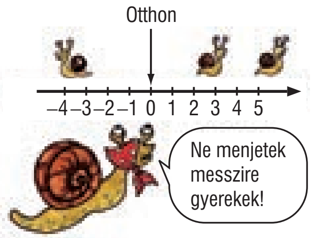
Definíció Valós számok **abszolút értékét** a következőképpen értelmezzük. Pozitív szám abszolút értéke önmaga, nulla abszolút értéke nulla (szintén önmaga), negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje.
Jele: $|x|$.
Röviden így is le szoktuk írni: $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0; \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

Például: $|-3| = 3,\ |5| = 5,\ |\pi| = \pi,\ |-0,2| = 0,2,\ \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

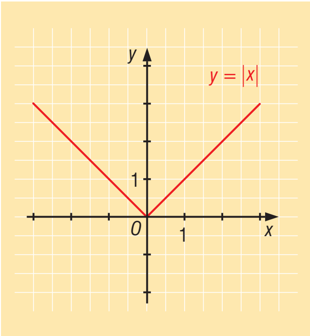
Definíció Rendeljük hozzá minden valós számhoz az abszolút értékét! Jelekkel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$.
Ezt a függvényt nevezzük abszolútérték-függvénynek.

Képét az 7.2. ábrán láthatjuk.
Jellemezzük a függvényt!

Értelmezési tartománya a valós számok halmaza.	$D_f = \mathbb{R}$
Értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza.	$R_f = \mathbb{R}_0^+$
A függvény a legkisebb értékét a 0-nál veszi fel,	minimumhelye $x = 0$
ezen a helyen a függvény értéke (a legkisebb függvényérték) 0.	minimuma $f(0) = 0$
A függvény bármelyik valós számhoz és annak ellentettjéhez ugyanazt a függvényértéket rendeli, tehát a függvény páros. Ezért a függvény képe szimmetrikus az y tengelyre; két egymáshoz csatlakozó félegyenesből áll.	$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = f(-x)$, vagyis $|x| = |-x|$.



7.1. ábra Melyik kiscsiga merészkedett legmesszebb hazulról?

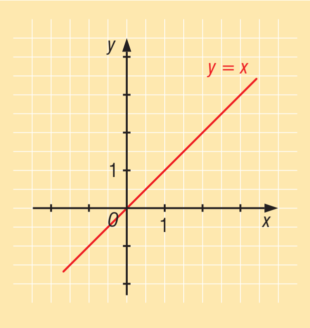


7.2. ábra Abszolútérték-függvény

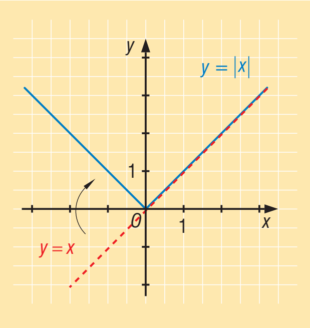
Azt mondjuk, hogy a két félegyenes találkozási pontjánál a függvény grafikonjának töréspontja van.

Eddig a pontig csökkenő a függvény,	A $]-\infty;0]$-on szigorúan monoton csökkenő,
innentől pedig növekvő.	a $[0;\infty[$-on szigorúan monoton növekvő.
Egyetlen zérushelye: 0.	Az $f(x_0)=0$ egyenlet megoldása: $x_0=0$.

Vegyük észre, hogy az abszolútérték-függvény képét elő tudnánk állítani egy már ismert elsőfokú függvény képének segítségével! Először az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ függvényt ábrázoljuk. Az x tengelytől pozitív irányban levő félegyenesét hagyjuk változatlanul, az x tengelytől negatív irányban levő félegyenesét pedig tükrözzük az x tengelyre. 7.3. és 7.4. ábra)



7.3. ábra $x\mapsto x$



7.4. ábra $x\mapsto |x|$

1. példa A következő feladatok az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto |x|$ abszolútérték-függvényre vonatkoznak.
a) Írjuk fel a kérdést matematikai jelekkel, majd válaszoljunk!
Mennyi a függvény (helyettesítési) értéke –6-nál?
b) Írjuk fel szövegesen a matematikai jelekkel megadott kérdést, majd válaszoljunk! $f(x)=5,2$ $x=?$

Megoldás:
a) A kérdés jelekkel fölírva: $f(-6)=?$
Válasz: –6-nál a függvény helyettesítési értéke 6. $f(-6)=|-6|=6.$
(Más szóval a függvény –6-nál 6-ot vesz föl.)
b) A kérdés szöveges megfogalmazása: hol veszi föl a függvény az 5,2 értéket?

Válasz: azt keressük, mely számok abszolút értéke lesz 5,2.	$\lvert x\rvert=5,2.$
Két ilyen szám van: –5,2 és 5,2.	$x_1=-5,2;\ x_2=5,2.$

2. példa Írjuk fel a hozzárendelés szabályát szövegesen, majd ábrázoljuk a függvényt!

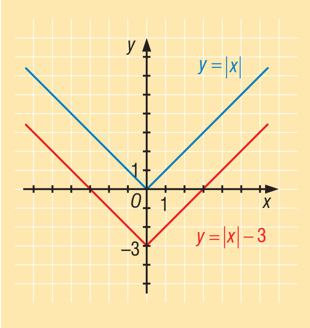
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto |x|-3$$

Hol veszi föl a függvény a legkisebb értékét, és mennyi ez a minimum?

Megoldás:
Minden valós számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékénél 3-mal kisebb számot! (Minden új függvénynél készíthetünk értéktáblázatot a biztonságos ábrázolás érdekében.)

Mi most a szöveges megfogalmazás szerinti ábrázolást választjuk, vagyis a már ismert abszolútérték-függvény függvényértékeinél 3-mal kisebb számokat keressük meg a grafikonon. A korábbi leckékben már tanultunk ilyet: függvényérték-transzformációt hajtunk végre.

Az eredeti abszolútérték-függvény képét eltoljuk az y tengely mentén negatív irányban 3 egységgel. A függvény most is az $x = 0$-nál veszi fel a legkisebb értékét, és ez az érték –3. Vagyis a függvény minimumhelye: 0, minimuma pedig –3. (7.5. ábra)



7.5. ábra Tologatás az y tengely mentén

3. példa Írjuk fel matematikai jelekkel a szövegesen megadott függvényt, majd ábrázoljuk!

A –4 és 3 közé eső számokhoz rendeljük hozzá az abszolút értékük kétszeresénél 5-tel kisebb számot! (Legyen benne az értelmezési tartományban a –4 és a 3 is!)

Keressük meg a függvény zérushelyeit!

Megoldás:

Matematikai jelekkel átírva: $f: [-4;\ 3] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto 2\cdot|x|-5.$

Készíthetünk értéktáblázatot. A teljes biztonság eléréséig akár soronként külön is megadhatjuk a számolt értékeket – a műveletvégzés ismert sorrendje szerint.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	4	3	2	1	0	1	2	3
$2\cdot\lvert x\rvert$	8	6	4	2	0	2	4	6
$2\cdot\lvert x\rvert-5$	3	1	–1	–3	–5	–3	–1	1

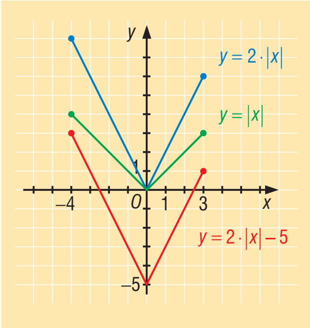
Természetesen nemcsak az egész számokhoz rendelünk függvényértékeket, pusztán ezeket egyszerűbb kiszámolni is, ábrázolni is.

A két algebrai műveletnek megfelelően két függvényérték-transzformációt kell végrehajtanunk egymás után. Először az alapfüggvény $(x \mapsto |x|)$ képét 2-szeresére nyújtjuk az y tengely mentén $(x \mapsto 2\cdot|x|)$, majd a kapott képet eltoljuk az y tengely mentén 5 egységgel negatív irányba $(x \mapsto 2\cdot|x|-5)$. (7.6. ábra)

Az ábrázolás során figyeljünk a megadott értelmezési tartományra, amely ezúttal csak egy intervallum: [–4; 3]!

A függvény ott vesz föl 0-t, ahol a képének közös pontja van az x tengellyel. Láthatjuk, hogy két ilyen hely is van, de nem egész számok. Így ezt most nem olyan könnyű pontosan meghatározni. Próbálkozzunk más úton! Az $f(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk a [–4; 3] intervallumon, vagyis a $2\cdot|x|-5=0$ egyenletet. Amíg az $|x|$-hez eljutunk, használhatjuk a mérlegelvet:

$$2\cdot|x|-5=0 \qquad / +5$$



7.6. ábra Lépésről lépésre

7.7. ábra Mérlegeljünk!

$$2 \cdot |x| = 5 \qquad / \ :2$$
$$|x| = 2{,}5.$$

Innen $x_1 = -2{,}5;$ $x_2 = 2{,}5.$ (Mindkettő eleme a $[-4; 3]$ intervallumok.)
A két zérushely tehát: –2,5 és 2,5.

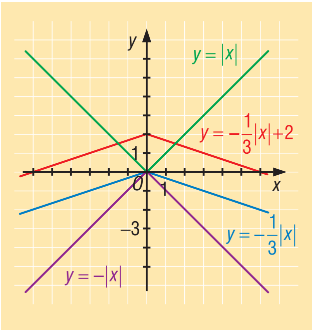
4. példa Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, és állapítsuk meg értékkészletüket, zérushelyeiket, szélsőértékhelyeiket és szélsőértékeiket!

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{3}|x| + 2;$ b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x-4|;$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{3}|x-4| + 2.$

Megoldás:
Itt is az $x \mapsto |x|$ függvény transzformáltjait vizsgáljuk.
a) A transzformációs lépések:

$x \mapsto -\lvert x\rvert$	x tengelyre tükrözzük az alapfüggvény képét.
$x \mapsto -\frac{1}{3}\lvert x\rvert$	A kapott képet $\frac{1}{3}$-ára zsugorítjuk az y tengely mentén.
$x \mapsto -\frac{1}{3}\lvert x\rvert + 2$	Az imént kapott grafikont az y tengely mentén pozitív irányba eltoljuk 2-vel.



7.8. ábra 4. a) példa

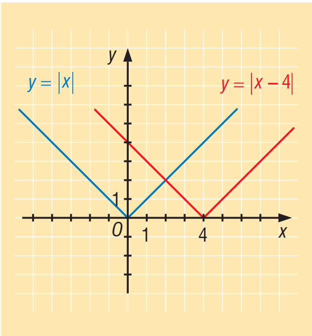
Az értékkészlet megállapítása előtt célszerű a függvények szélsőértékét meghatározni. Ezt most az ábráról olvassuk le! (7.8. ábra)
A függvény az $x = 0$ helyen az $f(0) = 2$ maximumát veszi fel.
Minimuma nincs.
Így a függvény értékkészlete a 2-nél nem nagyobb valós számok halmaza: $R_f = \left]-\infty; 2\right]$.

A zérushely megállapításához oldjuk meg a $-\frac{1}{3}|x| + 2 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

$$-\frac{1}{3}|x| = -2$$
$$|x| = 6$$
$$x_1 = -6 \ \text{ vagy } \ x_2 = 6.$$

A függvénynek tehát két zérushelye van: a –6 és a 6.

b) Az f függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az alapfüggvény képét az x tengely mentén pozitív irányban 4 egységgel eltoljuk. (7.9. ábra)
A függvény minimumhelye: $x = 4$, minimuma: 0.
Értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza $\left(R_f = \mathbb{R}_0^+\right)$.
(Maximuma nincs.)
Zérushelye: $x = 4$.

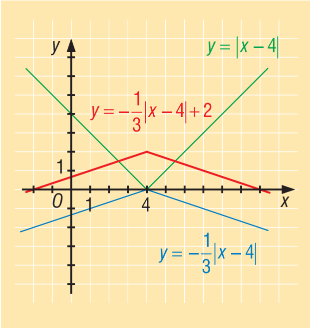


7.9. ábra 4. b) példa

c) A b) részben leírt függvény ismeretében gyorsan boldogulunk. Az ott kapott függvény értékeit kell először $-\frac{1}{3}$ -dal szoroznunk, majd ezekhez a szorzatokhoz hozzáadni 2-t. Az alapfüggvény (az abszolútérték-függvény) képéből kiindulva az alábbi transzformációkat hajtottuk végre.

Alapfüggvény: $x \mapsto |x|$

$x \mapsto \lvert x-4\rvert$	Eltoltuk a függvény képét az x tengely mentén pozitív irányban („jobbra”) 4 egységgel.
$x \mapsto -\frac{1}{3}\lvert x-4\rvert$	Tükröztük az x tengelyre és zsugorítottuk harmadára.
$x \mapsto -\frac{1}{3}\lvert x-4\rvert+2$	Eltoltuk az y tengely mentén pozitív irányban („fölfelé”) 2 egységgel. (7.10. ábra)



7.10. ábra 4. c) példa

A függvény maximumhelye: $x = 4$, maximuma: 2.

A függvény értékkészlete a 2-nél nem nagyobb valós számok halmaza.

$R_f =]-\infty;\ 2]$.

Zérushely-keresés:

$$-\frac{1}{3}|x-4|+2=0,$$
$$-\frac{1}{3}|x-4|=-2,$$
$$|x-4|=6,$$
$$x-4=-6 \text{ vagy } x-4=6,$$
$$x=-2 \text{ vagy } x=10.$$

A két zérushely: –2 és 10.

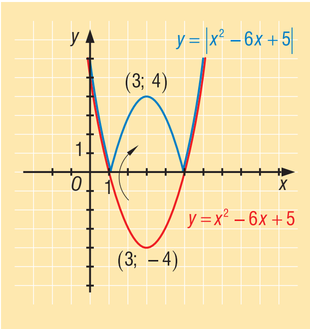
5. példa Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\left|x^2-6x+5\right|$ függvényt! Majd végezzünk rajta szélsőérték-vizsgálatot!

Megoldás:

Először a másodfokú függvénynél tanultak szerint hajtsuk végre az x^2-6x+5 kifejezés teljes négyzetté alakítását!

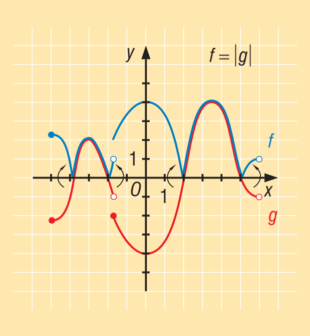
$$x^2-6x+5=\underbrace{x^2-2\cdot 3x+3^2}-9+5=(x-3)^2-4.$$

Ábrázoljuk most az $x\mapsto(x-3)^2-4$ hozzárendelési szabályú függvényt! Képe pozitív irányba nyíló parabola, amelynek tengelypontja a $(3;-4)$ pont. A vizsgált f függvény értékeit úgy kapjuk, hogy vesszük ezen másodfokú függvény értékeinek abszolút értékét. Hogyan ábrázoljuk az $x\mapsto x^2-6x+5$ függvény képe alapján az $x\mapsto\left|x^2-6x+5\right|$ függvény képét? Gondoljunk az abszolút érték definíciójára! A nemnegatív függvényértékeken az abszolút érték nem változtat, ezeket a pontokat helyben hagyjuk. (A grafikon x tengely „fölötti” része.) A negatív függvényértékek abszolút értéke pedig a számok ellentettje. Vagyis azoknak a pontoknak a második koordinátája változik meg, amelyek az x tengely „alatt” voltak. Ezeket tehát tükröznünk kell az x tengelyre. (7.11. ábra)



7.11. ábra Tükrözés

Így a függvény legkisebb értéke a 0 lesz, amit az $x = 1$-nél és az $x = 5$-nél vesz föl. Legnagyobb értéke ugyan nincs, de van egy olyan pontja, a $(3;\ 4)$ pont, amelynél a „közelben nem megy magasabbra” a függvény képe. Azt mondjuk, hogy az *f* függvénynek az $x = 3$ helyen helyi maximuma van, amelynek értéke: 4.



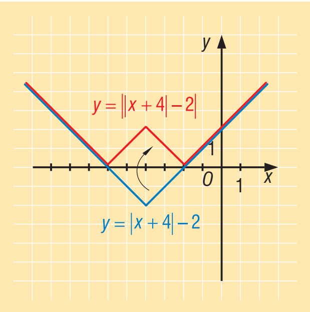
7.12. ábra Tükrözés

Az iménti eljárást bármely függvényen végrehajthatjuk. Tekintsünk egy grafikonjával megadott *g* függvényt! Az *f* függvény értékeit a *g* függvény segítségével állítsuk elő: $f(x) = |g(x)|$!

A 7.12. ábra jól szemlélteti azt, amit az előző példában is leírtunk. A *g* függvény képének az *x* tengely „fölötti” része helyben marad, az *x* tengely „alatti” részét pedig tükrözzük az *x* tengelyre.

Ezt speciálisan még abszolút értéket tartalmazó függvények abszolútértékére is tudjuk használni.

6. példa Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \big||x+4|-2\big|$ függvényt!



7.13. ábra Az abszolút érték abszolút értéke

Megoldás:
Legyen $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x+4|-2$. Értelmezzük úgy az *f* függvényt, mint a *g* függvény abszolút értékét! A *g* függvény ábrázolása után a fenti eljárást végrehajtva kapjuk az *f* függvény képét. (7.13. ábra)

Érdekességképpen próbálkozhatunk több hasonlóan „egymásba ágyazott” abszolútérték segítségével felírt függvények ábrázolásával is.

7. példa Ábrázoljuk a következő függvényeket, és jellemezzük a monotonitás szempontjából!

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x+3| + |x-5|$;

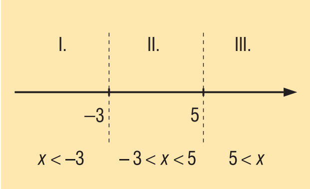
b) $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ g(x) = |x+2| - |x+4|$;

c) $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ h(x) = 2 \cdot |x-3| + |x+2|$.

Megoldás:
Mivel mindegyik függvény olyan részekre bontható, amelyeken a hozzárendelési szabály lineáris, ezért csak a töréspontok által felosztott számegyenes egyes részein érvényes hozzárendelési szabályokat kell kitalálnunk. Az *f*, *g* és *h* függvény is két abszolút értékes függvény összegzéséből származik. A két különböző töréspont összesen három részre bontja a számegyenest.

a) A két töréspont $x = -3$-nál és $x = 5$-nél van. Így a három rész: ld. 7.14. ábra. Ennek megfelelően táblázatba foglalhatjuk az egyes részeken érvényes hozzárendelési szabályokat:

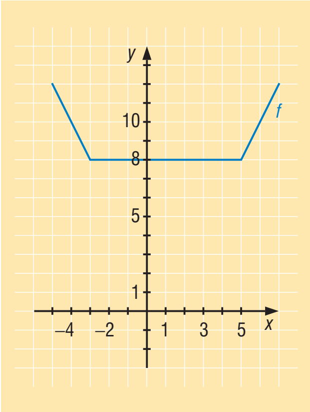
	I. $x<-3$	$x=-3$	II. $-3<x<5$	$x=5$	III. $5<x$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	0	$x+3$	8	$x+3$
$\lvert x-5\rvert$	$-x+5$	8	$-x+5$	0	$x-5$
$\lvert x+3\rvert+\lvert x-5\rvert$	$-2x+2$	8	8	8	$2x-2$



7.14. ábra Töréspontok helye

Az $x \mapsto \lvert x+3\rvert$ függvény az $x=-3$ töréspontban 0-t vesz föl, a törésponttól „jobbra" a kifejezés abszolút értéke önmaga; attól „balra" az ellentettje. Az $x \mapsto \lvert x-5\rvert$ függvény az $x=5$ töréspontban 0-t vesz föl, a törésponttól „jobbra" a kifejezés abszolút értéke önmaga; attól „balra" az ellentettje. Az utolsó sorban összeadjuk a fölötte álló kifejezéseket.

Leolvasható, hogy az I. részen ($x \le -3$ esetén) a függvény szigorúan monoton csökkenő, hiszen –2 a meredeksége; a II. részen ($-3<x\le 5$ esetén) konstans 8; míg a III. részen ($5<x$ esetén) szigorúan monoton növekvő. (7.15. ábra)

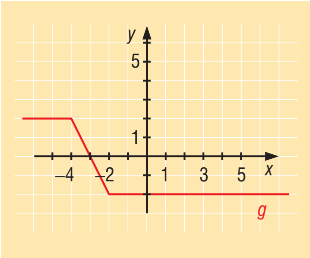


7.15. ábra 7. a) példa

b) Használjuk az előző módszert azzal a különbséggel, hogy az utolsó sorban egy kivonást kell végeznünk. A töréspontok helye $x=-2$ és $x=-4$.

	$x<-4$	$x=-4$	$-4<x<-2$	$x=-2$	$-2<x$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	2	$-x-2$	0	$x+2$
$\lvert x+4\rvert$	$-x-4$	0	$x+4$	2	$x+4$
$\lvert x+2\rvert-\lvert x+4\rvert$	2	2	$-2x-6$	-2	-2

Menete a $]-\infty;\ -4[$ intervallumon konstans, a $[-4;\ -2]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő; a $]-2;\ \infty[$ intervallumon ismét konstans. (7.16. ábra)

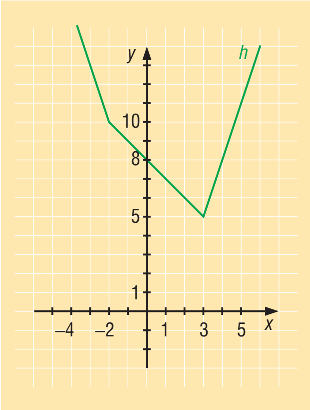


7.16. ábra 7. b) példa

c) Célszerű először az $\lvert x-3\rvert$-nek megfelelő hozzárendelési szabályokat feltüntetni a táblázatban, majd a kétszerezés utáni kifejezéseket. Végül emeljük ki azokat a sorokat, amelyek kifejezésein az összegzéseket végre kell hajtanunk. A töréspontok helye: $x=-2$ és $x=3$.

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<3$	$x=3$	$3<x$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	5	$-x+3$	0	$x-3$
$2\cdot\lvert x-3\rvert$	$-2x+6$	10	$-2x+6$	0	$2x-6$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$	5	$x+2$
$2\cdot\lvert x-3\rvert+\lvert x+2\rvert$	$-3x+4$	10	$-x+8$	5	$3x-4$

Menete: ha $x<3$, akkor szigorúan monoton csökkenő (bár van benne töréspont $x=-2$-nél, de előtte is, utána is csökkenő és egymáshoz csatlakozó részekből áll, vagyis ezen a tartományon végig csökkenő); ha pedig $x \ge 3$, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő. (7.17. ábra)



7.17. ábra 7. c) példa

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Jellemezzük a monotonitás és a zérushely szempontjából!

a) $f:[-5;\ 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=|x|-5$; c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=|x|+3$;

d) $j:]-2;\ 7[\to\mathbb{R},\ j(x)=|x-4|$; e) $k:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R},\ k(x)=|x+3|$.

Mondjuk el szavakban a hozzárendelési szabályokat!

2. A függvények ábrázolása után állapítsuk meg, milyen típusú szélsőértéke van az egyes függvényeknek (minimum vagy maximum), hol veszi fel ezt, és mennyi ez a szélsőérték!
Fölveszik-e a függvények az 5 értéket? Ha igen, hol?

a) $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto|x+2|-3$; b) $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto-2\cdot|x|$; c) $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto-|x-3|$;

d) $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto|x+4|+1$; e) $e:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto|x|-4$; f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto-|x|+7$.

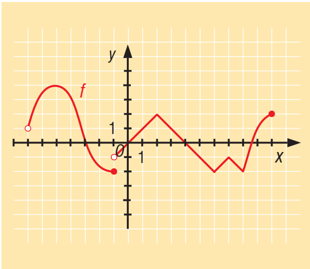
3. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Jellemezzük a tanult szempontok alapján (értelmezési tartomány, értékkészlet, menete, szélsőérték, zérushely, paritás)!

a) $f:[-6;\ 6]\to\mathbb{R},\ x\mapsto2|x-1|-5$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto-|x+4|+2$;

c) $h:]-7;\ 4[\to\mathbb{R},\ x\mapsto-\dfrac{1}{2}|x|-3$.

Milyen értéket vesznek föl a függvények –1-nél, 2-nél és 5-nél?

4. Az f függvényt grafikonjával adtuk meg. (7.18. ábra) Rajzoljuk meg a $|f|$ függvény képét! Adjunk meg olyan nyílt intervallumot, amelyen
a) az f függvény növekvő;
b) az $|f|$ függvény növekvő;
c) az $|f|$ függvény növekvő, de az f nem az!



7.18. ábra Az f függvény

5. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, és vizsgáljuk a menetüket!

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|(x+4)^2-9\right|$;

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\left|-(x+4)^2+9\right|$;

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\left|x^2-12x+20\right|$.

6. Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényeket:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\big||x+3|-2\big|$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\Big|\big||x-2|-5\big|-3\Big|-1$!

Hány zérushelyük van az egyes függvényeknek?

7. Ábrázoljuk és monotonitás szempontjából jellemezzük az alábbi függvényeket:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto|x-4|+|x+1|$;

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto|x+5|-|x-2|$;

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto|x-3|-2|x+2|$!

8. Fordított arányosság, lineáris törtfüggvény

1. példa Szántóék a tavasz kezdetén készülődnek kertjük felásásához. Péterke 1 óra alatt 2 m^2-t ás fel, apukája 8 m^2-t, anyukája 6 m^2-t, Sárika pedig 3 m^2-t. Mennyi időbe telne a családtagoknak külön-külön, hogy felássák a kertet, ha Szántó anyuka egyedül 12 óra alatt végezne a munkával?

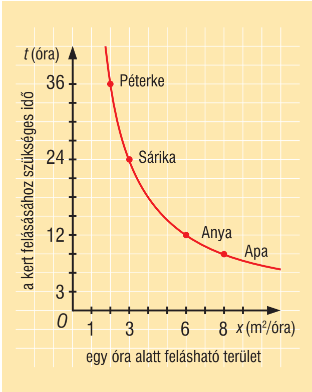
Ábrázoljuk a kert felásásához szükséges időt annak függvényében, hogy valaki mekkora területet tud felásni egy óra alatt!

8.1. ábra Szántó család versenyez

Megoldás:
Az adatokból kiolvasható, hogy Szántó anyuka gyorsabban dolgozik, mint a gyerekek (nagyobb a teljesítménye), de lassabban dolgozik, mint a férje. Ha más körülményt nem veszünk figyelembe, nyilvánvaló, hogy ha valaki ugyanannyi idő alatt kétszer (háromszor) annyit ás fel, mint a másik, akkor fele- (harmad-) annyi idő alatt fog végezni a munkával. Így Sárikának egyedül kétszer annyi időbe telne felásni a kertet, mint az anyukájának, hiszen a teljesítménye fele az anyukájáénak. Vagyis Sárika egyedül 24 óra alatt ásná fel a kertet. (Persze nem kell egyszerre megtennie a 24 órás ásást…) Péterkénél háromszor olyan gyorsan dolgozik az anyukája, így anyukájának csak harmadannyi idő kell a munka elvégzéséhez. Péterke tehát egyedül $3 \cdot 12 = 36$ óra alatt ásná fel a kertet. Szántó apuka viszont négyszer akkora teljesítménnyel dolgozik, mint Péterke, így negyedannyi időre lenne csak szüksége. Vagyis apuka $36 : 4 = 9$ óra alatt ásná fel egyedül a kertet.

Foglaljuk táblázatba az összetartozó értékeket! Írjuk a fölső sorba azt, hogy 1 óra alatt hány négyzetmétert ástak fel az egyes családtagok; az alsó sorba pedig azt, hogy ha egyedül végeznék a munkát, akkor mennyi időre lenne szükségük a teljes kert felásásához!

	Péterke	Apuka	Anyuka	Sárika
Hány m^2/óra?	2 m^2	8 m^2	6 m^2	3 m^2
Hány óra?	36 óra	9 óra	12 óra	24 óra



8.2. ábra A fordítottan arányos mennyiségek ábrázolása grafikonon

Vegyük észre, hogy az összetartozó értékpárok szorzata ugyanannyi (72) minden esetben!

Definíció Két mennyiség **fordítottan arányos,** ha az összetartozó értékeik szorzata állandó.

A fenti példában az egységnyi idő alatt felásott kert területe (vagyis az egyes emberek teljesítménye) fordítottan arányos az egész kert felásásához szükséges idővel.

Ha most a kert felásásához szükséges időt kifejezzük az egy óra alatt felásható terület függvényében, akkor a következő összefüggéshez jutunk:

$$\text{a kert felásásához szükséges idő} = \frac{72\ (\text{m}^2)}{\text{az egy óra alatt felásható terület}}.$$

A táblázatot és további lehetséges értékpárokat ábrázolva a 8.2. ábrán látható grafikont kapjuk. A pontok az első síknegyedben helyezkednek el, egy görbére illeszkednek, egy ún. **hiperbolá**ra.

8.3. ábra Hogyan lesz nagyobb?

Nézzünk néhány további példát fordítottan arányos mennyiségekre! A természetben, a valóságban előforduló fordított arányosságoknál gyakran csak pozitív értékpárokkal dolgozunk (mint például a fenti példában is).

- Adott területű téglalap két szomszédos oldalának hossza fordítottan arányos – hiszen a szorzatuk állandó.
- Adott munka elvégzéséhez szükséges idő és a munkavégző (akár ember, akár gép) teljesítménye fordítottan arányos. (A bevezető példa is erről szól, de a fizikában is ezt fejezi ki a $P \cdot t = W$ képlet, ahol P a teljesítmény, t az idő, W a munka.)
- Két test kezdetben áll, majd (pl. egy rugó hatására) szétlökődik. Ekkor a szétlökődött testek tömegének és sebességének szorzata (vagyis a lendületük) ugyanannyi (ha külső hatásoktól eltekintünk), tehát a tömeg és a sebesség fordítottan arányos egymással. (Lendületmegmaradás törvénye.)

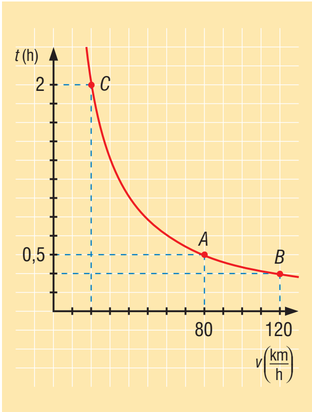
8.4. ábra Jó ez az egyensúly!

- Két ember akkor tud libikókázni, ha nagyjából egyensúlyban vannak a libikókán. Ehhez annak kell közelebb ülnie a forgástengelyhez, aki nehezebb. Súlytalan libikókát feltételezve: az erő×erőkar szorzat (az ún. forgatónyomaték) a két libikókázó esetében a libikóka tengelyére nézve ugyanakkora. Vagyis a súly és a forgástengelytől mért távolság fordítottan arányos egymással.
- Newton II. törvénye szerint: $F = m \cdot a$, ahol F az m tömegű testre ható erő, amely ezen a testen a gyorsulást idéz elő. Itt változatlan erőhatás mellett a tömeg és a gyorsulás fordítottan arányosak. Ha tehát két test kölcsönhatásában más hatások elhanyagolhatóak, akkor egymásra ugyanazzal az F erővel hatnak, így ez a kölcsönhatás a könnyebb testen nagyobb gyorsulást hoz létre. $(m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2)$
- Egyenes vonalú egyenletes mozgásnál a megtett út a test sebességének és a mozgás idejének szorzatával egyenlő: $s = v \cdot t$. Így ugyanazt az utat a kétszer akkora sebességű test feleannyi idő alatt teszi meg. Adott hosszúságú út esetében az út megtételéhez szükséges idő és a sebesség fordítottan arányosak egymással.
- Ha az állandó tömegű gázok állapotváltozását figyeljük állandó hőmérsékleten (izoterm állapotváltozás), akkor azt kapjuk, hogy a kisebb térfogatú gáz nyomása nagyobb. A térfogatuk és a nyomásuk szorzata állandó, vagyis ezek fordítottan arányos mennyiségek. ($p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ Boyle – Mariotte - törvény.)

Természetesen számtalan további fordítottan arányos mennyiségpárt tudnánk még sorolni.

2. példa A 8.5. ábrán látható grafikonon azt ábrázoltuk, hogy ha Kaposvárról elindulunk valamilyen irányban, és egy adott távolságot állandó nagyságú sebességgel megteszünk, akkor ahhoz mennyi időre van szükségünk.
Állapítsuk meg a grafikonról, hogy
- mekkora volt az *A* jármű sebessége, és mennyi idő alatt tette meg ezzel a sebességgel az utat;
- mekkora sebességgel ment a *B* jármű, és számoljuk ki, mennyi időbe telt neki ugyanez az út;
- mennyi időbe telt a *C* járműnek ez az út, és számoljuk ki, hogy akkor milyen sebességgel mehetett;
- mekkora távolságra mentek ezek a járművek!

Keressünk még összetartozó értékeket és a sebességek alapján tippeljünk, milyen jármű lehetett, amit éppen vizsgálunk! Keressünk a térképen olyan településeket, ahová mehettek ezek a járművek!

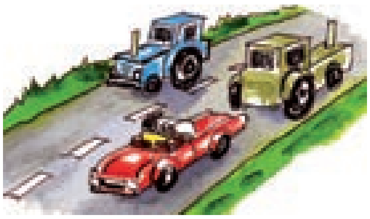


8.5. ábra Ugyanakkora utat menynyi idő alatt tesznek meg a különböző sebességű járművek?

Megoldás:
Az *A* jármű sebessége (az *A* pont első koordinátája) $80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, az út megtételéhez szükséges ideje (az *A* pont második koordinátája) 0,5 óra. A *B* jármű sebessége $120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Az út megtételéhez szükséges időt t_B-vel jelölve tudjuk, hogy $80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot 0{,}5\,\mathrm{h} = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot t_B$, ahonnan $t_B = \frac{1}{3}\,\mathrm{h} =$ 20 perc.
Vagyis a *B* jármű 20 perc alatt teszi meg az utat (ha épségben odaér, és a jogosítványát sem veszik el gyorshajtásért…). Másként úgy is kiszámolhattuk volna, hogy a *B* jármű sebessége másfélszerese, azaz 3/2-szerese az *A* jármű sebességének, így a fordított arányosság miatt az út megtételéhez szükséges ideje az *A* útidejének a 2/3-a. A 0,5 h = 30 perc 2/3-a valóban 20 perc.

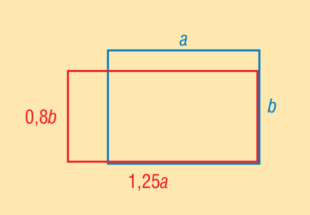
A grafikonról leolvasható, hogy a *C* jármű 2 óra alatt tette meg az utat, vagyis 4-szer annyi idő alatt, mint az *A* jármű. Ebből kiszámolható, hogy a sebessége 1/4-e az *A* jármű sebességének: $20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Az *A* jármű lehetett például egy távolsági autóbusz, a *B* jármű egy szabálytalanul közlekedő gépkocsi, a *C* jármű pedig egy kerékpár vagy traktor. A távolság, amelyet ezek a járművek megtettek: $s = v\cdot t = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot 0{,}5\,\mathrm{h} = 40\,\mathrm{km}$.

A térképen való keresgélést az olvasóra bízzuk. (Mivel Kaposvár nagy város, ezért a térkép szerinti távolság ± 2 km-rel eltérhet a feladatban számolt 40 km-től.)



8.6. ábra Odaérek?

3. példa Egy téglalap két párhuzamos oldalát 25%-kal növeljük. Hány %-kal kell megváltoztatnunk a másik két oldal hosszát, ha azt szeretnénk, hogy a területe ne változzon?



8.7. ábra Átváltozás

Megoldás:
Jelöljük az eredeti téglalap szomszédos oldalait a-val és b-vel! Ekkor a területe: $T = a \cdot b$, s ez nem változik meg az oldalhosszak változtatása után sem. Nyilvánvaló, hogy mivel az egyik oldalt növeltük, a másikat majd csökkentenünk kell. Az egyik oldal legyen mondjuk az a, ha ezt 25%-kal növeljük, akkor az az eredeti a oldalnak a 125%-a lesz: $1,25 \cdot a$. A másik oldal p%-os csökkentése így írható fel: a másik oldal$\times\left(1-\frac{p}{100}\right)$. Ezek szorzata tehát ugyanaz a mennyiség, mint amit az előbb kaptunk: $a \cdot b = 1,25 \cdot a \cdot \left(1-\frac{p}{100}\right) \cdot b$. Mivel itt sem az a, sem a b nem lehet 0, így az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk velük: $1 = 1,25 \cdot \left(1-\frac{p}{100}\right)$. Ez az egyenlet már csak a p-t tartalmazza ismeretlenként. Oldjuk meg!

$$1 : 1,25 = 1 - \frac{p}{100}$$

$$0,8 = 1 - \frac{p}{100} \quad / -1$$

$$-0,2 = -\frac{p}{100} \quad / \cdot (-100)$$

$$20 = p$$

A másik oldalt tehát 20 %-kal kell csökkentenünk (8.7. ábra).

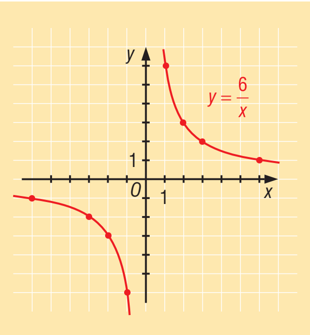
Általánosan, ha a függvényérték fordítottan arányos a változóval (x-szel), akkor azt így fejezhetjük ki: $f(x) = \frac{c}{x}$, ahol a c valamilyen állandó mennyiség. Ilyenkor természetesen az x nem lehet 0.

4. példa Ábrázoljuk és jellemzzük a nullától különböző valós számok halmazán az $f(x) = \frac{6}{x}$ függvényt!

Megoldás:
A függvényt a negatív számokon is értelmezzük. Készítsünk értéktáblázatot!

x	6	3	2	1	4	12	9	$\frac{1}{2}$	–6	–3	–2	–1	–12	$-\frac{1}{2}$
$\frac{6}{x}$	1	2	3	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	12	–1	–2	–3	–6	$-\frac{1}{2}$	–12

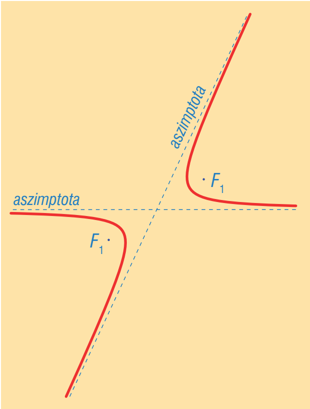
Ábrázoljuk az összetartozó értékpárokat koordináta-rendszerben! (8.8. ábra)



8.8. ábra 4. példa $f(x)$

A 0 kivételével minden valós számra értelmezzük a függvényt, értelmezési tartománya a 0-tól különböző valós számok halmaza. Korábban már láttuk, hogy milyen a függvény grafikonja, ha a pozitív számok halmazán értelmezzük. Most a negatív számok halmazán is értelmezve van, és a negatív számoknál nyilván negatív lesz a függvényérték is. Így a függvény grafikonjának pontjai az első és a harmadik síknegyedbeli egy-egy görbére illeszkednek. A két görbének nincs közös pontja. A függvény képe egy **hiperbola,** melynek két ága van. A két ág tetszőlegesen megközelíti az *x* és az *y* tengelyt, de nem érik el azokat. Azt a két egyenest, amelyekhez a hiperbolaágak ilyen módon hozzásimulnak, a hiperbola **aszimptotáinak** nevezzük.

A negatív számok halmazán a függvény szigorúan monoton csökkenő, és a pozitív számok halmazán is szigorúan monoton csökkenő. (De mégsem mondható, hogy a teljes értelmezési tartományán csökkenő, hiszen pl.: –2-nél –3-at vesz föl, míg a nagyobb +1-nél a nagyobb +6-ot.) Zérushelye nincs: sehol nem veszi föl a 0-t. Minden más valós szám előáll függvényértékként, csak a 0 nem, vagyis értékkészlete a 0-tól különböző valós számok halmaza. Szélsőértékei nincsenek.



8.9. ábra Hiperbola aszimptotákkal

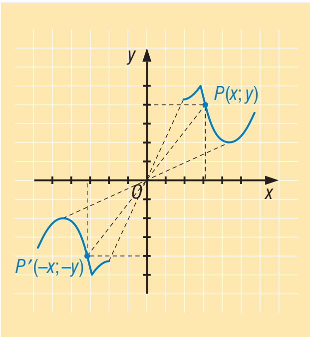
Vegyük észre, hogy minden szám ellentettjéhez ellentett függvényérték tartozik! Pl. $f(3)=2$ és $f(-3)=-2$, vagyis $f(-3)=-f(3)$. Általánosan: $f(-x)=-f(x)$.

Definíció Egy függvényt **páratlannak** nevezünk, ha rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

- az értelmezési tartománya minden elemével együtt annak ellentettje is eleme az értelmezési tartománynak; (ha $x \in D_f$, akkor $-x \in D_f$);
- minden értelmezési tartománybeli elem ellentettjéhez az eredeti elemhez rendelt függvényérték ellentettjét rendeli; (minden $x \in D_f$ esetén $f(-x)=-f(x)$).

Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{c}{x}$ (*c* adott valós szám) függvény tehát páratlan.

A definícióból rögtön következik, hogy ha egy $P(x;\ y)$ pont rajta van egy páratlan függvény képén, akkor annak origóra vett tükörképe, a $P'(-x;-y)$ pont is rajta van a függvény grafikonján. Páratlan függvény képe tehát középpontosan szimmetrikus az origóra.



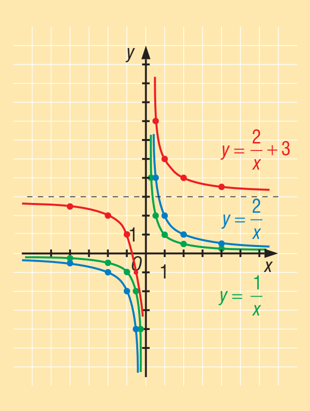
8.10. ábra Páratlan függvény

5. példa Ábrázoljuk az alábbi függvényeket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán! Állapítsuk meg minden esetben az értelmezési tartományt és az értékkészletet!

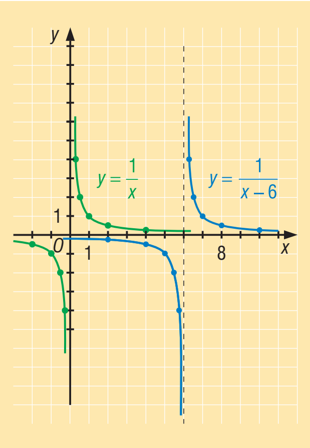
a) $a(x)=\dfrac{2}{x}+3$; b) $b(x)=\dfrac{1}{x-6}$; c) $c(x)=\dfrac{4}{x-6}$;

d) $d(x)=\dfrac{4}{x-6}-2$; e) $e(x)=-\dfrac{6}{x}+2$.

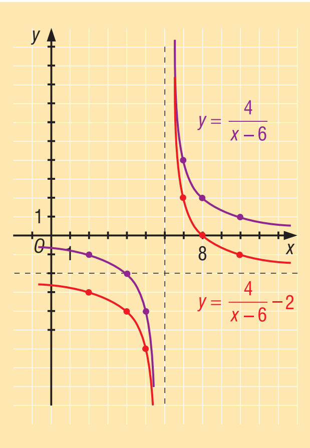
MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 141 2012.06.25. 14:22:35



8.11. ábra 5. a) példa



8.12. ábra 5. b) példa



8.13. ábra 5. c) és d) példa

Megoldás:
Minden esetben készíthetünk értéktáblázatot! De kiindulhatunk az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény képéből is.

Az a) esetben az $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ alapfüggvény függvényértékeinek 2-szeresét kell vennünk, azaz nyújtanunk kell a függvény grafikonját az *y* tengely mentén a 2-szeresére. Ezután minden függvényértékhez hozzá kell adnunk 3-at, azaz el kell tolnunk a kapott grafikont az *y* tengely mentén pozitív irányban 3 egységgel. (8.11. ábra) Csak $x = 0$ esetén nincs értelmezve. Vagyis $D_a = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ha követjük az alapfüggvényen végrehajtott változtatásokat, könnyen láthatjuk, hogy egyedül a 3 értéket nem veszi föl a függvény. Vagyis $R_a = \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

b) Mivel nevező nem lehet 0, ezért $x - 6 \neq 0$, így $x \neq 6$. Vagyis $D_b = \mathbb{R}\setminus\{6\}$. Rá kell jönnünk, hogy mielőtt a számok reciprokát vennénk, ki kell vonnunk a változók értékéből 6-ot. Ami azt jelenti, hogy ez a függvény pl. az $\frac{1}{2}$ értéket nem a 2-nél veszi föl, hanem a 8-nál, hiszen $\frac{1}{8-6} = \frac{1}{2}$. Ugyanígy minden függvényértéket a 6-tal nagyobb számnál (változónál) vesz föl, mint az alapfüggvény. Tehát el kell tolnunk a függvény képét pozitív irányban 6 egységgel az *x* tengely mentén. (Az *y* tengellyel párhuzamos aszimptota is eltolódik a hiperbolával együtt.) (8.12. ábra) Ez az eredeti értékkészleten nyilván nem változtat. Vagyis $R_b = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

c) A *b* függvény értékeinek 4-szereseként kapjuk a *c* függvény értékeit. Vagyis az *y* tengely menti 4-szeres nyújtást kell végrehajtanunk az előző függvény képén. (8.13. ábra)

Hol értelmezhető a függvény? Mindenhol, ahol a nevező nem 0, azaz $x \neq 6$. Vagyis $D_c = \mathbb{R}\setminus\{6\}$.

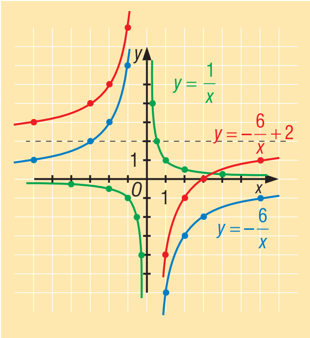
Már abból is kiderül, ahogy az előző függvényből származtattuk ezt a függvényt, hogy ennél a függvénynél is a 0 az egyetlen olyan érték, amelyet nem vesz föl. Vagyis $R_c = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d) Észrevehető, hogy csak ki kell vonnunk a *c* függvény értékeiből 2-t. A függvény képén ez egy *y* tengellyel párhuzamos eltolást eredményez. (A függvény képével együtt most már eltolódik az *x* tengellyel párhuzamos aszimptota is. A két aszimptota közül az egyik tehát a 6-nál metszi az *x* tengelyt, a másik a –2-nél metszi az *y* tengelyt.) (8.13. ábra)

Az értelmezési tartomány nem változik meg a *c* függvényhez képest, a *d* függvény sem értelmezhető, ha $x = 6$, minden más helyen viszont igen. Vagyis $D_d = \mathbb{R}\setminus\{6\}$.

Ez a függvény egyedül a –2 értéket nem veszi föl. Vagyis $R_d = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$. (8.13. ábra)

e) Az $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt először –6-tal szorozzuk, vagyis a képét a 6-szorosára nyújtjuk az *y* tengely mentén, és tükrözzük az x tengelyre. (Ekkor tehát a második és a negyedik síknegyedbe esnek a hiperbola-ágak.) Másodszor az így kapott függvényértékek mindegyikéhez hozzá kell adnunk 2-t, vagyis az utoljára kapott függvény képét el kell tolnunk „fölfelé” 2 egységgel. (8.14. ábra)



8.14. ábra 5. e) példa

Értelmezési tartomány:

a 0-tól különböző valós számok halmaza. $D_e = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Értékkészlete:

a 2-től különböző valós számok halmaza. $R_e = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Vegyük észre, hogy ha meg tudjuk állapítani az értelmezési tartomány egyetlen kizárt értékét és az értékkészletből hiányzó egyetlen valós számot, akkor már ismerjük az ábrázolandó hiperbolánk két aszimptotáját, ami nagyban elősegíti az ábrázolást!

6. példa Ábrázoljuk és jellemezzük a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett, $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ hozzárendelési szabályú függvényt!

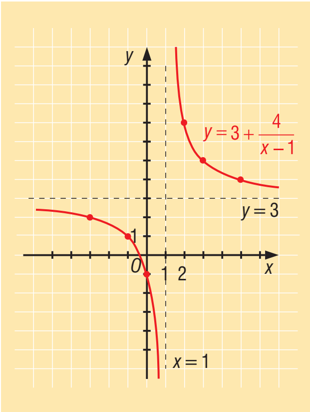
Megoldás:

Azt rögtön megállapíthatjuk, hogy a függvény egyedül az $x = 1$ helyen nem értelmeztető, hiszen ezen a helyen 0-vá válna a nevező. Vagyis $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Abban hasonlít a hozzárendelési szabály az előző példa függvényeihez, hogy itt szerepel a nevezőben változó. A gondot csak az okozza, hogy a számlálóban is szerepel, nem úgy, mint az előző példa függvényeinél.

Most ismét két választási lehetőségünk van: vagy elkezdjük elég sűrűn kiszámolgatni az egyes változókhoz tartozó függvényértékeket (ezt most az olvasóra bízzuk), vagy megpróbáljuk ezt a hozzárendelési szabályt visszavezetni az előző feladat függvényeire. Ha elég sokáig nézzük ezt a törtet, azt látjuk, hogy a számláló „majdnem” 3-szorosa a nevezőnek. Pontosabban a nevező 3-szorosa $3 \cdot (x-1) = 3x - 3$. Ez változóban már nem tér el a $3x+1$ számlálótól, csak egy számban. Használjuk ki ezt a tört átalakítására!

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3x-3+4}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = \frac{3(x-1)}{x-1} + \frac{4}{x-1} = 3 + \frac{4}{x-1}$$

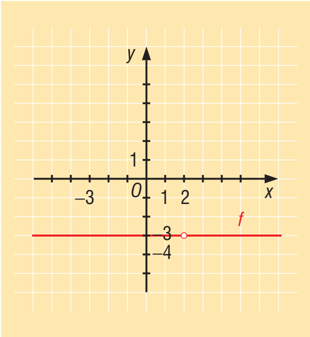
Ebben az alakjában már tökéletesen olyan, mint az előző példa függvényei, így most már tudjuk ábrázolni. Tudjuk, hogy képe hiperbola, amelynek aszimptotái az $x = 1$ egyenletű egyenes (1-nél nincs értelmezve) és az $y = 3$ egyenletű egyenes (a 3 nem eleme az értékkészletnek). (8.15. ábra)



8.15. ábra 6. példa $f(x)$

Értelmezési tartománya az 1-től különböző valós számok halmaza. Értékkészlete a 3-tól különböző valós számok halmaza.

A $]-\infty, 1[$ intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, az $]1, \infty[$ intervallumon úgyszintén. Zérushelye az a szám, ahol a tört



8.16. ábra „Kakukktojás”

értéke 0, vagyis ahol a számláló 0, és a nevező nem az. $3x+1=0$, ha $x=-\frac{1}{3}$. A függvény zérushelye a $-\frac{1}{3}$. Minimuma és maximuma nincs; se nem páros, se nem páratlan.

7. példa Alakítsuk át az előző módszerrel az alábbi törteket! Melyik a „kakukktojás”?

a) $\frac{2x+3}{x+2}$; b) $\frac{-4x+2}{x+1}$; c) $\frac{-3x+6}{x-2}$; d) $\frac{3x-5}{2x-1}$

Megoldás:

a) A számláló majdnem 2-szerese a nevezőnek:

$$\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2x+4-1}{x+2}=\frac{2(x+2)-1}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}-\frac{1}{x+2}=2-\frac{1}{x+2}.$$

b) $$\frac{-4x+2}{x+1}=\frac{-4x-4+6}{x+1}=\frac{-4(x+1)+6}{x+1}=\frac{-4(x+1)}{x+1}+\frac{6}{x+1}=-4+\frac{6}{x+1}$$

c) $\frac{-3x+6}{x-2}=\frac{-3(x-2)}{x-2}=-3$, ami azt jelenti, hogy az $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ értelmezési tartományú $x\mapsto\frac{-3x+6}{x-2}$ hozzárendelési szabályú függvény képe egy $x=2$-nél „kilyukasztott” egyenes, amely egy pontban különbözik az $x\mapsto -3$ konstans függvény képétől.

d) Az eddigiekben mindig azt figyeltük, hányszor lenne meg a számlálóban a nevező, ha csak a változók együtthatóit vesszük figyelembe. Kövessük továbbra is ezt az elvet!

$$\frac{3x-5}{2x-1}=\frac{\frac{3}{2}\cdot 2x-\frac{3}{2}\cdot 1-\frac{7}{2}}{2x-1}=\frac{\frac{3}{2}\cdot(2x-1)-\frac{7}{2}}{2x-1}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{7}{2}}{2x-1}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{7}{4}}{x-\frac{1}{2}}.$$

Az első lépésben a nevező $\frac{3}{2}$-szeresét írtuk először a számlálóba, majd kiegészítettük úgy, hogy a konstans tagok összege –5 legyen.
(Azt is megtehettük volna, hogy az első lépésben egyszerűsítjük a törtet a nevező változójának együtthatójával, s ezzel visszavezetjük olyan kifejezéssé, mint bármelyik korábbi: $\frac{\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}$.)

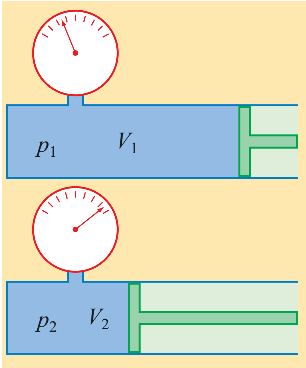
A „kakukktojás” a c) tört. Annak a függvénynek a képe nem hiperbola, amelynek a hozzárendelési szabálya $x\mapsto\frac{-3x+6}{x-2}$.

Az ebben a leckében vizsgált függvények mindegyike (kivéve az előző példa megoldásának c) pontjában tárgyalt függvényt) ún. **lineáris törtfüggvény**.

8.17. ábra Pajtikám, te tudtad, hogy a kakukk törtet tojik?

Definíció Az $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ hozzárendelési szabályú függvényt **lineáris törtfüggvénynek** nevezzük (ahol *a*, *b*, *c*, *d* valós számok és $c \neq 0$), ha ekvivalens algebrai átalakításokkal nem hozható konstans alakra. (Értelmezési tartománya a valós számok halmazának legbővebb részhalmaza, amelyen a függvény értelmezhető, vagyis $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.)

Az elnevezés abból ered, hogy lineáris függvények hányadosáról van szó.



8.18. ábra Hogyan változik a nyomás? (3. feladat)

Oldjuk meg!

1. Egy 20 és egy 30 kg-os gyermek libikókázik egy elhanyagolható tömegű libikókán. A 20 kg-os a libikóka végén ül, ami a forgástengelytől másfél méterre van. Hova üljön a másik gyerek, hogy egyensúlyban legyenek? (lásd 4. gyakorlati példa)

2. A piacon 6000 Ft-ért szeretnénk almát venni. A legdrágább almából csak 15 kilót tudnánk venni. A legolcsóbb almát negyedáron is megvásárolhatjuk.
Mennyi a legdrágább alma kilónkénti ára? Mennyit vehetünk a legolcsóbb almából?
Mondjunk még lehetséges összetartozó értékpárokat! Milyen viszony áll fenn az alma kilónkénti ára és az általunk megvásárolható mennyiség között?

3. A gázok nagymértékben „összenyomhatók". Hogyan változik meg a nyomás abban a tartályban, amelyet eredeti térfogatának 20-ad részére nyomunk össze? (lásd 7. gyakorlati példa) (8.18. ábra)

4. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R};\ x\mapsto\dfrac{8}{x}$; b) $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R};\ x\mapsto\dfrac{6}{x}+2$; c) $h:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R};\ x\mapsto\dfrac{2}{x+3}$;

d) $i:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R};\ x\mapsto -1+\dfrac{4}{x-2}$; e) $j:\mathbb{R}\setminus\{4\}\to\mathbb{R};\ x\mapsto 3-\dfrac{12}{x-4}$.

A felsorolt függvények között van-e páros, illetve van-e páratlan függvény?

5. Állapítsuk meg az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát és értékkészletét:

a) $x\mapsto\dfrac{5}{x+6}$; b) $x\mapsto\dfrac{6}{x-1}+2$; c) $x\mapsto 5-\dfrac{1}{x}$; d) $x\mapsto -2+\dfrac{-4}{x+5}$; e) $x\mapsto\dfrac{2x+3}{x-1}$!

6. Ábrázoljuk az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott, a lehető legbővebb értelmezési tartományon értelmezett függvényeket! Állapítsuk meg a lehető legbővebb értelmezési tartományukat, értékkészletüket, zérushelyeiket és monotonitásukat!

a) $x\mapsto\dfrac{x-4}{x-3}$; b) $x\mapsto\dfrac{3x+5}{x+1}$; c) $x\mapsto\dfrac{1-2x}{x+4}$; d) $x\mapsto\dfrac{4x-6}{2-x}$; e) $x\mapsto\dfrac{5x-2}{3x+1}$.

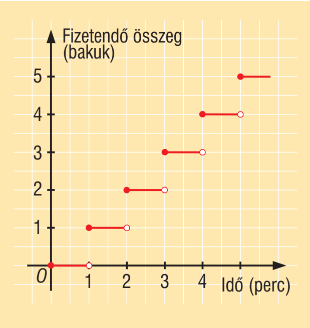
9. Egészrész-, törtrész- és előjelfüggvény (Kiegészítő anyag)

9.1. ábra Habakukfalviak

1. példa Habakukfalván egy telefontársaság működik, és a következő díjszabással dolgoznak. Perc alapú számlázást végeznek, de a megkezdett percbe már beleszámolják a perc „nulladik” másodpercét is. Cserébe az első megkezdett perc ingyenes, majd minden további megkezdett percért 1 bakukot kell fizetni. (Kerek 1 perc beszélgetésért kell először 1 bakukot fizetni.)
a) Mennyit fizetünk egy 3 perc 56 másodperces; egy 5 perces, illetve egy 6 perc 13 másodperces beszélgetésért?
b) Ábrázoljuk, hogy egy beszélgetésnek milyen költsége van az idő függvényében!

Megoldás:
a) Mivel minden megkezdett perc után fizetünk 1 bakukot az első kivételével, ezért a 3 perc 56 másodperces beszélgetésért 3 bakukot fizetünk, az 5 percesért 5 bakukot, a 6 perc 13 másodpercesért pedig 6 bakukot. Ha táblázatba foglalunk még néhány adatot, gyorsan látszik, hogyan függ az időtől a fizetendő összeg. (A bakuk rövidítése: bk.)

Idő	23 mp	58 mp	1 p 2 mp	1 p 47 mp	2 p 33 mp	2 p 45 mp	2 p 50 mp	3 p 7 mp	4 p 1 mp
Fizetendő összeg	0 bk	0 bk	1 bk	1 bk	2 bk	2 bk	2 bk	3 bk	4 bk



9.2. ábra Díjszabás

A most kapott grafikon nem hasonlít egyik korábban tanult grafikonhoz sem. Különálló, egyenlő hosszú szakaszokból áll, melyek mindegyike párhuzamos az időtengellyel. Tehát a függvény csupa „kis” konstans függvényből tevődik össze. (9.2. ábra)

Ha most ezt a függvényt kiterjesztjük a negatív számokra is oly módon, hogy a lépcsőzetességét változatlan formában őrizze meg, amikor áttérünk a pozitív oldalról a negatív oldalra, akkor az ún. egészrészfüggvényhez jutunk.

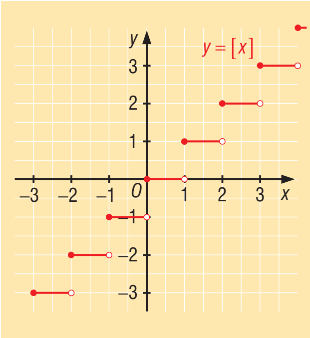
Próbáljuk meg ennek a függvénynek a hozzárendelési szabályát szavakban megfogalmazni!

Definíció Egy tetszőleges valós szám **egész részén** a nála nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat értjük. Jele: $[x]$.

Definíció Azt a függvényt, amely minden valós számhoz hozzárendeli az egész részét, **egészrész-függvény**nek nevezzük.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto[x]$

Vegyük észre, hogy a függvény minden egész számhoz saját magát rendeli hozzá; a „lépcső fölső széle” illeszkedik az $y = x$ egyenletű egyenesre, az „alsó széle” pedig az $y = x - 1$ egyenletű egyenesre! (9.3. ábra)

Vigyázzunk! Bár a „lépcső” szóhasználat kézenfekvő, a függvény grafikonja nyilván nem tartalmaz *y* tengellyel párhuzamos szakaszokat!

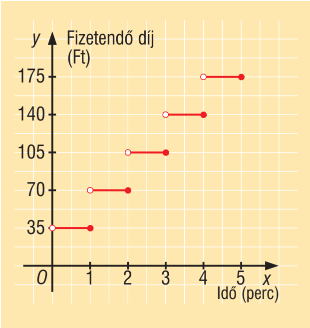


9.3. ábra Egészrész-függvény

2. példa Jellemezzük az egészrész-függvényt!

Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$ (értelmezési tartomány a valós számok halmaza), $R_f = \mathbb{Z}$ (értékkészlete az egész számok halmaza), monoton növekvő, a $[0;\ 1[$ intervallum minden eleme zérushelye a függvénynek, szélsőértékei nincsenek, nem korlátos, nem páros, nem páratlan. Azt mondjuk, a függvénynek minden egész helyen szakadása van.

3. példa Egy valódi telefontársaság egyik fajta tarifája 2008-ban a következő volt: perc alapú számlázást végeznek, minden megkezdett percért 35 Ft-ot kell fizetni. (A kerek 1 perc beszélgetés még csak 35 Ft-ba kerül.) Adjuk meg annak a függvénynek a grafikonját, valamint értelmezési tartományát és hozzárendelési szabályát, amely ezt a díjszabást állítja elő.



9.4. ábra Tarifa perc alapú számlázás esetén

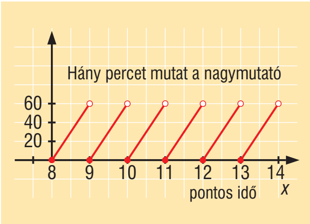
Megoldás:
Az idő függvényében kell a fizetendő pénz mennyiségét meghatároznunk. Nyilván csak a nemnegatív számok halmazán értelmezhető a függvény. És bár a telefontársaságok másodpercekben szokták mérni az időt a perc alapú tarifákhoz is, ettől most eltekinthetünk, és megadhatjuk értelmezési tartománynak a nemnegatív valós számok halmazát. Talán könnyebb a függvény grafikonját elkészítenünk először. (9.4. ábra)

Az első példától és magától az egészrész-függvénytől eltérően itt az *x* tengellyel párhuzamos darabkáknak nem a „bal”, hanem a „jobb széle” tartozik hozzá a megfelelő szakaszhoz. Most egyszerűen elintézhetjük egy esetszétválasztással:

$$f(x) = \begin{cases} 35 \cdot ([x] + 1), & \text{ha } x \text{ nem egész;} \\ 35x, & \text{ha } x \text{ egész.} \end{cases}$$

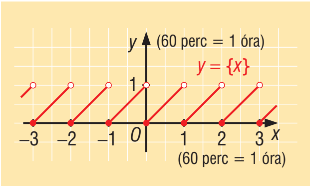
De felírhatjuk az egészrész-függvény transzformációjaként is: $f(x) = -35 \cdot [-x]$. Itt érdemes arra figyelni, hogy az intervallumok nyílt és zárt vége csak egy *y* tengellyel párhuzamos tengelyre tükrözéskor cserélődhetnek meg, ugyanakkor nem válhat csökkenővé a függvény – sajnos –, így egy *x* tengellyel párhuzamos tengelyre való tükrözésre is szükség van. Ezeket biztosítja a két negatív előjel.

4. példa Már kicsi korunkban megtanuljuk az analóg kijelzésű órákat leolvasni. Ábrázoljuk most derékszögű koordináta-rendszerben, hogy reggel 8 és délután 14 óra között mikor hány percet mutat a nagymutató!



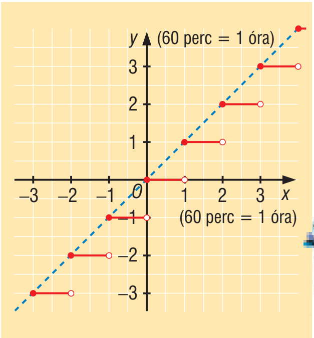
9.5. ábra Mennyi az idő?

Megoldás:
8-tól egészen 9-ig nyilván éppen a nagymutató mozgása mutatja meg nekünk az eltelt időt, így ott minden pillanatban ugyanannyi a függvényérték, mint a változó. Pontban 9 órakor viszont 8 óra 60 percet már nem szoktunk mondani, ekkor már a rádió is 9 óra 0 percet mond be. Ekkor tehát kezdődik elölről az időmérés. Majd ugyanígy minden egész óráig egyenletesen nő a nagymutató által mutatott idő, s ismét nullázódik egész órakor. (9.5. ábra)



9.6. ábra Törtrész-függvény

Arra hivatott ugyan a nagymutató, hogy a percek múlásáról adjon tájékoztatást, de ugyanezt órákra is át tudnánk számolni. Így pl. 45 perc órákban kifejezve: ¾ óra, vagy ugyanez tizedes törtben: 0,75 óra. Ha ennek megfelelően módosítjuk a „függőleges" tengelyen az egységet, valamint nemcsak 8 és 14 óra között ábrázoljuk a függvényt, hanem valamilyen képzeletbeli 0 órát kiszemelve pozitív és negatív irányba haladva a végtelenségig ugyanezt az ismétlődő formát megtartjuk, akkor az ún. **törtrész-függvény**hez jutunk (9.6. ábra). (Az idő mindkét irányban végtelen?)



9.7. ábra Egész rész és tört rész kapcsolata

A most kapott grafikont hasonlítsuk össze a 9.7. ábrával, amelyen az egészrész-függvényt és az $x \mapsto x$ hozzárendelési szabályú függvényt ábrázoltuk egy koordináta-rendszerben!

Felfedezhető, hogy az „egészrész-lépcső" fölötti „ferde" szakaszok ugyanazok, mint a törtrész-függvény „fűrészfogai". A definíciót ez alapján szoktuk megadni.

Definíció Tetszőleges valós szám **tört részé**nek a számnak és az egész részének különbségét nevezzük. Jele: $\{x\}$. Tehát definíció szerint: $\{x\} = x - [x]$.

Definíció Ha minden valós számhoz hozzárendeljük a tört részét, akkor a **törtrész-függvény**hez jutunk. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \{x\}$

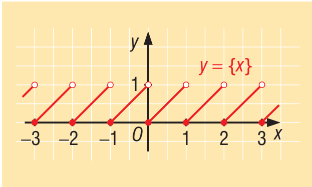
Habár már ismerjük a függvény képét, mégis érdemes egy táblázatot is készítenünk, hogy jobban szemügyre vehessük az összetartozó értékeket.

x	2,3	2,75	3,99	4	1,7	0,7	–0,3	–1,3	–3,8
$\{x\}$	0,3	0,75	0,99	0	0,7	0,7	0,7	0,7	0,2

5. példa Jellemezzük a törtrész-függvényt!

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [0;\ 1[$, zérushelye minden egész szám. Szélsőértékek közül csak a minimummal rendelkezik: minimuma 0, amit minden egész helyen fölvesz. Maximuma nincs, hiszen az 1-et már nem veszi föl, de az 1-nél kisebb, nemnegatív számok mindegyikét fölveszi. Minden két szomszédos egész szám között szigorúan monoton növekvő. Ezt leírhatjuk így is: ha $x \in [n;\ n+1[$, ahol n egész szám, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő. (9.8. ábra)



9.8. ábra Törtrész-függvény

Már a függvény képéből is látszik, hogy ha rendelkezik valamilyen tulajdonsággal a függvény egy egység hosszúságú intervallumon, akkor azzal a jó tulajdonsággal „kicsit vagy sokkal arrébb” is rendelkezni fog, hiszen újra meg újra ugyanaz a szakasz ismétlődik meg. Gondoljunk vissza a nagymutatóra! Arra is szoktuk azt mondani, periodikusan ismétlődik az idő, amelyet mutat. Az ilyen függvényekre is azt mondjuk: **periodikus**.

(A periodikusság fogalmával, pontos definíciójával magasabb évfolyamokon még találkozunk.)

9.9. ábra Ez a rész eltört

A számítógépek működése azon múlik, van-e feszültség egy-egy vezető két vége között vagy nincs, vagyis csak két állapotot különböztetünk meg. Ehhez hasonlóan a valós számok világában is fontos szerepet játszik a számok előjele. Sokszor semmi egyébre nem vagyunk kíváncsiak, csak éppen a számok előjelére. Ezért érdemes értelmezni az előjelfüggvényt.

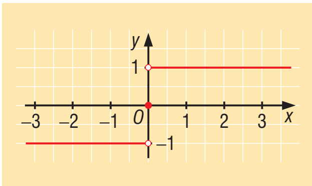
Definíció Rendeljünk hozzá minden pozitív számhoz +1-et, minden negatív számhoz −1-et, az előjel nélküli számhoz (a 0-hoz) pedig 0-t! Ezt a függvényt **előjelfüggvény**nek vagy **szignumfüggvény**nek nevezzük. Jele $\operatorname{signum} x$ vagy $\operatorname{sgn} x$.

Röviden: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$

6. példa Ábrázoljuk és jellemezzük az előjelfüggvényt!

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{-1;\ 0;\ 1\}$, zérushelye 0-nál van. A negatív számok halmazán is konstans, és a pozitív számok halmazán is konstans a függvény. Ezek a konstansok egyben a szélsőértékei is: maximuma 1, minimuma –1. (9.10. ábra)



9.10. ábra Szignumfüggvény

Páratlan függvény, hiszen minden x valós szám esetén teljesül: $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn} x$.

7. példa Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{3}(x+1)^2-3$ és a

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{3}(x+1)^2-3\right)$ függvényt!

Megoldás:

Alakítsunk szorzattá!

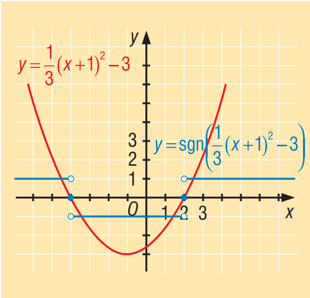
$$\frac{1}{3}(x+1)^2-3=\frac{1}{3}\left((x+1)^2-9\right)=\frac{1}{3}(x+1+3)\cdot(x+1-3)=$$

$$=\frac{1}{3}(x+4)\cdot(x-2).$$

Ábrázoljuk a parabolát!

Tudjuk, hogy két zérushelye az $x_1=-4$ és az $x_2=2$. Így a g függvény is ezeken a helyeken fog 0-t fölvenni. Mivel a másodfokú f függvény főegyütthatója pozitív, ezért minimuma van, vagyis a zérushelyeitől „kifelé” pozitív, azok között pedig negatív a függvényérték.

Ezeket az ismereteket felhasználva már tudjuk ábrázolni a g függvényt is. (9.11. ábra)



9.11. ábra 7. példa $f(x)$ és $g(x)$

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket!

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2[x]$;

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\operatorname{sgn}(5x+10)$;

c) $h:[-2{,}5;\ 4]\to\mathbb{R},\ h(x)=3\{x\}-2$;

d) $j:[-2{,}5;\ 4]\to\mathbb{R},\ j(x)=\operatorname{sgn}(3\{x\}-2)$.

2. A 3. példa ábrája alapján magyarázzuk meg, miért éri meg a telefontársaságoknak perc alapú számlázást végezni a másodperc alapú helyett!

3. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az összetartozó függvényeket!

a) $f_1:\,]-5;\ 5[\,\to\mathbb{R},\ f_1(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ és $f_2:\,]-5;\ 5[\,\to\mathbb{R},\ f_2(x)=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}\right)$;

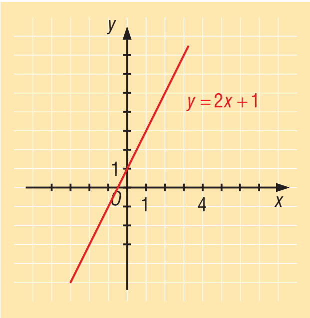
b) $g_1:\,]-6;\ -2[\,\cup\,]-2;\ 4[\,\to\mathbb{R};\ g_1(x)=\frac{2x}{x+2}$ és $g_2:\,]-3;\ 4]\to\mathbb{R};\ g_2(x)=\operatorname{sgn}\left(\frac{2x}{x+2}\right)$.

4. Egy telefontársaság kisebb cégek számára üzleti tarifákat is bevezetett. Az egyik ilyen ajánlat szerint havi 7200 Ft befizetése esetén 24 Ft a perc- és SMS-díj. A 7200 Ft természetesen ugyanilyen tarifával lebeszélhető, csak utána kezdik el számlázni a további beszélgetéseket. Egy kisvállalkozó ezt a tarifacsomagot választotta, és februárban egyáltalán nem írt SMS-t. Állapítsuk meg, hogy legalább és legfeljebb hány percig telefonálhatott összesen februárban, ha végül 7248 Ft lett a számlája?

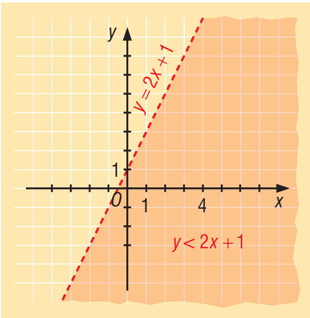
10. A koordináta-rendszer II.

1. példa Határozzuk meg azon $(x;y)$ koordinátájú pontok halmazát a koordinátasíkon, amelyek koordinátáira teljesül, hogy
a) $y = 2x+1$; b) $y < 2x+1$; c) $2x-1 < y < 2x+1$.

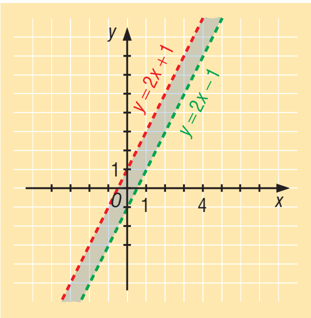
Megoldás:
a) Azon pontok, melyek koordinátái megoldásai az $y = 2x+1$ egyenletnek, egy olyan egyenes pontjai, amely az ordinátatengelyt az $y = 1$ pontban metszi, és az egyenes meredeksége 2. (10.1. ábra)
b) Az előző pontban ábrázoltuk azon pontokat, amelyek koordinátájára teljesül, hogy $y = 2x+1$. Ha az így kapott egyenes valamely pontjából kiindulva az y tengely negatív irányába indulunk, akkor az x koordináta változatlan marad, míg az y koordináta csökken. Így a keresett pontok az előző pontban felvázolt egyenes „alatt” levő pontok. Ez az ábrán a satírozott rész, úgynevezett **félsík**. Az egyenes pontjai nem tartoznak a ponthalmazhoz, mivel itt az egyenlőség nem volt megengedett. (Szaggatott a határoló egyenes.) (10.2. ábra)
c) Az előző két pont megfontolásait követve könnyen kapjuk, hogy a keresett ponthalmaz az $y = 2x+1$ egyenletű egyenes és az $y = 2x-1$ egyenes közötti síkrész. A ponthalmazt ebben az esetben is satírozással jelöltük. A két egyenes nem tartozik a keresett halmazhoz. (10.3. ábra)



10.1. ábra 1. a) példa



10.2. ábra 1. b) példa



10.3. ábra 1. c) példa

10.4. ábra Hogyan mozgassa a mester a kardját, hogy az 1. példához tartozó ábrákon látható kép rajzolódjon ki a síkon?

2. példa Adott az alábbi két ponthalmaz:

$A=\{(x;y)\,|\,x\in R, y\in R, |x|\le 3\}$,

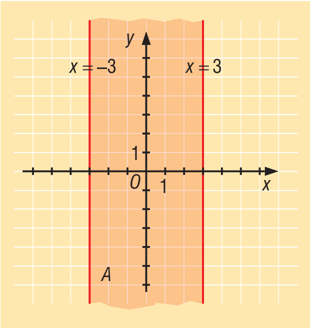
$B=\{(x;y)\,|\,x\in R, y\in R, |y|\le 3\}$.

Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a következő ponthalmazokat!

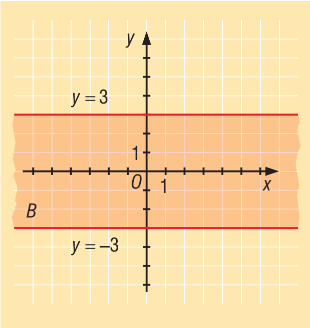
a) $A\cup B$ b) $A\cap B$ c) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

Megoldás:

Az *A* ponthalmaznak olyan *P(x;y)* pontok felelnek meg, amelyek *x* koordinátáira fennáll, hogy $-3\le x\le 3$, és *y* koordinátája tetszőleges. Az ennek megfelelő ponthalmaz az $x=3$ és az $x=-3$ egyenesek által határolt tartomány, melyet a 10.5. ábrán jelöltünk.



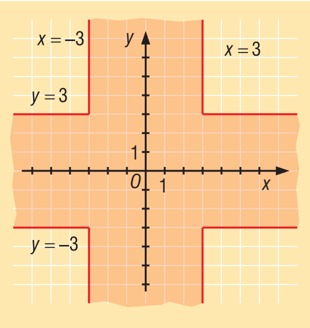
10.5. ábra *A* halmaz



10.6. ábra *B* halmaz

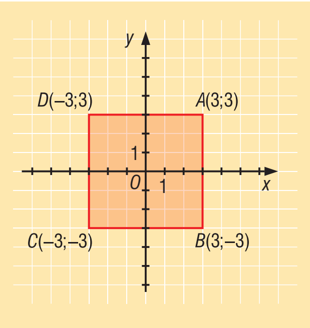
A *B* ponthalmaznak olyan *Q*(*x*;*y*) pontok felelnek meg, amelyek *y* koordinátáira fennáll, hogy $-3\le y\le 3$, és *x* koordinátája tetszőleges. Az ennek megfelelő ponthalmaz az $y=3$ és az $y=-3$ egyenesek által határolt tartomány, melyet a 10.6. ábrán jelöltünk.

a) A két halmaz uniója pedig azon pontok halmaza, melyek legalább az egyiknek elemei. Így a keresett ponthalmaz a 10.7. ábrán besatírozott rész, egy „végtelen kereszt”.



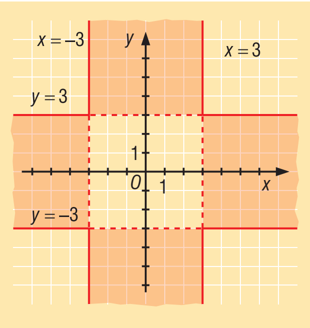
10.7. ábra $A\cup B$

b) A két halmaz metszete azon pontok halmaza, melyek mindkettőnek elemei, így az *A*(3;3), *B*(3;–3), *C*(–3;–3) és a *D*(–3;3) csúcsokkal rendelkező négyzet pontjai, melyet a 10.8. ábrán jelöltünk.



10.8. ábra $A\cap B$

c) Az $A\setminus B$ azon pontok halmaza, melyek az *A* halmaznak elemei, a *B*-nek viszont nem. Ez alapján az 10.5. ábrán besatírozott részből ki kell venni a b) részbeli négyzetet. Hasonló megfontolások alapján a $B\setminus A$ halmaz esetén a 10.6. ábrán besatírozott részből ki kell venni a b) részbeli négyzetet. Így a két halmaz uniója a 10.7. ábrán szereplő kereszt a belső négyzet nélkül. (10.9. ábra)

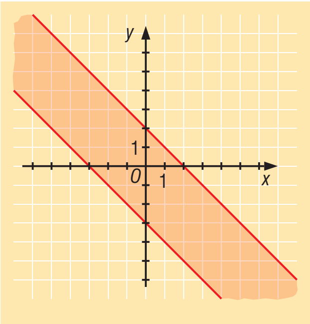


10.9. ábra $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 152 2012.06.25. 14:23:38

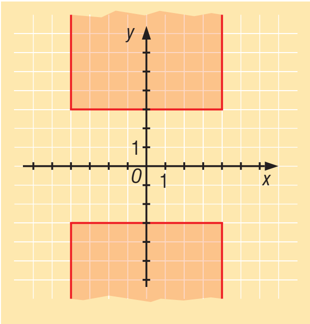
3. példa Az előző feladatok alapján adjuk meg azon pontok halmazát, melyeket a 10.10. és a 10.11. ábrákon besatíroztunk!

a)



10.10. ábra 3. példa

b)



10.11. ábra 3. példa

10.12. ábra Ha a 3. példa megoldásait is megértettük, bátran nekiláthatunk az alábbi feladatoknak

Megoldás:

a) Azon $P(x;y)$ pontok, melyek koordinátájára fennáll, hogy $-x-3 \le y \le -x+2$. Ezt megadhatjuk a halmazelméletből már jól ismert és az előző feladatban használt jelölésekkel is:

$$A = \{(x;y) | x \in R,\ \ y \in R,\ -x-3 \le y \le -x+2\}.$$

b) Azon $Q(x;y)$ pontok halmaza, melyek koordinátáira teljesül, hogy $|x| \le 4$ és $|y| \ge 3$. Halmazelméleti jelölésekkel:

$$B = \{(x;y) | x \in R,\ \ y \in R,\ \ |x| \le 4,\ \ |y| \ge 3\}.$$

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, amelyek megoldása az alábbi egyenlőségeknek! Fogalmazzuk meg szavakkal a koordináták közötti összefüggéseket!

a) $y = 3x - 2$ b) $x - 2y = -4$ c) $2x + y = -1$ d) $3x + 2y = 6$

2. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbi állítások! Írjuk le matematikai jelekkel a koordináták közötti összefüggéseket!

a) Az ordinátája hárommal nagyobb az abszcisszája ellentettjénél.
b) Az ordinátája az abszcisszájánál kettővel kisebb szám felével egyenlő.
c) Az abszcisszájának a fele hárommal nagyobb az ordinátájánál.
d) Az ordinátájának a harmada eggyel kisebb, mint az abszcisszájának a kétszerse.

3. Ábrázoljuk a koordinátasíkon azon pontok halmazát, amelyek megoldása az alábbi egyenlőtlenségeknek!

a) $y < 2x$ b) $-x+4 \le y$ c) $x-3 < y < x+2$

4. Adott az alábbi két halmaz:

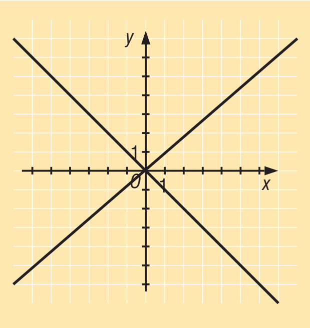
$$A = \{(x;y) | x \in R,\ y \in R,\ |x| \le 5\},\quad B = \{(x;y) | x \in R,\ y \in R,\ |y| \le 2\},$$

$$U = \{(x;y) | x \in R,\ y \in R,\ |x| \le 6,\ |y| \le 4\}.$$

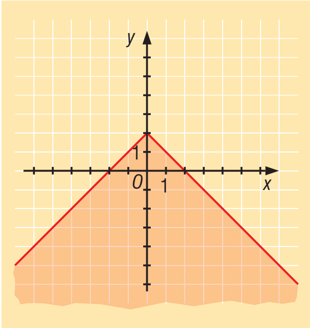
Ábrázoljuk a koordinátasíkon az alábbi halmazokat!

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$ e) $\overline{A} \cap \overline{B}$ f) $\overline{A \cup B}$

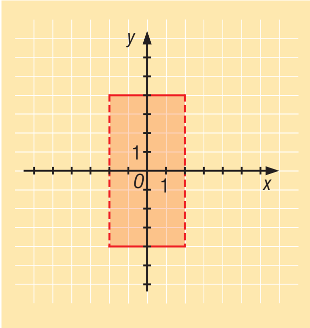
5. Adjuk meg azon pontok halmazát, amelyeket az alábbi ábrákon szemléltettünk! (10.13., 10.14. és 10.15. ábrák)



10.13. ábra 5. példa



10.14. ábra 5. példa



10.15. ábra 5. példa

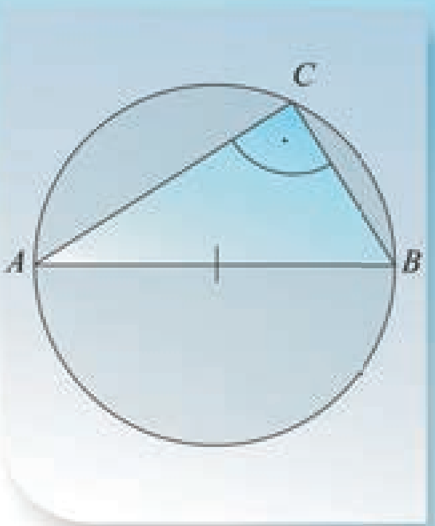
6. Tekintsük a koordinátasíkon az $A(-5; -5)$, $B(5; -5)$, $C(5;5)$ és $D(-5;5)$ csúcsok által meghatározott négyzetet! Hány darab olyan téglalap van, amelynek csúcsai ezen négyzetben levő rácspontok közül valók és oldalaegyenesei rácsegyenesek? Ezek között hány négyzet van?

7. Hány darab olyan négyzet van, amelynek csúcsai az előző feladatbeli rácspontok, és az oldalegyenesei nem feltétlenül rácsegyenesek?

8. Egy pont úgy mozog a koordináta-rendszer origójából kiindulva, hogy először megtesz egy egység utat, aztán erre merőleges irányban két egység utat, majd megint elfordul 90°-ot, és megtesz három egység utat és így tovább, míg végül visszajut az origóba a kiindulási irányra merőlegesen. Rajzoljuk meg a legrövidebb ilyen utat! Mekkora ezen út hossza?

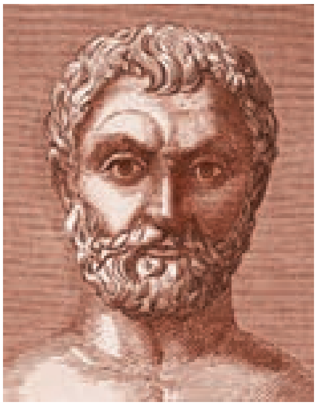
10.16. ábra Ismét vége egy nehéz napnak, amely után jólesik a pihenés

IV. fejezet
Geometria



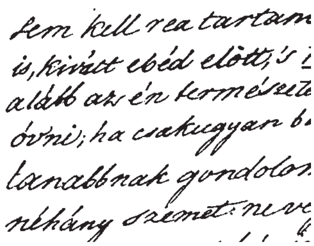
Mindent csak mértékkel!

1. Térelemek kölcsönös helyzete, szöge
Ismétlés I.



1.1. ábra Thalész (Kr. e. 624–546)

1.2. ábra Bolyai János (1802–1860) és Bolyai Farkas (1775–1856) szobra Marosvásárhelyen


Sem kell rea tartani
is, kivált ebéd előtt; s
aláll az én természete
óvni; ha csakugyan b.
tanabbnak gondolom
néhány szemét: neve

1.3. ábra Bolyai János levelének részlete apjához, Bolyai Farkashoz

Bizonyos nagyon egyszerű számfogalomra már több ezer évvel ezelőtt élt őseinknek is szükségük volt. Amikor azonban a Tigris és az Eufrátesz folyók mentén pezsgőbb gazdaság alakult ki, ugrásszerűen megnőtt a számolni tudás igénye és becsülete. Ebből az időből már nemcsak egyszerű számolások nyomaira bukkantak a történészek. Megjelent a geometria csírája. Ez kezdetben csak a mértékek kiszámítására szorítkozott: kerület-, terület-, térfogatszámítási képleteket állítottak elő, melyek nem voltak ugyan minden esetben pontosak, de az akkori szükségleteket kielégítették. Ezt követően évszázadokon keresztül beérték hasonló (vagy legalábbis hasonló jellegű) matematikai tudással. Ebben az időszakban eleve természetesnek tartották az alapvető fogalmak közötti összefüggéseket. Thalész volt (Kr. e. kb. 600 évvel) az első ismert gondolkodó, akiben fölmerült a bizonyítás igénye ezekkel az „ismert” összefüggésekkel szemben.

A következő három évszázadban Thalészhez hasonlóan egyre inkább megpróbálták az alapokból kiindulva szigorúan logikai alapon felépíteni a geometriát. Majd Kr. e. 300 évvel Eukleidész összeállította Elemek című művét, amelyben az addig felhalmozott tudás valóban teljes következetességgel szerepelt. Az első tudományos igénnyel felépített, logikailag kikezdhetetlen rendszer. Általánosítani is csak 2000 évvel később tudta egy bátor magyar matematikus, Bolyai János a mindössze 30 oldalas Appendix című művében, mely forradalmasította a matematikát. (Ezzel egy időben hasonló eredményekre jutott Lobacsevszkij orosz matematikus is.)

Összegezve: annak a gondolkodásnak, amelyet ma és immár több mint 2000 éve matematikai gondolkodásnak nevezünk, a geometria volt a táptalaja az ókori görög tudósok korában.

A középiskolás geometriaanyag ennek az eukleidészi tudásnak egy picike részét tartalmazza. S mivel még az egyetemi matematikakurzusokon is gyakran nehézséget okoz Eukleidész gondolatmenetének pontos követése, ezért mi ezzel meg sem próbálkozunk.

Ehelyett próbáljuk rendszerezni eddigi ismereteinket, és néhány esetben bizonyítással is foglalkozunk. Vagyis – a Thalész előtti matematikusok mintájára – az „ismert” alapvető összefüggésekből levezethető újabb összefüggéseket (tételeket) bizonyítunk.

Eddigi tanulmányaink alatt már megszokhattuk, hogy sok olyan természettudományos kérdéssel találkozunk, ahol kisebb-nagyobb testeket pontként kezelünk. Pl. egy űrhajót a Földhöz viszonyított mozgásának leírása során, vagy akár az egész Földet a Nap körüli keringésének vizsgálatakor, esetleg egy vödör maltert, amelyet föl kell húzni az építkezés negyedik emeletére. Természetesen megfordítva, ha azt kérdeznénk tő-

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 156 2012.06.25. 14:35:53

lünk, mi jut eszünkbe a pontról, akkor valószínűleg egyik előző példát sem említenénk. Ez természetes, hiszen hosszú évek alatt eljutottunk az elvonatkoztatásnak arra a fokára, amikor már nem akarunk feltétlenül tárgyakat megfeleltetni egy-egy geometriai fogalomnak.

Próbálhatjuk körülírni, mi is az a **pont, egyenes, sík,** de ezeket még a matematika is **alapfogalom**nak tekinti, amely más, egyszerűbb fogalmakra már nem vezethető vissza. Ugyanígy csak rokon értelmű szavakat tudunk mondani az **illeszkedés** helyett (rajta van, eleme). Ezt is alapfogalomnak tekinti a matematika.

A pontokat nagybetűkkel, az egyeneseket kisbetűkkel szoktuk jelölni.

Ha egy P pont **illeszkedik** egy e egyenesre, akkor azt így jelöljük: $P \in e$. (1.4. ábra)

Ekkor a P pont az e egyenest két **félegyenes**re bontja.

Ha a P pont **nem illeszkedik** az e egyenesre, annak jele: $P \notin e$. (1.5. ábra)

Az e és az f egyenes lehet **párhuzamos** (egy síkban fekszenek és nincs közös pontjuk): $e \parallel f$ (1.6. ábra); vagy lehet **metsző** (1.7. ábra). Ekkor a metszéspontot így jelöljük: $e \cap f = \{M\}$, de a geometriában gyakran lehagyjuk a halmazjelet, és csak az $e \cap f = M$ jelölést használjuk.

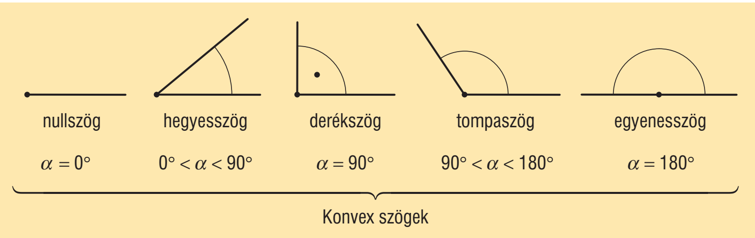
Az egyenest két pontja (P és Q) három részre bontja: két félegyenesre és egy **szakasz**ra. (1.8. ábra)

Egy pontból kiinduló két félegyenes a síkot két tartományra bontja. Ezeket **szög**eknek nevezzük. A két félegyenes közti ív berajzolásával tehetjük egyértelművé, melyik szögre gondolunk. A két félegyenes közös kezdőpontját (a P pontot) a szög csúcsának nevezzük. A szögeket leggyakrabban a görög ábécé kisbetűivel jelöljük: α, β, γ, δ stb.

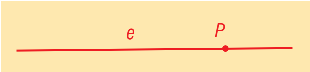
De az is gyakran előfordul, hogy mindkét szögszáron adott egy-egy pont, és ezek segítségével írjuk le, melyik szögre gondoltunk. Itt pl. $APB\sphericalangle$. (Középen mindig a szög csúcsát jelölő betű áll.) (1.9. ábra)

A szögek nagyságát többféleképpen is szokták mérni. Mi eddig csak a fokmértékkel találkoztunk. Azt a szöget, melynek két szára egy egyenesbe esik, és ellenkező irányba mutat, **egyenesszög**nek nevezzük.

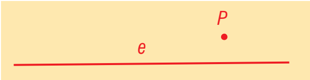
Történeti okokból úgy választjuk meg az egyenesszög mértékét, hogy az **180°** legyen. Ezek után az egyenlő szögek mértékéül ugyanazt a számot választjuk, egyébként pedig egyenesen arányosan rendeljük hozzá a szögek fokmértékét a szögek nagyságához. Így pl. az egyenesszög felének (a **derékszög**nek) **90°** a mértéke, az egyenesszög kétszeresének (a **teljesszög**nek) **360°** a mértéke. Jelöljük α-val a szög nagyságát!



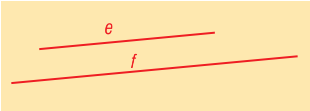
1.12. ábra Konvex szögek



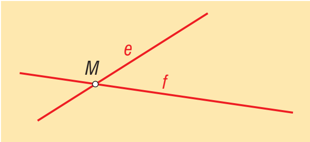
1.4. ábra $P \in e$



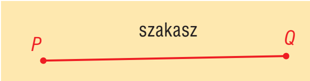
1.5. ábra $P \notin e$



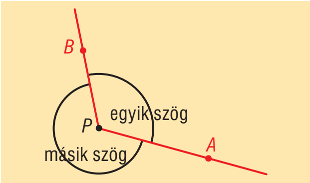
1.6. ábra $e \parallel f$



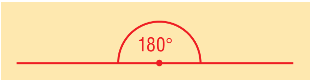
1.7. ábra $e \cap f = M$



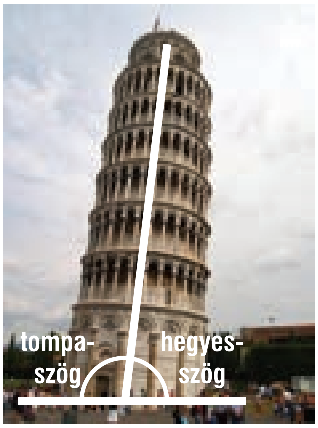
1.8. ábra Szakasz



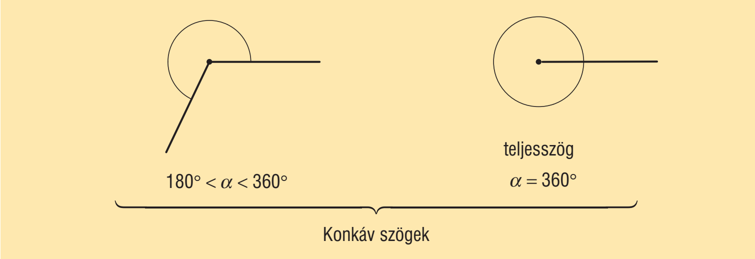
1.9. ábra $APB\sphericalangle$



1.10. ábra Egyenesszög



1.11. ábra Pisai ferde torony

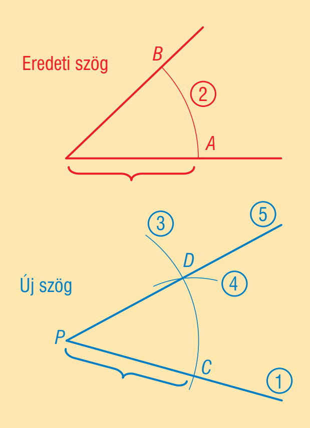


1.13. ábra Konkáv szögek

Általános iskolában már tanultunk alapvető szerkesztési lépéseket. A szögekkel kapcsolatosak pl. a következők.

Szögmásolás: egy adott szöget szeretnénk átmásolni egy új helyre. (1.14. ábra)

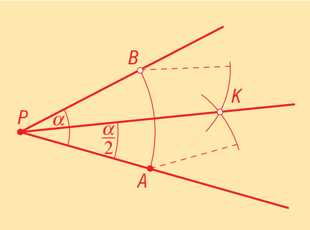
- Felveszünk egy félegyenest: az új szög egyik szárát. Ennek kezdőpontja az új szög csúcsa (P).
- A másolni kívánt szög csúcsa köré rajzolunk egy körívet. (Ez a két szögszárat az A és a B pontban metszi.)
- Ugyanekkora sugárral rajzolunk egy körívet a P pont köré. (Ez a C pontban metszi az új szög felvett szárát.)
- A C középpontú AB sugarú körívvel elmetsszük az előbbi körívet. (Ez lesz a másik szögszár egy D pontja.)
- Meghúzzuk a P kezdőpontú D-n átmenő félegyenest. Ez lesz az új szög másik szára.



1.14. ábra Szögmásolás

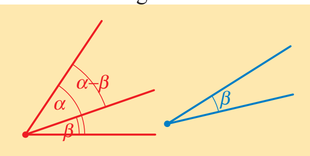
Szögfelezés: adott szöget felezzünk meg egy félegyenessel, az ún. szögfelezővel. (1.15. ábra)

- A szög P csúcsa köré rajzolunk egy tetszőleges sugarú kört. Ez a két szögszárat az A, illetve a B pontban metszi.
- A és B középponttal tetszőleges, de egyenlő sugarú köríveket rajzolunk. Ezek metszéspontja K.
- A P pontból kiinduló és K ponton áthaladó félegyenes a szögfelező.



1.15. ábra Szögfelezés

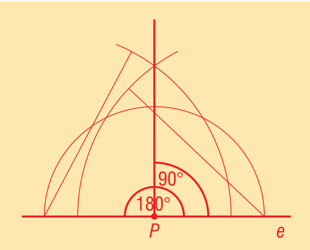
1. példa Adott az α és a β szög. Szerkesszük meg a két szög különbségét! (Tudjuk, hogy $\alpha > \beta$.)



1.16. ábra 1. példa

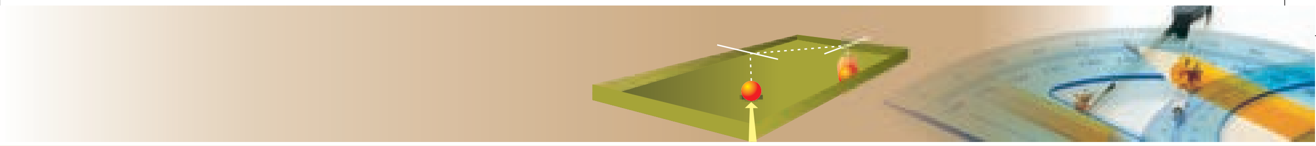
Megoldás:
A szerkesztést a szögmásolás segítségével tudjuk megoldani.
Fölvesszük a két adott szöget, majd a β szöget átmásoljuk úgy, hogy csúcsa egybeessen az α szög csúcsával, és egyik szára is egybeessen az α szög egyik szárával, másik szára pedig α szög belsejébe essen. (1.16. ábra)

Merőleges egyenes szerkesztése:
Szerkesszünk egy megadott egyenesre merőlegest adott ponton át!



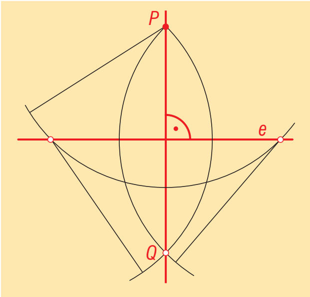
1.17. ábra Ha a pont illeszkedik az egyenesre

- Ha az adott pont (P) a megadott egyenes (e) egy pontja, akkor tekinthetjük úgy az egyenest, mint egy 180°-os szöget, amelynek csúcsa az



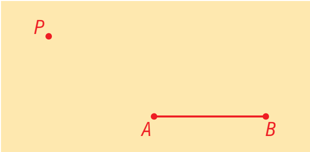
adott pont. Ekkor az egyenesszög felezésével megkaphatjuk a *P* csúcsú 90°-os szöget, amelynek egyik szára az *e* egyenesre illeszkedik. Másik szára lesz tehát a keresett merőleges. (1.17. ábra)

Ha az adott *P* pont nincs rajta az adott *e* egyenesen, akkor más módszert kell választanunk. Vegyünk egy *P* középpontú, akkora sugarú körívet, hogy két helyen metssze az *e* egyenest! A metszéspontok körül mint középpontok körül rajzoljunk ugyanekkora sugarú köríveket. Ezek az egyenes túloldalán metszik egymást (*Q*). Kössük össze *P*-t és *Q*-t, ez lesz a *P*-n át az *e* egyenesre bocsátott merőleges. (1.18. ábra)



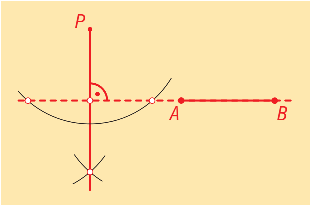
1.18. ábra Ha a pont nem illeszkedik az egyenesre

2. példa Az 1.19. ábrán látható módon van megadva a *P* pont és az *AB* szakasz. Szerkesszünk merőlegest a *P* pontból az *AB* szakaszra!



1.19. ábra 2. példa

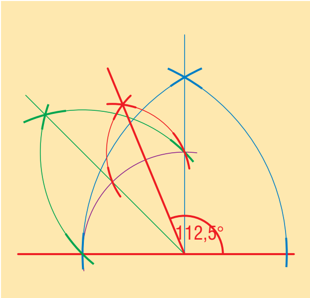
Megoldás:
Az *AB* szakasz akármelyik pontját kötnénk is össze a *P* ponttal, nem kapnánk a szakaszra merőleges egyenest. De ez nem jelenti azt, hogy nincs is! A megoldás kulcsa, hogy egy egyenes és egy szakasz (vagy akár két szakasz) úgy is lehet merőleges egymásra, ha nem metszik egymást. Húzzuk meg az *AB* szakasz egyenesét! Majd erre az egyenesre állítsunk merőlegest a *P* pontból az ismert módon! (1.20. ábra)



1.20. ábra 2. példa megoldása

3. példa Szerkesszünk 112,5°-os szöget!

Megoldás:
Az egyenesszög felezésével 90°-os szöghöz jutunk. Mivel a 112,5° nagyobb a 90°-nál, így azzal folytathatjuk a szerkesztési eljárást, hogy a 90° és a 180° közé eső szöget felezzük meg. Így $90° + \frac{90°}{2} = 135°$-os szöghöz jutunk. A 112,5°-os szög az eddigi szögeink közül a 90°-os és a 135°-os közé esik. Próbálkozzunk most ennek a szögnek a felezésével! Szerencsénk van, hiszen így éppen $90° + \frac{45°}{2} = 112{,}5°$-os szöget kapunk. (1.21. ábra)
(Megjegyezzük, hogy nem tudjuk bármelyik szöget véges sok lépésben szögfelezésekkel megszerkeszteni.)

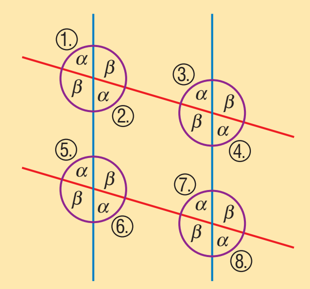


1.21. ábra 3. példa megoldása

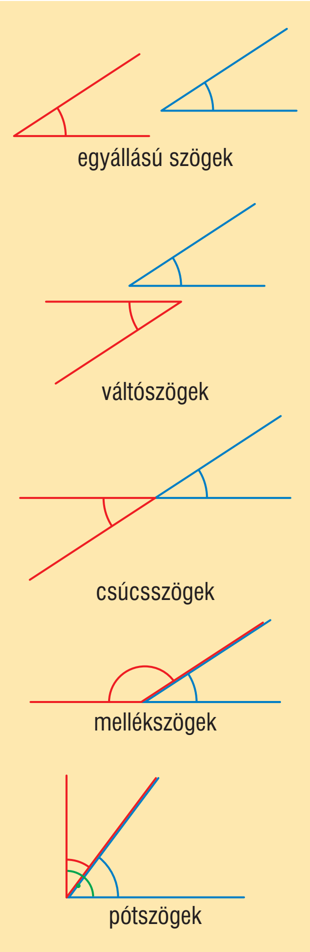
4. példa Figyeljük meg az 1.22. ábrán látható képet, és keressünk rajta egyenlő nagyságú szögeket!

1.22. ábra Sílécek nyomai a hóban

Megoldás:
A sílécek nyoma helyett vehetünk egyszerűen két-két párhuzamos egyenest úgy, hogy az egyik pár egyenes metszi a másik párt. Ezen az ábrán az egyenlő szögeket egyformán jelöljük.



1.23. ábra Párhuzamos szárú szögek



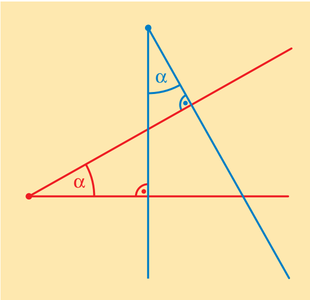
1.24. ábra Nevezetes szögpárok

Az 1.23. ábrán a **párhuzamos szárú szögek** minden fajtáját megfigyelhetjük. Az α nagyságú szögeket beszámoztuk. (A továbbiakban a sorszámukkal hivatkozunk rájuk.)

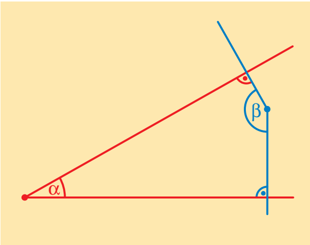
Egyállású szögek (a száraikat alkotó félegyenesek párhuzamosak és egy irányba mutatnak): az 1., a 3., az 5. és a 7. De ugyanígy egyállású szögek a 2., a 4., a 6. és a 8.
Váltószögek (a száraikat alkotó félegyenesek párhuzamosak, de páronként ellenkező irányba mutatnak): az 1. szögnek váltószöge a 2., a 4., a 6. és a 8. De a 3. szögnek is ugyanezek a váltószögei. (És az 5.-nek meg a 7.-nek is.) Ugyanígy a 6.-nak pedig a páratlan sorszámúak a váltószögei.
Csúcsszögek (olyan váltószögek, amelyeknek a csúcspontjai egybeesnek, így a szárai is egy egyenesbe esnek): az 1. és a 2. szög alkot egy csúcsszögpárt, valamint a 3. szögnek is csúcsszöge a 4. szög, de csúcsszögek az 5. és a 6., valamint a 7. és a 8. is.
Az eddig felsorolt szögpárokat alkotó szögek nagysága mindig egyenlő.

Mellékszögek (a két szög csúcsa egybeesik, az egyik száruk egybeesik, a másik száruk is egy egyenesbe esik, de ellenkező irányba mutat): az 1. szögnek mellékszöge a két mellette lévő β szög mindegyike. A mellékszögek mindig 180°-ra egészítik ki egymást, vagyis a két szög összege 180°.

További speciális szögpároknak is szoktunk még nevet adni, de ezek már nem párhuzamos szárú szögek.
Ha két szög összege egyenesszög, akkor azokat **kiegészítő szögek**nek nevezzük.
Ha két szög összege derékszög, akkor azokat **pótszögek**nek nevezzük.
Olykor találkozunk olyan szögekkel is, melyek szárai páronként merőlegesek egymásra. Ezeket **merőleges szárú szögek**nek nevezzük.

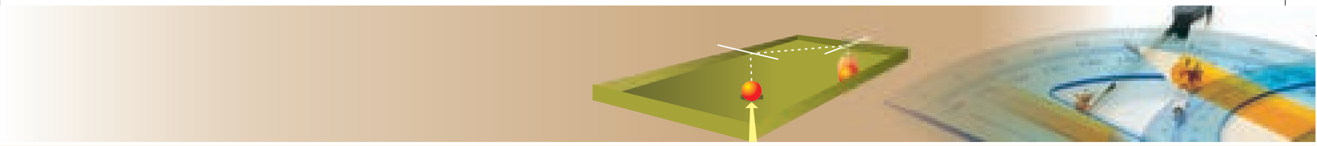


1.25. ábra Merőleges szárú hegyesszögek egyenlők egymással



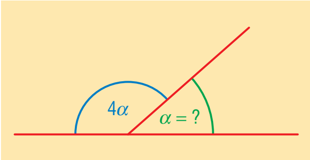
1.26. ábra Ha egy hegyesszög és egy tompaszög szárai páronként merőlegesek egymásra, akkor a két szög 180°-ra egészíti ki egymást

Két metsző egyenes a síkot négy részre bontja. A keletkezett négy szög közül kettő-kettő csúcsszög, így azok egyenlők. Ha nem mind a négy szög egyenlő nagyságú, akkor a keletkezett szögek közül a kisebbeket nevezzük a két egyenes hajlásszögének vagy röviden szögének. (Ha mind a négy szög egyenlő nagyságú, az csak úgy lehet, ha ezek mindegyike derékszög, ekkor a két egyenes hajlásszöge is derékszög.)



5. példa Mekkora az a szög, amelynek kiegészítő szöge 4-szer akkora, mint maga a szög?

Megoldás:
Jelöljük a keresett szöget α-val! A kiegészítő szöge 4-szer akkora, tehát 4α. Ugyanakkor tudjuk, hogy egy szög és kiegészítő szögének összege egyenesszög, vagyis $\alpha + 4\alpha = 180°$. Innen $5\alpha = 180°$, végül $\alpha = 36°$ következik. A keresett szög tehát 36°-os, kiegészítő szöge $180° - 36° = 144°$, ami valóban négyszerese a 36°-nak.



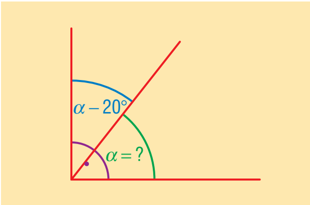
1.27. ábra 5. példa

6. példa Egy hegyesszög pótszöge 20°-kal kisebb magánál a szögnél. Mekkora ez a szög?

Megoldás:
A keresett szöget jelöljük α-val. Pótszöge a megadott összefüggés szerint $\alpha - 20°$. Mivel tudjuk, hogy egy szög és pótszögének összege derékszög, fölírhatjuk a következő egyenletet:

$$\alpha + \alpha - 20° = 90°,$$
$$2\alpha = 110°,$$
$$\alpha = 55°.$$

A keresett hegyesszög tehát 55°-os. Pótszöge $90° - 55° = 35°$, ami valóban 20°-kal kisebb a szögnél.



1.28. ábra 6. példa

Oldjuk meg!

1. Hány fokos az a hegyesszög, amely kétszer akkora, mint a pótszöge?

2. Egy szögnek és mellékszögének aránya 3 : 2. Mekkora ez a szög?

3. Szerkesszünk 45°-os szöget!

4. Adott a síkon egy 131°-os szög és egy P pont. Állítsunk merőlegest a P pontból az adott szög mindkét szárának egyenesére! Mekkora szöget zár be egymással az így kapott két félegyenes? Hány megoldás van?

5. Mekkora a 38°-os szög pótszögének a pótszöge?

6. Hány fokos az a konvex szög, amely 70°-kal nagyobb a kiegészítő szögénél?

7. Vegyünk fel egy tetszőleges hegyesszöget! Szerkesszük meg
a) a mellékszögét; b) a pótszögét!

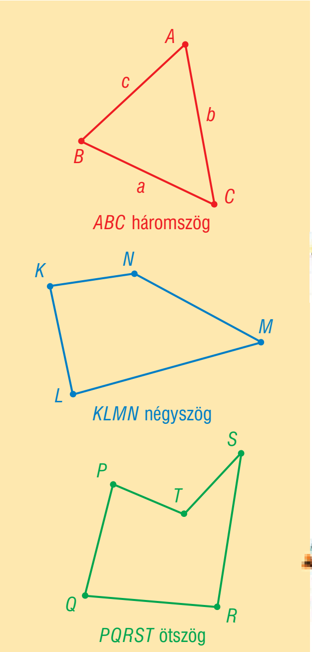
8. Mekkora az a szög, amely egyenlő a mellékszögével?

9. Adott a síkon két konvex szög. Szerkesszük meg a két szög összegét!

10. Az α és a β merőleges szárú szögek. Mekkora lehet a β szög nagysága, ha
a) $\alpha = 63°$; b) $\alpha = 90°$; c) $\alpha = 135°$?
Hány megoldás van az egyes esetekben?

11. Öt különböző szöget nagyság szerint sorba rendeztünk. Hány fokosak lehetnek ezek a szögek, ha mindegyik 20°-kal nagyobb, mint az előtte álló, és együtt teljes szöget alkotnak?

2. Sokszögek
Ismétlés II.



2.1. ábra Sokszögek

A sokszögek csúcsait nagybetűkkel szoktuk jelölni. Az oldalait pedig vagy kisbetűkkel jelöljük (pl. *a*, *b*, *c*) vagy az oldal végpontjainak segítségével (pl.: *KL* vagy *TS*). Mindkét jelölést használjuk az oldal hosszának a jelölésére is. Minden sokszögnek annyi szöge van, ahány csúcsa, és ahány oldala. A 2.1. ábrán lévő háromszögre a csúcsai alapján *ABC* háromszög néven hivatkozhatunk. Ugyanígy a négyszög: *KLMN* négyszög, és az ábrázolt ötszög: *PQRST* ötszög.

1. példa Az 2.1. ábrán látható *ABC*, *KLMN* és *PQRST* sokszög egy-egy szobának az alaprajza. Két gyerek szeretne elbújni egymás elől valamelyik szobában. Melyikben tudják ezt megtenni?

Megoldás:
Csak a *PQRST* ötszög alapú szobában tudnak elbújni egymás elől. Hiszen a másik két alaprajz bármely pontjából látszik annak bármely másik pontja.

Definíció Ha egy ponthalmaz bármely pontját bármely másik pontjával összekötő szakasz minden pontja eleme a ponthalmaznak, akkor a ponthalmazt **konvex**nek nevezzük.

A 2.1. ábrán konvex az *ABC* háromszög és a *KLMN* négyszög.

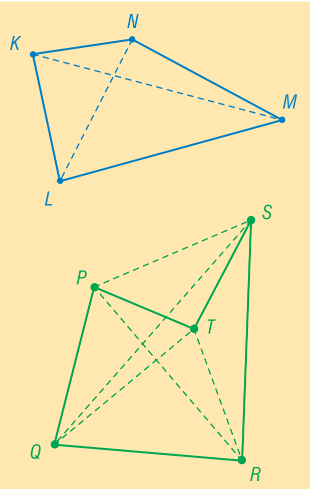
Definíció A nem konvex síkidomokat **konkáv** síkidomoknak nevezzük.

A fenti ábrán konkáv a *PQRST* ötszög.

2. példa Rajzoljuk le a 2.1. ábrán látható sokszögeket, és rajzoljuk be, hogyan lehet eljutni a lehető legrövidebb úton egy-egy sokszög valamelyik csúcsából a többi nem szomszédos csúcsba!

Megoldás:
A háromszögnél csak szomszédos csúcsok vannak, tehát itt nincs ilyen összekötő szakasz.

Vegyük észre, hogy a konkáv ötszögnél a *P* csúccsal nem szomszédos például az *S* csúcs, így meg kell húznunk az ezeket összekötő szakaszt akkor is, ha ez teljes egészében az ötszögön kívül halad! (A *QS* szakasz sem halad végig az ötszög belsejében.)



2.2. ábra Átlók

A 2.2. ábrára pillantva rögtön láthatjuk, hogy az imént éppen a két sokszög átlóit rajzoltuk meg.

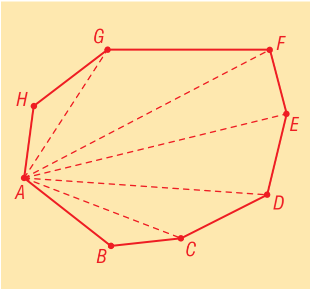
Definíció Kössük össze egy sokszög két nem szomszédos csúcsát egy szakasszal! Az ilyen szakaszokat a sokszög **átló**inak nevezzük.

3. példa Hány átlója van egy nyolcszögnek?

Megoldás:
A jobb áttekinthetőség érdekében rajzolhatunk konvex nyolcszöget. Gyorsan észrevehetjük, hogy itt már vonalzóval készített ábrán sem könnyű összeszámolni az átlókat.

Vegyük észre, hogy egy csúcsból három csúcsba nem húzhatunk átlót: pl. az A csúcsból magába az A-ba, valamint a két vele szomszédos csúcsba, a B-be és a H-ba! Így minden csúcsból $8-3=5$ átló húzható.

De azt is vegyük észre, hogy ha minden csúcsból meghúznánk mind az öt átlót, akkor minden átlót pontosan kétszer számolnánk! (Pl. lásd az A-ból a C-be és a C-ből az A-ba húzott átlót.)



2.3. ábra Az egy csúcsból húzható átlók száma $8-3=5$

Mivel minden csúcsból 5 átlót húztunk, és 8 csúcs van, így $8\cdot 5=40$ átló lenne. De mindegyiket duplán számoltuk, így $40:2=20$ átlója van a nyolcszögnek.

Az előbbi példa gondolatmenetét megismételhetnénk akárhány oldalú sokszögre. Így megállapíthatjuk a következő tételt.

Tétel Az n oldalú sokszög átlóinak száma:

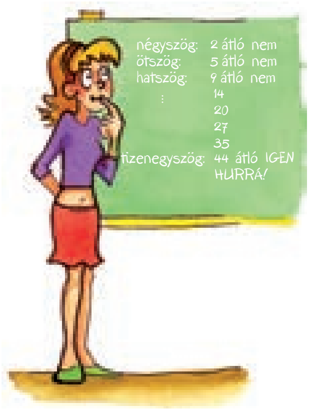
$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

2.4. ábra Hányféle sokszöget láthatunk a képen?

4. példa Hány oldala lehet annak a sokszögnek, amelynek 44 átlója van?

Megoldás:
Jelöljük a sokszög oldalainak számát n-nel! Ekkor tudjuk, hogy az átlóinak száma: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$, vagyis az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=44$ egyenletet kell megoldanunk. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 2-vel, majd vonjunk ki mindkét oldalból 88-at:

$$n\cdot(n-3)-88=0.$$



2.5. ábra Próbálkozzunk!

A zárójel felbontása után próbálkozzunk szorzattá alakítással!

$$n^2 - 3n - 88 = 0$$

$$(n+8)\cdot(n-11) = 0$$

A szorzat csak úgy lehet 0, ha legalább az egyik tényezője 0, azaz

$$n+8=0 \quad \text{vagy} \quad n-11=0.$$

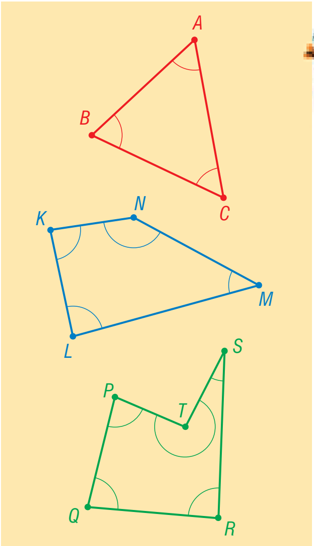
Az első összefüggésből n-re a negatív -8 értéket kapnánk, ami nyilván nem lehet egy sokszög oldalszáma. A második összefüggésből viszont $n=11$-et kapunk, ami már lehet egy sokszög oldalszáma.

Ellenőrizzük megoldásunk helyességét! A 11 oldalú sokszögnek $\frac{11\cdot 8}{2} = 44$ átlója van.

Tehát a sokszög 11 oldalú.

Elevenítsük föl azt is, amit a háromszögek, sokszögek belső és külső szögeiről tanultunk!

Definíció Egy sokszög **belső szög**ének nevezünk egy olyan szöget, amelynek csúcsa a sokszög egyik csúcsa, két szára pedig a sokszögnek ebből a csúcsból kiinduló két oldalát tartalmazza. (Olykor a belső szög helyett csak **szög**et mondunk.)



2.6. ábra Belső szögek

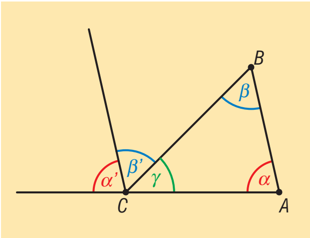
Minden sokszögnek annyi belső szöge van, ahány csúcsa.

Amint a 2.6. ábrán is látszik, a többoldalú sokszögek egy-egy belső szögének nagysága 0° és 360° között bármi lehet. Konkáv sokszögnek van konkáv (vagyis 180°-nál nagyobb) szöge is, konvex sokszögnek csak konvex szögei vannak. A háromszögek belső szögei nem lehetnek nagyobbak 180°-nál. Ez összhangban van azzal az összefüggéssel is, amit már általános iskolából jól ismerünk.

Tétel A háromszög belső szögeinek összege 180°.

Bizonyítás:
Ennek igazolásához használjuk a szögpárokról tanultakat! Az *ABC* háromszög *C* csúcsán túl hosszabbítsuk meg az *AC* oldalt, és a *C* csúcson át húzzunk párhuzamost az *AB* oldallal a 2.7. ábrán látható módon! Az α és az α' egyállású szögek, tehát $\alpha = \alpha'$.

A β és a β' váltószögek, így $\beta = \beta'$. A *C* csúcsnál pedig α', β' és γ egyenesszöget alkot, vagyis $\alpha' + \beta' + \gamma = 180°$, így $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ is teljesül.



2.7. ábra $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

5. példa Egy háromszög két belső szögének nagysága 23° és 71°. Állapítsuk meg, mekkora a háromszög harmadik szöge, és mekkora ennek a harmadik szögnek a mellékszöge!

Megoldás:
Legyen a két megadott szög a háromszög α és β szöge! Tudjuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma=180°$.
Ezért $\gamma=180°-(\alpha+\beta)=180°-(23°+71°)=180°-94°=86°$.
A háromszög harmadik szöge tehát 86°.
Ennek a 86°-os szögnek a mellékszöge ezt a szöget 180°-ra egészíti ki.
Így a harmadik szög mellékszöge $180°-86°=94°$-os.

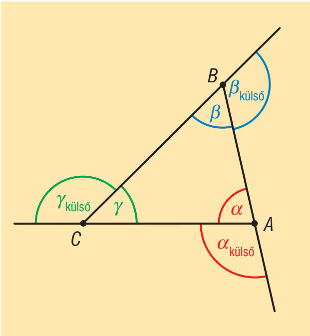
Vegyük észre, hogy a γ mellékszöge éppen az α és a β szögek összegével egyenlő! Ez a 2.7. ábra alapján természetes.

Definíció A háromszög bármely belső szögének mellékszögét a háromszög **külső szögének** nevezzük.

Az eddigiek alapján kimondható a következő tétel.

Tétel A háromszög bármely külső szöge egyenlő a két nem mellette fekvő belső szögének összegével:

$$\gamma_{\text{külső}}=\alpha+\beta,\quad \beta_{\text{külső}}=\alpha+\gamma \quad \text{és} \quad \alpha_{\text{külső}}=\beta+\gamma.$$



2.8. ábra Belső és külső szögek kapcsolata

6. példa Egy háromszög két belső szögének nagysága 58° és 37°. Számítsuk ki, hogy mekkora a háromszög három külső szögének összege! Vizsgáljuk meg, hogyan függ a végeredmény a megadott szögek nagyságától!

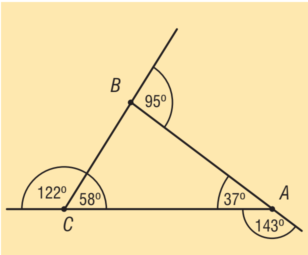
Megoldás:
Jelölje α az 58°-os szöget, β a 37°-os szöget, γ pedig a háromszög harmadik szögét! (2.9. ábra)

Az α külső szöge: $\alpha_{\text{külső}}=180°-\alpha=180°-58°=122°$.

A β külső szöge: $\beta_{\text{külső}}=180°-\beta=180°-37°=143°$.

A γ külső szöge pedig: $\gamma_{\text{külső}}=\alpha+\beta=58°+37°=95°$.

A három külső szög összege: $122°+143°+95°=360°$.



2.9. ábra 6. példa

A feladat másik részének megoldásához írjuk föl általánosan a három külső szög összegét!

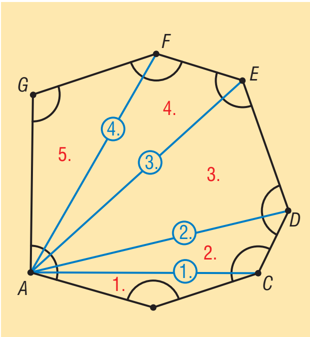
$$\alpha_{\text{külső}}+\beta_{\text{külső}}+\gamma_{\text{külső}}=(180°-\alpha)+(180°-\beta)+(\alpha+\beta)=360°$$

Azt az eredményt kaptuk, hogy a megadott szögek nagyságától függetlenül mindig 360° az összeg.

Tétel A háromszög külső szögeinek összege 360°.

7. példa Mekkora egy konvex hétszög belső szögeinek összege?

Megoldás:
A problémát visszavezetjük a háromszögek belső szögeinek összegéről tanultakra. Rajzoljuk meg a hétszög egyik csúcsából kiinduló összes átlót! (2.10. ábra) Ha sorban haladunk az átlók megrajzolásával (*AC*, *AD*, *AE*, majd *AF*), akkor egy-egy átló megrajzolásakor mindig egy-egy új háromszög keletkezik a hétszög belsejében. Az utolsó (negyedik) átló behúzásakor pedig egy ötödik háromszög is.

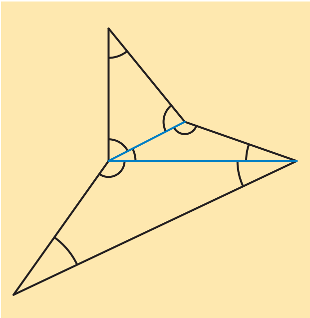


2.10. ábra Konvex hétszög

Vegyük észre, hogy az öt háromszög minden belső szöge hozzájárul a hétszög belső szögeinek összegéhez, és éppen ki is adják ezt az összeget! Így megállapítható, hogy a hétszög belső szögeinek összege $5\cdot 180° = 900°$.

Az előbbi gondolatmenetet hétszög helyett tetszőleges oldalszámú konvex sokszögre is megismételhetjük.

Az n-oldalú konvex sokszög egy csúcsából $n-3$ átló húzható, ezekkel $n-2$ darab háromszögre bontjuk fel a sokszöget. Ezen háromszögek mindegyikének összes szögösszege éppen a sokszög belső szögeinek összegét adja. Tehát igaz a következő tétel.

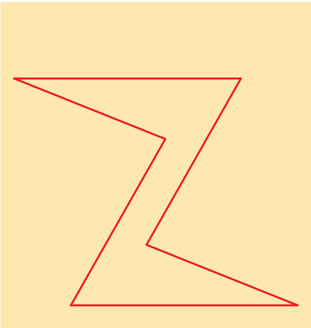

2.11. ábra Itt is $(5-2)\cdot 180°$ a belső szögek összege

Tétel Az n-oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180°$.

Bebizonyítható, hogy ez az összefüggés konkáv sokszögekre is érvényes.

Foglaljuk táblázatba a legkevesebb oldalú sokszögek belső szögeinek összegére és átlóinak számára vonatkozó ismereteinket!

Sokszög oldalszáma n	Belső szögek összege $(n-2)\cdot 180°$	Átlók száma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$
3	180°	0
4	360°	2
5	540°	5
6	720°	9

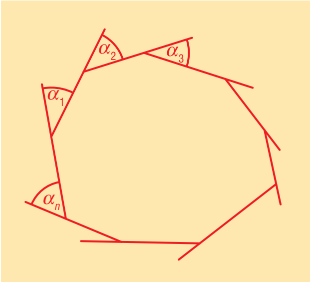

2.12. ábra Hány teremőr kell abba a kiállítóterembe, amelynek ilyen az alaprajza?

A háromszögekhez hasonlóan bármely konvex sokszögnek értelmezhetjük a külső szögeit.

Definíció A konvex sokszög egy belső szögének mellékszögét az adott szög **külső szögé**nek nevezzük.

8. példa Mekkora egy n-oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege?

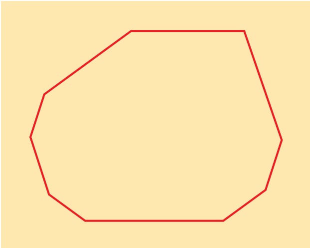
Megoldás:
Adjuk össze az összes belső és külső szöget!
Ez egyrészt $n \cdot 180°$, hiszen a sokszög minden csúcsánál 180°-ra egészíti ki egymást a belső és a külső szög. (2.13. ábra) Másrészt: a külső szögek összege + a belső szögek összege = a külső szögek összege + $(n-2) \cdot 180°$.
Ezért a külső szögek összege $= n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° =$
$= n \cdot 180° - n \cdot 180° + 2 \cdot 180° = 360°$.
Vagyis azt a meglepő tényt kaptuk, hogy akárhány oldalú konvex sokszögnél a külső szögek összege 360°.



2.13. ábra 8. példa

9. példa Egy tízszögről tudjuk, hogy minden szöge egyenlő nagyságú. Mekkorák ezek a szögek?

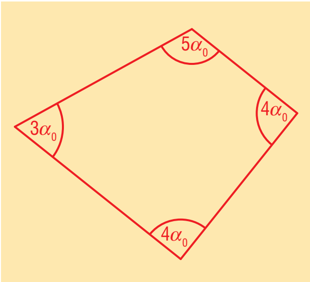
Megoldás:
1. módszer:
A tízszög belső szögeinek összege $(10-2) \cdot 180° = 8 \cdot 180° = 1440°$. Mivel minden szöge egyenlő nagyságú, ezért egy-egy szöge: $\frac{1440°}{10} = 144°$-os. (2.14. ábra)


2.14. ábra Egy tízszög

2. módszer:
Ha minden szög egyenlő nagyságú, akkor ezek csak konvex szögek lehetnek, így a tízszög külső szögeinek összege 360°. A külső szögek nagyságának is egyenlőnek kell lennie, így egy-egy külső szöge: $\frac{360°}{10} = 36°$-os, vagyis a belső szögek nagysága ennek mellékszöge: $180° - 36° = 144°$.

10. példa Egy négyszög szögeinek az aránya (egy meghatározott körüljárási sorrendben) 5:3:4:4. Állapítsuk meg, mekkorák a négyszög szögei!

Megoldás:
Az arányt ismerve fölírhatjuk a négyszög egyes szögeit az alábbi módon: $\alpha = 5\alpha_0$, $\beta = 3\alpha_0$, $\gamma = 4\alpha_0$ és $\delta = 4\alpha_0$. Ezek összege 360°. Vagyis $5\alpha_0 + 3\alpha_0 + 4\alpha_0 + 4\alpha_0 = 16\alpha_0 = 360°$, ahonnan $\alpha_0 = 360° : 16 = 22,5°$.
A négyszög szögeinek nagysága tehát: $5 \cdot 22,5° = 112,5°$; $3 \cdot 22,5° = 67,5°$, és a másik két szög $4 \cdot 22,5° = 90°$.



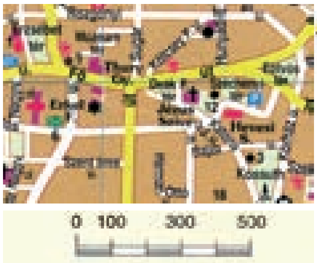
2.15. ábra 10. példa

Oldjuk meg!

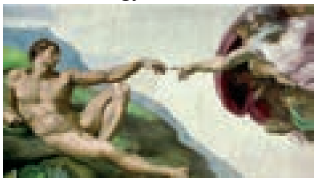
1. Hány átlója van a) egy hétszögnek; b) egy tízszögnek; c) egy tizenkétszögnek?
2. Hány oldalú az a sokszög, amelynek egy csúcsából 3 átló húzható?
3. Hány oldalú az a sokszög, amelynek kétszer annyi átlója van, mint oldala?
4. Hány oldalú az a sokszög, amelynek összesen 27 átlója van?
5. Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyről tudjuk, hogy a szögek aránya 4:3:8? Határozzuk meg a külső szögek (ugyanilyen sorrendben vett) arányát is!
6. Egy sokszög szögeit nagyság szerint növekvő sorrendbe állítjuk. Ebben a sorrendben minden szög 40°-kal nagyobb az előtte lévőnél. Hány fokos a sokszög legkisebb és legnagyobb szöge, ha a sokszög oldalainak száma a) 3; b) 4; c) 5; d) 7?
7. Egy konvex sokszög belső szögeinek összege ugyanannyi, mint külső szögeinek összege. Hány oldalú ez a sokszög?
8. Egy konvex sokszög belső szögeinek összege 4-szer akkora, mint külső szögeinek összege. Hány átlója van ennek a sokszögnek?

3. Térelemek távolsága, sokszögek osztályozása

Ismétlés III.



3.1. ábra Nagykanizsa



3.2. ábra Nézzünk utána pl. az internet segítségével, hogy Michelangelo egyik leghíresebb festménye (Ádám teremtése) hol látható!

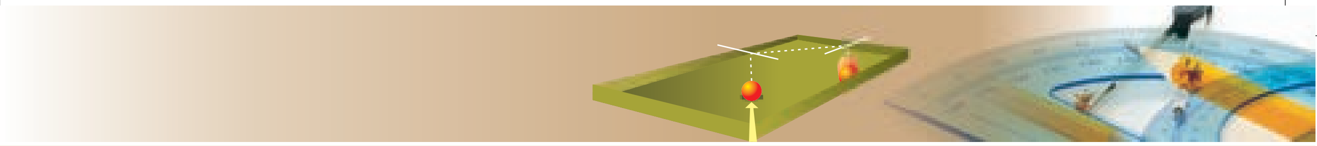
3.3. ábra Részlet

1. példa A térképrészleten Nagykanizsa belvárosának egy része látható. Határozzuk meg a térkép alatt található lépték segítségével, hogy milyen messze van egymástól a Kossuth tér és az Eötvös tér!

Megoldás:
Egy kis darab papírt tegyünk a lépték mellé, rajzoljuk át a szélére a 100 méterenkénti beosztásokat! Ennek a papírnak a nullapontját tegyük az Eötvös tér Kossuth térhez közelebbi sarkához! Majd forgassuk úgy a papírt, hogy a Kossuth tér felé mutasson a mércénk! Nyilván mindenki azt a legrövidebb távolságot fogja keresni, amelyen az egyik térről el lehet jutni a másikra. A térkép szerint ez kb. 180 méter. Ha megfigyeljük, milyen messze van e két tér legtávolabbi csücske, majdnem 500 métert kapunk. Amikor a két tér távolságára gondolunk, természetesnek tűnik, hogy a lehető legkisebb távolságot vesszük. Így mondhatjuk, hogy a két tér kb. 180 méterre van egymástól.

(Persze ha két tér messzebb van egymástól, és csak cikkcakkban lehet eljutni egyikről a másikra, akkor a távolság nem feltétlenül ugyanaz a hossz, amelyet az utcákon sétálva meg kell tennünk a két tér között.)

A geometriában hasonlóan értelmezzük az alakzatok, ponthalmazok távolságát.



Két pont távolsága az általuk meghatározott szakasz hossza.

Definíció **Két ponthalmaz távolságán** a pontjaik közötti távolságok minimumát értjük.
(Később találkozunk majd olyan síkidomokkal, melyek pontjai közti távolságoknak nincs minimuma. A problémára akkor visszatérünk.)

A távolság jelölésére gyakran használjuk a *d* betűt. (distancia = távolság)

Ezek alapján egy *P* pont és egy *e* egyenes távolsága $d(P; e)$: a *P* pontból az *e* egyenesre állított merőleges *P′* talppontjának és a *P* pontnak a távolsága. Röviden: $d(P; e) = d(P; P') = PP'$.

Ha két alakzatnak van közös pontja, akkor a definíció alapján a távolságuk nulla. Így pl. két metsző egyenes távolsága is nulla.

Ha viszont két egyenes párhuzamos, akkor a pontjaik közti minimális távolságot úgy kapjuk, ha az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának távolságát vesszük a másik egyenestől. Ami ugyanazt jelenti, mint ha a párhuzamosokra merőlegesen állítunk valahol egy egyenest, s a párhuzamosokkal vett metszéspontjainak távolságát vesszük.

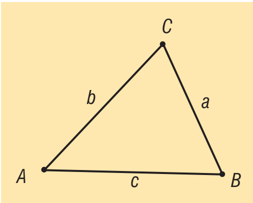
$$d(e; f) = d(A; B) = AB$$

Elfogadtuk, hogy két pont távolsága az általuk meghatározott szakasz hossza. Ezzel azt is elfogadtuk, hogy a két pont közötti vonalak közül a pontokat összekötő szakasz a lehető legrövidebb.

Vagyis akár egy görbe vonal mentén mennénk az *A* pontból a *B* pontba, akár egy törött vonal mentén, az az *AB* szakasznál csak hosszabb lehetne.

Ezek alapján nyilvánvaló az ún. **háromszög-egyenlőtlenség**.

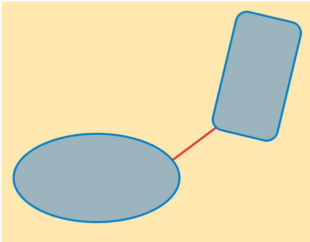
Tétel A háromszögben bármely két oldal hosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál.

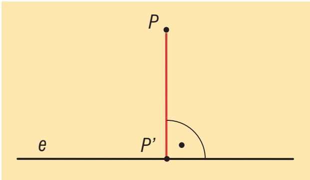


3.8. ábra Háromszög

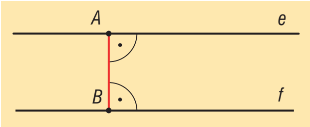
$a + b > c$ és
$b + c > a$ és
$c + a > b$

Ez úgy is leírható, hogy $|b - c| < a$ és
$|a - c| < b$ és
$|a - b| < c$.

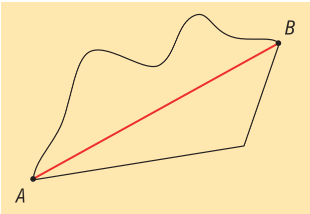

3.4. ábra Két ponthalmaz távolsága



3.5. ábra Pont és egyenes távolsága



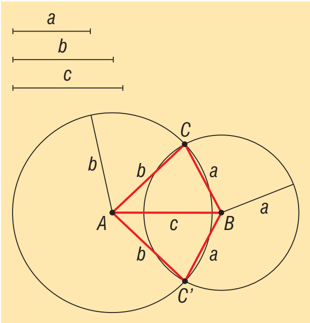
3.6. ábra Párhuzamos egyenesek távolsága



3.7. ábra Két pont közt a legrövidebb út az egyenes


3.9. ábra Mászóka háromszögekből

2. példa Szerkesszünk háromszöget, ha adott három oldalának hossza!



3.10. ábra 2. példa

Megoldás:
Azt, hogy adott három oldalának hossza, úgy kell érteni, hogy pl. a kezünkbe kapunk egy fehér lapot, amelyen nincs semmi más, csak ez a három szakasz. Szóval fel kell készülnünk minden eshetőségre! (Tehát ha nem ismerjük ezeket az adatokat, akkor sem választhatjuk meg önkényesen pl. három egyenlő hosszúságúnak.) Lehetőleg próbáljunk meg a legáltalánosabban három szakaszt fölvenni!

Vegyük föl először valahova a *c* hosszúságú oldalt! A szokásos jelölések szerint ez lesz az *AB* oldal. A szemközti *C* csúcs az *A* csúcstól *b* távolságra van, így rajta van egy *A* középpontú, *b* sugarú körön. De ugyanígy rajta van a *B* középpontú, *a* sugarú körön is, hiszen a *B* csúcstól pedig *a* távolságra van. Szerkesszük meg a két kört! Ezek metszéspontjában lesz a *C* csúcs. Két ilyen pontot is kaptunk, az ábrán az egyiket *C*-vel, a másikat *C'*-vel jelöltük.

Az előbbiek alapján a háromszög csak akkor létezik, ha bármely két oldal hosszának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

A szerkesztés alapján megállapíthatjuk, hogy a háromszöget egyértelműen meghatározza három oldala.

3.11. ábra Tower Bridge

3. példa Adott négy szakasz: egy 5 cm, egy 12 cm, egy 16 cm és egy 22 cm hosszúságú. Állapítsuk meg, hogy a négy szakasz közül melyik háromból lehet háromszöget szerkeszteni, és melyik háromból nem!

Megoldás:
Először nézzük az első három szakaszt! A leghosszabb szakasz már önmagában is hosszabb akármelyik másiknál, így csak azt az egy egyenlőtlenséget kell ellenőriznünk, hogy a két kisebb szakasz hosszának összege nagyobb lesz-e a leghosszabb szakasz hosszánál. $5+12>16$, tehát teljesül az egyenlőtlenség. Ebből a három szakaszból lehet háromszöget szerkeszteni.
$5+12<22$, így az 5 cm-es, a 12 cm-es és a 22 cm-es szakaszból nem lehet háromszöget szerkeszteni.
$5+16<22$, még itt sem elég nagy a két rövidebb oldal hosszának összege. Ezekből az adatokból sem szerkeszthető háromszög.
$12+16>22$. Ez pedig megint jó, hiszen a két rövidebb oldal hosszának összege nagyobb, mint a leghosszabb oldal.

4. példa Egy háromszög oldalai cm-ben mérve egész számok. Két oldalának hossza 6 cm és 13 cm. Hány ilyen háromszög van? Hány ilyen háromszög van, ha a harmadik oldalnak nem kell egész cm hosszúságúnak lennie?

Megoldás:
A 6 cm-es oldalnál rövidebb oldala nem lehet a háromszögnek, mert akkor a két rövidebb oldal hossza együtt sem érné el a 13 cm-t. A legkisebb egész oldalhosszúság, amely szóba jöhet, a 8 cm-es. (Még $6+7$ sem nagyobb 13-nál.) Ezt a 8 cm-es oldalt centiméterenként növelhetjük még a 13-on túl is egészen addig, míg a két kisebb oldal összege – amely most már a 6 cm-es és a 13 cm-es – nagyobb, mint ez az oldal. $6+13=19$, tehát a harmadik oldal legfeljebb 18 cm-es lehet. Így 11 jó háromszöget kaptunk. (A harmadik oldal 8, 9, 10, …, 18 cm.)

Jelölje c a hiányzó oldal hosszát centiméterben! Ekkor a következő három egyenlőtlenségnek kell teljesülnie: $6+13>c$, $6+c>13$ és $13+c>6$.

Az utolsó nyilván teljesül akármilyen pozitív c esetén. Az elsőből $19>c$, a másodikból $c>7$ adódik. Vagyis ha a harmadik oldal hosszának cm-ben kifejezve nem kell egésznek lennie, akkor a $]7;\,19[$ nyílt intervallum minden eleme lehet a c oldal hossza. Tehát akkor végtelen sok ilyen háromszög van.

(A második kérdésre adott válasz módszerével is megoldhattuk volna az első kérdést. A $]7;\,19[$ nyílt intervallumnak éppen 11 egész szám az eleme.)

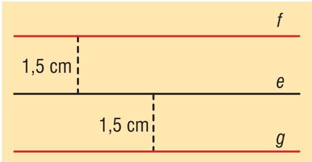
3.12. ábra Finom „háromszögek”

5. példa Sok autónál télen a hátsó ablaküveget fűtőszálak segítségével melegítik, hogy kívül leolvadjon róla a jég, és ki lehessen látni rajta. Egy fűtőszál annyi hőt ad le, hogy rövid időn belül a tőle akár 1,5 cm-re lévő pontokon is megolvad a jég. Állapítsuk meg és rajzoljuk le, hogy egyetlen egyenes fűtőszál milyen rést képes olvasztani a hátsó ablaküveg jégbevonatába! Indokoljuk meg, miért vannak az egyenes fűtőszálak párhuzamosan elhelyezve egymástól 3 cm-re!

3.13. ábra Autó szélvédője fűtőszállal

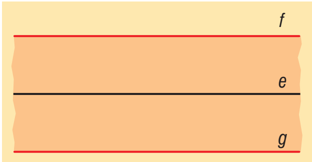
Megoldás:
Az első kérdés a matematika nyelvén így hangzik: mi azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy egyenesétől legfeljebb 1,5 cm-re helyezkednek el?

Az e egyenestől 1,5 cm-re lévő pontok halmaza két egyenes, melyek párhuzamosak az e egyenessel (f és g). (3.14. ábra)



3.14. ábra 5. példa

Azon pontok halmaza pedig, amelyek legfeljebb 1,5 cm-re helyezkednek el az e egyenestől, a két párhuzamos (f és g), valamint a köztük lévő síkrész. (3.15. ábra)

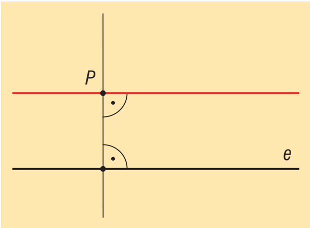


3.15. ábra Megoldás

Az egyenes fűtőszál tehát egy ilyen sávban olvasztja le a jeget.

Két szomszédos fűtőszálat tehát célszerű párhuzamosan, egymástól 2×1,5 cm-re, azaz 3 cm-re elhelyezni, hogy a köztük lévő teljes ablakrészt le tudják olvasztani. Így ha az egész hátsó ablakon 3 cm-enként helyezzük el a fűtőszálakat, akkor a hátsó ablakfűtés bekapcsolása után nem sokkal tökéletesen kilátunk hátrafelé.

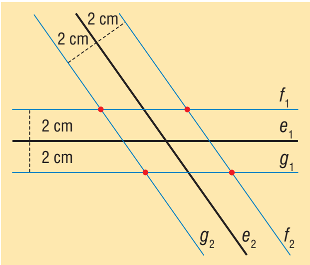
6. példa Adott egy egyenes és rajta kívül egy pont. Szerkesszünk párhuzamost az adott ponton át az egyenessel!



3.16. ábra 6. példa

Megoldás:
Nézzünk egy könnyen áttekinthető szerkesztést! Jelöljük az egyenest *e*-vel, a pontot *P*-vel! Állítsunk merőlegest a *P* pontból az *e* egyenesre, majd erre a merőlegesre is állítsunk merőlegest a *P* pontban. Az így kapott egyenes párhuzamos lesz az *e*-vel (hiszen a két derékszög egyik szára közös). A merőlegesek szerkesztésének szerkesztővonalait a rajzon nem tüntettük fel. (3.16. ábra)

7. példa Szerkesszük meg azokat a pontokat, amelyek
a) két metsző egyenes mindegyikétől 2 cm távolságra vannak;
b) két metsző egyenes közül legalább az egyiktől 2 cm távolságra vannak!



3.17. ábra 7. példa

Megoldás:
Az előző két feladat alapján könnyű dolgunk van. Megszerkesztjük az egyik egyenestől 2 cm-re lévő pontok halmazát (egy-egy párhuzamos az egyenes két oldalán), majd ugyanezt a másik egyenes esetében.

Az a) esetben a két-két párhuzamos metszéspontjai felelnek meg. Négy ilyen pont van. (A 3.17. ábrán pirossal jelöltük.) A négy pont éppen egy rombusz négy csúcsában helyezkedik el.

A b) esetben elegendő, ha az egyik egyenestől van 2 cm-re a keresett pont, így a négy, kékkel jelölt egyenes minden pontja jó (a pirosak is).

Oldjuk meg!

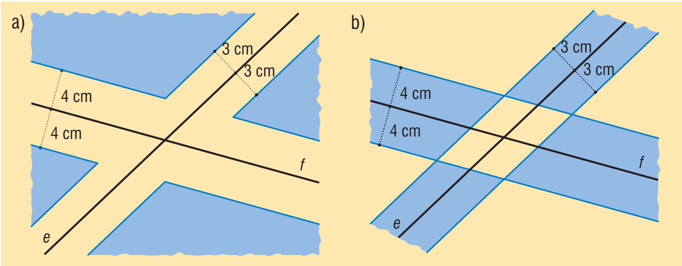
1. Milyen messze van egymástól Nagykanizsán az Eötvös tér és az Erzsébet tér? (Használjuk az 1. példában szereplő térképet!)
2. Milyen távolságra helyezzék el egymástól egy babaágy (függőleges) rácsait, hogy biztosan ne essen ki a csecsemő két léc között, és a feje se szoruljon be két léc közé?
3. Adjunk meg három különböző prímszámot, amelyek lehetnek egy háromszög oldalhosszai! (Keressünk több megoldást is!)
4. Hány olyan háromszög van, amelynek oldalhosszai az $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ halmazból valók? Hány olyan van ezek között, amelynek minden oldala különböző hosszúságú?
5. Adjunk meg négy olyan pozitív egész számot, amelyek közül semelyik három nem lehet egy háromszög három oldalának a hossza! (Keressünk több megoldást!)

6. Rajzoljuk le azon pontok halmazát, amelyeknek egy adott egyenestől mért távolságuk
a) 3 cm; b) 3 cm-nél nagyobb; c) 2 cm-nél nem kisebb és 3 cm-nél nem nagyobb!

7. Adott két metsző egyenes: az *e* és az *f*. Szerkesszük meg azokat a pontokat, amelyek az *e* egyenestől 3 cm-re, az *f* egyenestől pedig 1cm-re vannak!

8. Jelöljük meg a koordináta-rendszerben azon pontok halmazát,
a) amelyeknek az *x* tengelytől vett távolsága 5 egységnél nem nagyobb;
b) amelyeknek az *y* tengelytől vett távolsága 3 egységnél nem nagyobb;
c) amelyekre egyszerre teljesül az a) és a b) feladat feltétele!
Milyen ponthalmazt kaptunk a c) részben?

9. Írjuk le szavakban, milyen ponthalmazt ábrázolnak a rajzokon a kékkel jelölt síkrészek!



3.18. ábra Ponthalmazok

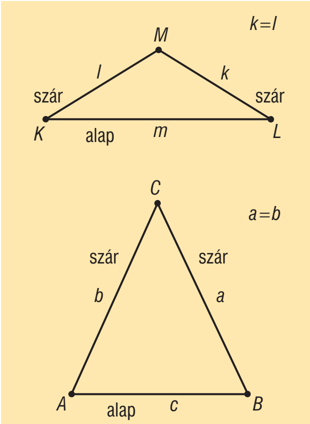
4. Speciális sokszögek

Osztályozzuk a háromszögeket!
Már láttuk, hogy a háromszöget egyértelműen meghatározza három oldalának hossza. Így speciális háromszögekhez jutunk, ha az oldalak között vannak egyenlők.

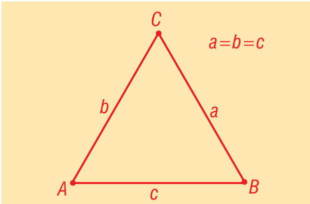
Azt a háromszöget, amelynek van két egyenlő oldala, **egyenlő szárú háromszög**nek nevezzük. A két egyenlő oldal a két **szár**, a harmadik pedig az **alap**. A szárak által közbezárt szög a **szárszög**. (Az egyenlő szárú háromszögnek akár mindhárom oldala is lehet egyenlő hosszú.)

Azt a háromszöget, amelynek mindhárom oldala egyenlő hosszúságú, **egyenlő oldalú** vagy más néven **szabályos** háromszögnek nevezzük.

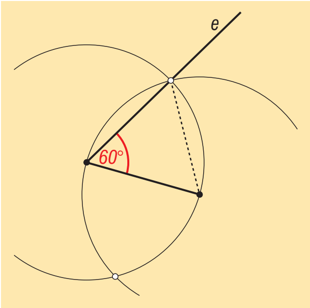
Vegyük észre, hogy ha az oldalainak a segítségével szerkesztjük meg a szabályos háromszöget, akkor ugyanahhoz az ábrához jutunk az *AB* oldalból kiindulva, mint pl. a *BC* oldalból kiindulva! Így éppen az oldalak egyenlősége miatt természetes, hogy minden egyes oldallal szemközt ugyanakkora szög áll. S mivel a három egyenlő nagyságú belső szög összege 180°, így a szabályos háromszög minden belső szöge 60°-os. Ha már ezt tudjuk, könnyen végrehajthatjuk a következő szerkesztést.



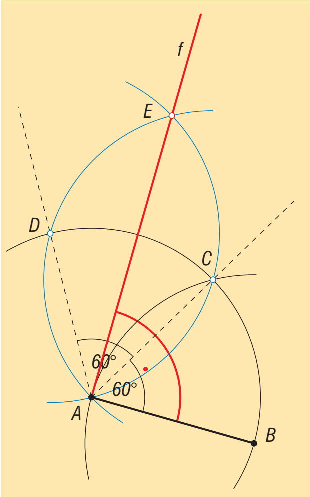
4.1. ábra Egyenlő szárú háromszög



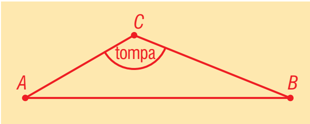
4.2. ábra Szabályos háromszög



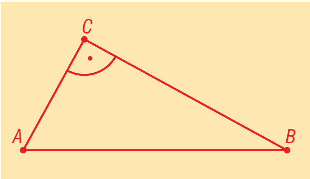
4.3. ábra 1. példa



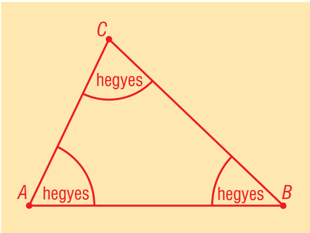
4.4. ábra 2. példa



4.5. ábra Tompaszögű háromszög



4.6. ábra Derékszögű háromszög



4.7. ábra Hegyesszögű háromszög

1. példa Szerkesszünk 60°-os szöget!

Megoldás:
Szerkesszünk tetszőleges oldalhosszúsággal szabályos háromszöget! Vagyis vegyünk egy tetszőleges hosszúságú szakaszt (*AB*), majd mindkét végpontja körül húzzunk ugyanilyen sugarú köríveket! A körívek valamelyik metszéspontját kössük össze a szakasz egyik végpontjával (*e*)! Az *e* egyenes az *AB* szakasszal 60°-os szöget zár be. (A háromszög harmadik oldalát már nem is kell meghúznunk.) (4.3. ábra)

2. példa Szerkesszünk derékszöget a 60° szerkesztésének ismeretében!

Megoldás:
Használjuk ki, hogy $90° = 60° + 60° : 2$! Ezért a szerkesztést elvégezhetjük úgy, hogy egymás mellé szerkesztünk két 60°-os szöget, majd a másodikat megfelezzük.

- *A* körül *AB* sugarú körív.
- *B* körül *AB* sugarú körív, a két körív metszéspontja *C*. (Az *AC* egyenes adná a 60° másik szárát, de az egyenest nem muszáj meghúznunk.)
- *C* körül *AB* sugarú körív, metszéspontja az *A* körüli körívvel *D*. (Az *ACD* háromszög is szabályos, így megvan a második 60°, amelyet most még meg kell feleznünk.)
- Felezzük meg a *CAD* szöget, vagyis a *C* középpontú *AB* sugarú kört metsszük el egy *D* középpontú *AB* sugarú körívvel! Az egyik metszéspont természetesen az *A* pont lesz, a másikat nevezzük *E*-nek!

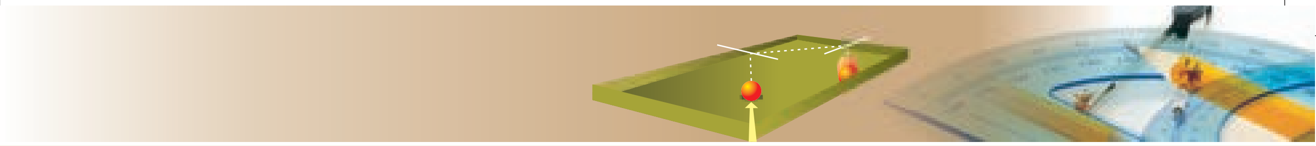
A *CAE* szög 30°-os, így a *BAE* szög nagysága 60° + 30° = 90°.
Ha elég ügyesek vagyunk, összesen csak négy azonos sugarú körívet kell megrajzolnunk, míg eljutunk az *E* pontig. (4.4. ábra)

Vizsgáljuk meg ezek után, milyen lehet szögeit tekintve egy háromszög! Tudjuk, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°. Így az már biztos, hogy minden szögének 180°-nál kisebbnek kell lennie. Lehet-e két tompaszöge egy háromszögnek? Gyorsan megadhatjuk a nemleges választ, hiszen a tompaszögek nagysága egyenként 90°-nál nagyobb, így két tompaszög összege 180°-nál nagyobb lenne. Ugyanígy két derékszöge sem lehet egy háromszögnek. Ezek alapján a háromszögeket osztályozhatjuk a legnagyobb szögük nagysága szerint is.

Tompaszögűnek nevezzük azt a háromszöget, amelynek a legnagyobb szöge tompaszög. (Másként: amelynek van egy tompaszöge.) (4.5. ábra)

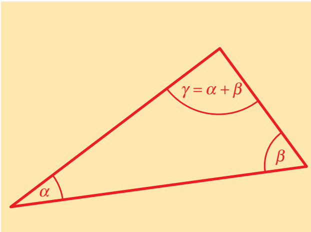
Derékszögűnek nevezzük azt a háromszöget, amelynek a legnagyobb szöge derékszög. (Másként: van egy derékszöge.) (4.6. ábra)

Hegyesszögűnek nevezzük azt a háromszöget, amelynek a legnagyobb szöge(i) hegyesszög(ek). (Másként: minden szöge hegyesszög.) (4.7. ábra)



3. példa Mit mondhatunk arról a háromszögről, amelyről tudjuk, hogy egyik belső szögének nagysága egyenlő a két másik belső szögének összegével?

Megoldás:
Jelölje a háromszög legnagyobb szögét γ, a két kisebbet α és β! Tudjuk tehát, hogy $\gamma = \alpha + \beta$, de azt is, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Így $\alpha + \beta$ helyére írhatunk γ-t a második összefüggésben: $\gamma + \gamma = 180°$, vagyis $\gamma = 90°$. A háromszög tehát derékszögű. (A két kisebb szögről és az oldalak hosszáról semmit nem tudunk.)



4.8. ábra 3. példa

Nézzük most a négyszögeket!

4. példa Ismerjük egy négyszög négy oldalának hosszát. Meghatározzák-e egyértelműen a négyszöget ezek az adatok? (Legyenek ezek az oldalak 6, 6, 8 és 4 egységnyi hosszúságúak!)

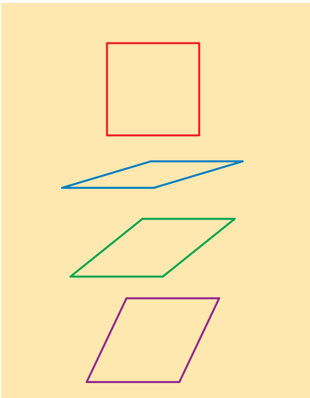
Megoldás:
Először is: még azt sem tudjuk, milyen sorrendben követik egymást az oldalak, tehát a példa megoldása már emiatt sem egyértelmű. Másodszor: ha megállapodnánk is abban, hogy az oldalak sorrendje egyezzen meg a felsorolás sorrendjével, akkor is végtelen sokféle ilyen négyszöget tudnánk előállítani. Gondoljunk pl. a fémépítőre: négy meghatározott hosszúságú lapocskát lazán összecsavarozva még csak „csuklós" négyszöghöz jutunk. (Akár konkáv is lehet.) (4.9. ábra)


4.9. ábra Ugyanolyan oldalhosszúságú négyszögek fémépítőből

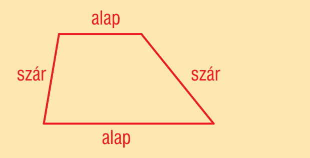
Tehát az oldalak ismeretében nem tudjuk egyértelműen előállítani a négyszöget.

5. példa Tudjuk, hogy egy négyszög minden oldala egyenlő hosszúságú, 5 cm-es. Ez meghatározza-e már egyértelműen a négyszöget?

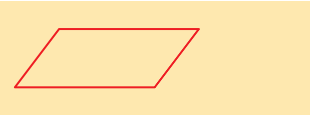
Megoldás:
A fémépítőből készült négyszög még mindig össze tud csuklani a kezünkben. A négyszög nem egyértelműen meghatározott. De a kép már nem olyan változatos, mint az előző esetben. Az így kapott négyszögek a rombuszok.


4.10. ábra Rombuszok

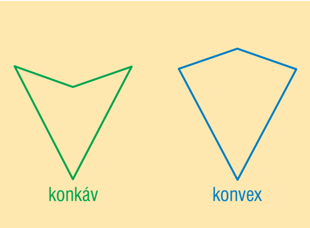
Azt a négyszöget, melynek minden oldala egyenlő hosszúságú, **rombusznak** nevezzük.



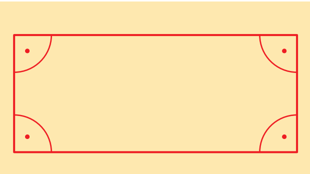
4.11. ábra Trapéz



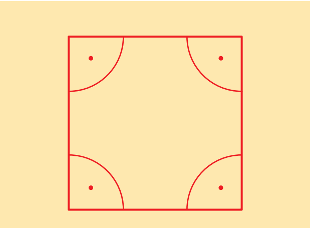
4.12. ábra Paralelogramma



4.13. ábra Deltoidok



4.14. ábra Téglalap



4.15. ábra Négyzet

Más speciális négyszögeket is megismertünk általános iskolában.
Azt a négyszöget, melynek van két párhuzamos oldala, **trapéz**nak nevezzük. (4.11. ábra)
Azt a négyszöget, melynek két-két szemközti oldala párhuzamos, **paralelogrammá**nak nevezzük. (4.12. ábra)
Azt a négyszöget, melynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú, **deltoid**nak nevezzük. A deltoid lehet konkáv is és konvex is. (4.13. ábra)

6. példa Igaz-e, hogy ha egy négyszög minden szöge egyenlő, akkor az paralelogramma?

Megoldás:
A négyszög négy belső szögének összege $(4-2)\cdot 180° = 360°$. Így ha minden szöge egyenlő, akkor az csak derékszög (90°) lehet. Vagyis a vizsgált négyszög téglalap. De az is teljesül rá, hogy a két-két szemközti oldala párhuzamos, tehát az is igaz, hogy paralelogramma.

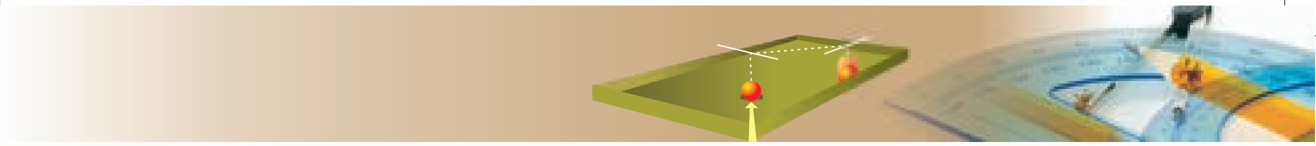
Azt a négyszöget, melynek minden szöge derékszög, **téglalap**nak nevezzük. (4.14. ábra)

Azt a négyszöget, melynek minden szöge egyenlő és minden oldala egyenlő, **négyzet**nek nevezzük. (4.15. ábra)

A négyzet minden felsorolt speciális (konvex) négyszög tulajdonságait hordozza, így megállapítható, hogy a négyzet speciális trapéz (hiszen van két párhuzamos oldala), speciális paralelogramma (hiszen két-két szemközti oldala párhuzamos), speciális deltoid (hiszen két-két szomszédos oldala egyenlő), speciális téglalap (hiszen minden szöge egyenlő) és speciális rombusz (hiszen minden oldala egyenlő hosszú).

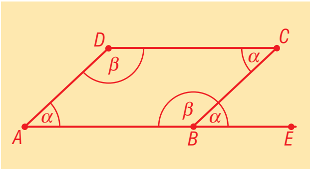
7. példa Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!
a) Minden rombusz paralelogramma.
b) Minden paralelogramma rombusz.
c) Minden téglalap trapéz.
d) Van olyan deltoid, amely paralelogramma.
e) Van olyan négyzet, amely trapéz.

Megoldás:
Mivel a rombusznak két-két szemközti oldala párhuzamos, ezért az a) állítás igaz. A b) viszont nem igaz, hiszen egy olyan paralelogramma, amelynek szomszédos oldalai nem egyenlő hosszúak, nem rombusz. Minden téglalapnak van két párhuzamos oldala, ezért trapéz. Tehát a c) állítás igaz. Egy olyan deltoid, melynek nemcsak két-két szomszédos oldala egyenlő, hanem mind a négy, egyben rombusz is, amely speciális paralelogramma. Tehát a d) állítás igaz. Az e) állítás első látásra furcsa. De mivel minden négyzetnek van két párhuzamos oldala, vagyis minden négyzet trapéz, így az is igaz, hogy van olyan négyzet, amely trapéz.
A helyes válaszok tehát sorban: I, H, I, I, I. (I: igaz, H: hamis.)



8. példa Egy paralelogramma egyik szöge 42°-os. Határozzuk meg a paralelogramma többi szögének nagyságát!

Megoldás:
Hosszabbítsuk meg az *AB* oldalt *B*-n túl, és vegyünk fel ezen a félegyenesen egy *E* pontot, amely a paralelogrammán kívül esik! (4.16. ábra) Az oldalak párhuzamossága miatt a *DAB* és a *CBE* szög egyállású szögek, így nagyságuk egyenlő (α). Ugyanígy α nagyságú a paralelogramma *C*-nél lévő szöge, hiszen az pedig váltószöge akármelyik előbb említett szögnek, és tudjuk, hogy a váltószögek nagysága is egyenlő. Tehát a paralelogramma szemközti szögei egyenlő nagyságúak. Ugyanakkor látjuk, hogy a *B* csúcsnál lévő α szög külső szöge a paralelogrammának, így a mellette lévő β belső szöget egyenesszögre egészíti ki. Vagyis $\alpha + \beta = 180°$. Eddigi megállapításaink szavakban kifejezve azt jelentik, hogy a paralelogramma egy oldalán fekvő két szög összege 180°, míg a szemközti szögeinek nagysága egyenlő. A feladatot általánosan oldottuk meg, eredményét a későbbiekben is használhatjuk. A konkrét válasz pedig ennek megfelelően: a paralelogramma szögei sorban 42°, 138°, 42° és 138°.



4.16. ábra 8. példa

9. példa Egy trapéz két szögének nagysága 50° és 76°. Állapítsuk meg a trapéz szögeinek nagyságát!

Megoldás:
Az alapok párhuzamossága miatt az előző példa módszerével megállapítható, hogy a trapéz egy száron fekvő szögei egyenesszögre egészítik ki egymást. (4.17. ábra)

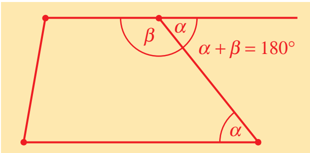
Az tehát biztos, hogy a két megadott szög nem közös száron nyugszik. De még mindig nem egyértelmű, hogy hol helyezkednek el. Vagy az egyik alap két végpontjában, vagy pedig szemközt egymással.

Az egyik esetben $\delta_1 = 180° - 76° = 104°$ és $\gamma_1 = 180° - 50° = 130°$.

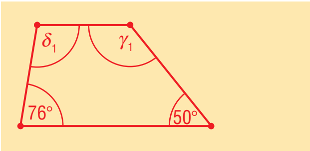
A másik esetben $\delta_2 = 180° - 76° = 104°$ és $\beta_2 = 180° - 50° = 130°$.

A szögek nagysága tehát mindkét trapéznál ugyanakkora, csak más sorrendben követik egymást. (4.18. és 4.19. ábra)

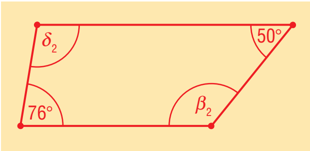
Megjegyzés: Egyik esetben sincs egyértelműen meghatározva a trapéz, hiszen nem tudjuk, milyen hosszúak az oldalai.



4.17. ábra 9. példa



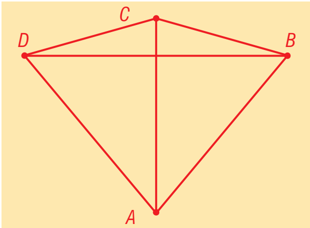
4.18. ábra Egyik eset



4.19. ábra Másik eset

10. példa Szerkesszünk deltoidot, ha adott két oldalának hossza: 4 cm és 6 cm, valamint az egyik átlójának hossza: 5 cm.

Megoldás:
A deltoid két-két szomszédos oldalának hossza egyenlő, a megadott oldalak viszont különböző hosszúságúak, így a 4 cm-es és a 6 cm-es oldalból is kettőnek kell lennie.

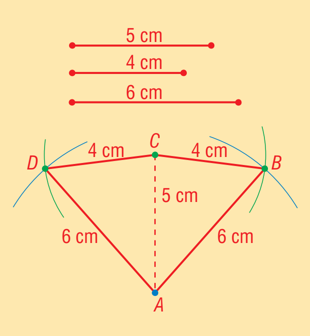


4.20. ábra Vázlat a 10. példához

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 177 2012.06.25. 14:39:34

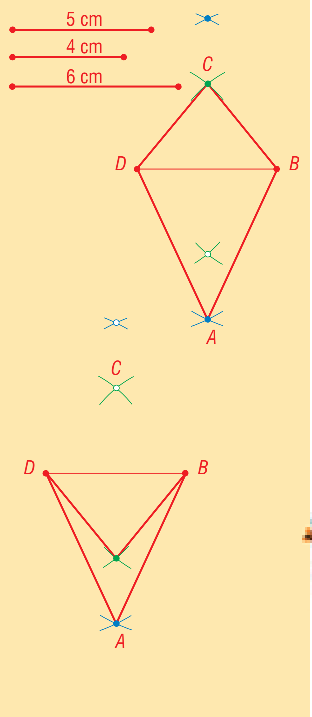
Készítsünk vázlatrajzot, amely egy kész deltoid képét ábrázolja! (4.20. ábra)
Tudjuk tehát, hogy $AB = AD$ és $BC = DC$, de nem tudjuk, hogy melyik átló hossza az 5 cm. Mindkét lehetőség elképzelhető.

- Ha az AC átló hossza az 5 cm, akkor kezdhetjük ennek az átlónak a felvételével a szerkesztést. Erre megszerkeszthetjük az AC szakasz mindkét oldalán a szükséges háromszögeket: az ACB és az ACD háromszöget, hiszen ezeknek ismerjük az oldalait (4 cm és 6 cm). (4.21. ábra)



4.21. ábra Egyik lehetőség

- Ha a BD átló hossza az 5 cm, akkor is ezzel az ismert hosszú átlóval kezdjük, csak ekkor erre egy 4 cm szárhosszúságú egyenlő szárú háromszöget és egy 6 cm szárhosszúságú egyenlő szárú háromszöget kell szerkesztenünk. Itt további két eset adódik: lehet a két háromszög a BD átló két különböző oldalán (konvex deltoid) és a BD átló egyazon oldalán (konkáv deltoid). (4.22. ábra)

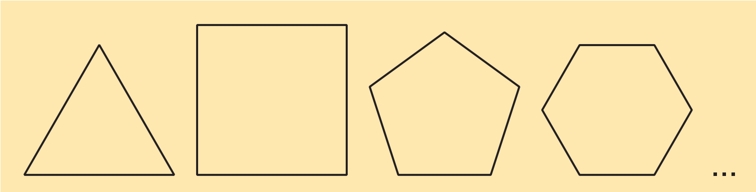


4.22. ábra A másik lehetőséghez további két deltoid tartozik

Vegyük észre, hogy az előző példa első esetében leírt szerkesztésből kitűnik, hogy mivel az AC átló mindkét oldalára ugyanazokból a hosszadatokból szerkesztettünk háromszöget, így a két háromszög megfelelő szögei is egyenlők lesznek! Eszerint a deltoid B és D csúcsánál lévő szögek egyenlők. Ehhez a megállapításhoz nem használtuk ki, hogy mekkorák voltak ezek a távolságok, tehát ez minden deltoidra érvényes.

Ahogy már a négyszögeknél sem volt elegendő azt mondani, hogy minden szög **vagy** minden oldal egyenlősége esetén négyzetet kapunk, úgy ez a többoldalú sokszögeknél sem elegendő a szabályossághoz.

Definíció Egy sokszöget **szabályos sokszög**nek nevezünk, ha minden oldala egyenlő hosszúságú és minden szöge egyenlő nagyságú.



4.23. ábra Szabályos sokszögek

11. példa Mekkorák a szabályos nyolcszög belső szögei?

Megoldás:
A nyolcszög belső szögeinek összege $(8-2)\cdot 180° = 1080°$. A szabályos nyolcszögnek nyolc egyenlő szöge van, így minden szögének nagysága: $\dfrac{1080°}{8} = 135°$.

4.24. ábra Ne csak a nyolcszög legyen szabályos!

Oldjuk meg!

1. Szerkesszünk 3 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöget! Milyen hosszú a hatszög leghosszabb átlója?

2. Egy deltoid három szögének az aránya 5:1:2. Mekkorák a deltoid szögei?

3. Egy paralelogramma egyik szöge 40°-kal kisebb egy másik szögénél. Mekkorák a paralelogramma szögei?

4. Hány fokos szöget zárnak be egymással a szabályos tizenkétszög szomszédos oldalai?

5. Egy rombusz egyik oldala a hosszúságú, egyik szöge kétszer akkora, mint egy másik szöge. Milyen hosszú a rombusz rövidebbik átlója, és hány fokos szöget zár be az oldalakkal?

6. Hány oldalú az a szabályos sokszög, amelynek egy belső szöge 160°-os?

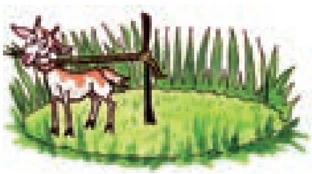
7. Hány különböző síkidomot tudunk előállítani a) 2; b) 3; c) 4 darab azonos oldalhosszúságú szabályos háromszögből, ha a háromszögeknek teljes oldalukkal kapcsolódniuk kell egymáshoz? Rajzoljunk le minden lehetséges síkidomot, és amit tudunk, azt nevezzük meg!

5. A kör és részei

A II. pun háború idején a rómaiak megtámadták Szirakuza városát, de Arkhimédész találmányainak köszönhetően két évig nem tudták bevenni azt. Arkhimédész az ókori Görögország egyik legnagyobb matematikusa és fizikusa volt. Végül árulás segítségével bevették a várost a rómaiak. Arkhimédész találmányaival akkora tiszteletet vívott ki magának, hogy a rómaiak hadvezére, Marcellus parancsba adta, hogy kíméljék a tudós ellenfél életét. Egy római harcos mégis leszúrta a 75 éves Arkhimédészt, aki matematikai problémáiban volt elmerülve. Talán felingerelte a katonát azzal, hogy amikor az a homokba rajzolt ábrát összetaposta, a tudós rászólt: „Noli turbare circulos meos!” (Ne zavard köreimet!) Marcellus a gyilkost megbüntette, és Arkhimédészt tisztességgel eltemettette, kívánsága szerint sírkövére vésette a hengerbe írt gömb és kúp körvonalait, legkedvesebb tételének ábráját. A tétel szerint az egyenlő alapú és magasságú kúp, félgömb és henger térfogatainak aránya 1:2:3.

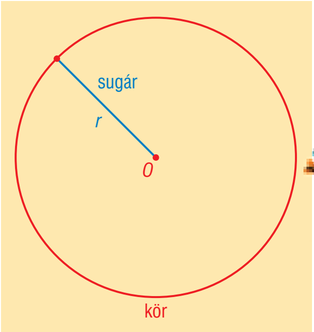
A történet több mint kétezer éves, ám a kör fogalma ennél sokkal-sokkal régebbi. Gondoljunk bele, hogy több százezer évvel ezelőtti őseink ugyanazt a „kerek” Napot látták, ugyanazt a „kerek” Holdat csodálták holdtöltekor, ugyanúgy körbeülték a tüzet, mint a mai kor embere. A körnek mindig is mély filozofikus tartalmat tulajdonítottak. Jelképezi a tökéletességet, az egységet. Számtalan körjátékban ismétlődik ezer évek óta, hogy a körben álló emberek bezárják, és egyúttal befogadják a kör közepén állót a közösségbe.

5.1. ábra Arkhimédész (Kr. e. 287–212)



5.2. ábra Ez jólesett!

Az emberiség technikai fejlődését lépésről lépésre segítették elő a különböző találmányok. Közülük néhány forradalmasította a fejlődést. Talán az első ilyen kiugró jelentőségű találmány a kerék volt. Megint a kör…

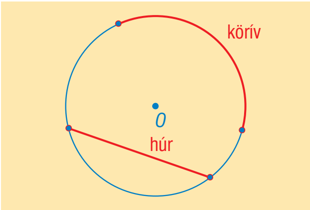


5.3. ábra A kör

Érdemes tehát nekünk is egy kis figyelmet szentelnünk a körnek! Azt az elvonatkoztatott fogalmat, amelyet a matematikusok körnek neveznek, a következőképpen definiáljuk.

Definíció A **kör** azon pontok halmaza a síkban, amelyek a sík egy adott pontjától adott egyenlő távolságra vannak. (Másként körvonalnak is nevezzük.)

Az adott pontot a **kör középpontjának**, az adott távolságot a **kör sugarának** nevezzük. A sugár jelölésére a latin radius szó rövidítéseként többnyire az *r* betűt használjuk.

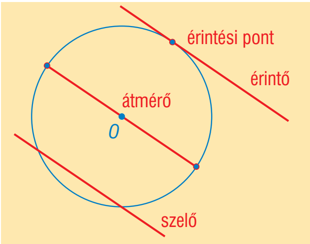


5.4. ábra Körív és húr

A definíciót leírhatjuk halmazelméleti jeleinkkel is:

$$\{P \in S \mid PO = r \text{, ahol } O (\in S) \text{ és } r > 0 \text{ adott}\}.$$

1. példa Az 5.4-5.7. ábrákon megjelöltük a kör bizonyos részeit vagy egy-egy körhöz kapcsolódó ponthalmazt. Hogyan magyaráznánk el szavakban, melyik ponthalmaz mit jelent?

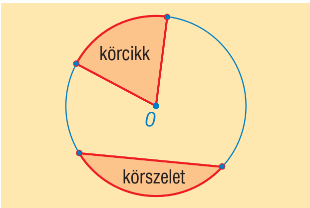


5.5. ábra Érintő, szelő, átmérő

Megoldás:

Figyeljünk a szöveges leírásnál arra, hogy valamilyen vonalról vagy síkrészről van-e szó!

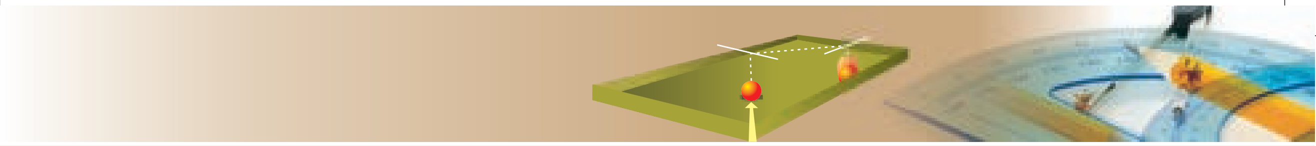
- **Körív:** a körvonalnak a körvonal két pontja közé eső darabja. Az 5.4. ábrán a kisebb darabot jelöltük meg, de a nagyobbikat is körívnek nevezzük.
- **Húr:** a körvonal két pontját összekötő szakasz.
- **Átmérő**: olyan húr, amely tartalmazza a kör középpontját. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy a leghosszabb húr. Hossza éppen két sugárnyi. Jelölésére általában a *d* (diameter) betűt használjuk.



5.6. ábra Körcikk, körszelet

- **Szelő:** olyan egyenes, amelynek a körrel két közös pontja van. Másként: a kört metsző egyenes.
- **Érintő:** olyan egyenes a kör síkjában, amelynek a körrel egy közös pontja van.
- **Érintési pont:** az érintőnek és a körnek a közös pontja.
- **Körcikk:** egy körív és a körív két végpontjához tartozó sugár által közrezárt síkrész.
- **Körszelet:** egy körív és a körív két végpontját összekötő húr által közrezárt síkrész.
- **Körlap:** mondhatnánk, hogy a körvonal által bezárt síkrész, de inkább az eredeti kördefiníció alapján szoktuk meghatározni ezt a fogalmat. A körlap azon pontok halmaza a síkban, amelyek a sík egy adott pontjától adott távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.

5.7. ábra Zárt körlap

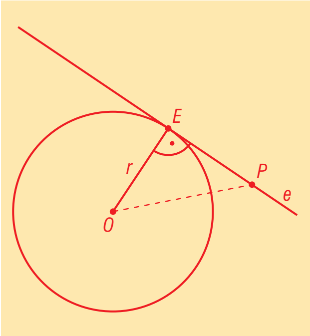


Ez a meghatározás pontosabban a **zárt körlap** fogalmát írja le, amelyhez tehát a körlapot mintegy lezárva maga a körvonal is hozzátartozik. (**Nyílt körlap**on csak a körvonalon belüli síkrészt értjük, tehát maga a körvonal nem tartozik hozzá.)

2. példa Mutassuk meg, hogy a kör érintője merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra!

Megoldás:
A körvonalon kívül elhelyezkedő pontok mind nagyobb távolságra vannak a kör középpontjától, mint a körvonal pontjai. Ez az *e* érintőnek az *E*-től különböző *P* pontjaira is vonatkozik: $OP > r$.

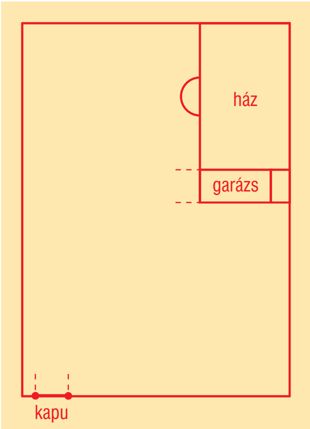
Az érintő egyenesnek tehát az érintési pontja (*E*) van a legközelebb a kör középpontjához. Így az *O* pont és az *e* egyenes távolsága az *OE* sugár hossza. Vagyis az érintő egyenes érintési pontjához tartozó sugár merőleges az érintőre.



5.8. ábra Érintő és sugár kapcsolata

3. példa Adott egy kör. Szerkesszünk érintőt a körhöz a körvonal egy megadott pontjában!

Megoldás:
Az előző példa alapján egyszerű dolgunk van. Kössük össze a megadott pontot a kör középpontjával, és erre a sugárra a megadott pontban állítsunk merőlegest! Ez a merőleges lesz a kör adott pontbeli érintője.

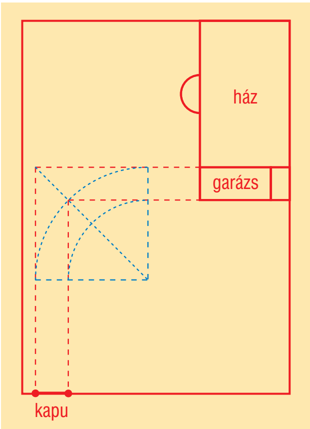


5.9. ábra Az udvar

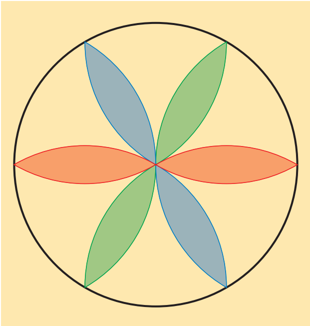
4. példa A Hegedűs család nemrég építkezett. Most szeretnék elkészíteni a bekötőutat a kaputól a garázsajtóig. A kerítés és a ház elhelyezkedése az 5.9. ábrán látható. Segítsünk megoldani nekik ezt a problémát!

Megoldás:
A kapun nyilván a kapu vonalára merőlegesen megy be a kocsi, és a garázsba is szemből érdemes érkezni. A lehető legegyszerűbb, ha a kaputól induló hosszabb egyenes utat egy köríves rész vezeti át a garázsba befutó szakaszig. Mivel ez a gyakorlati probléma nem igényel nagy matematikai precizitást, ezért elegendő hozzá pl. két bot és egy azokat összekötő, elég hosszú madzag. Ha az egyik botot jó helyre leszúrjuk, már húzhatjuk is a körívet a kifeszített madzag túlsó végén a másik bottal. Már csak azt kell kitalálni, hol legyen az a „jó hely”.

Egy körív középpontját keressük. Ennek a pontnak egyenlő távol kell lennie a két útszakasztól. Ha egészen pici ívben is tudna kanyarodni a kocsi, akkor gondolatban meghosszabbítanánk a kaputól jövő és a garázstól jövő útszakaszt, és valahol a metszéspontjuk közelében szúrnánk le a botot. De mivel a kocsi csak nagyobb ívben tud kanyarodni, ezért elindulunk ettől a képzeletbeli metszésponttól olyan irányba, hogy továbbra is egyenlő távol legyünk a két útszakasztól. Ha már elég nagynak látszik a távolság, akkor nyugodtan szúrjuk le a botot, és rajzoljuk meg a madzag másik végén lévő bottal a körívet! (5.10. ábra)



5.10. ábra A terv



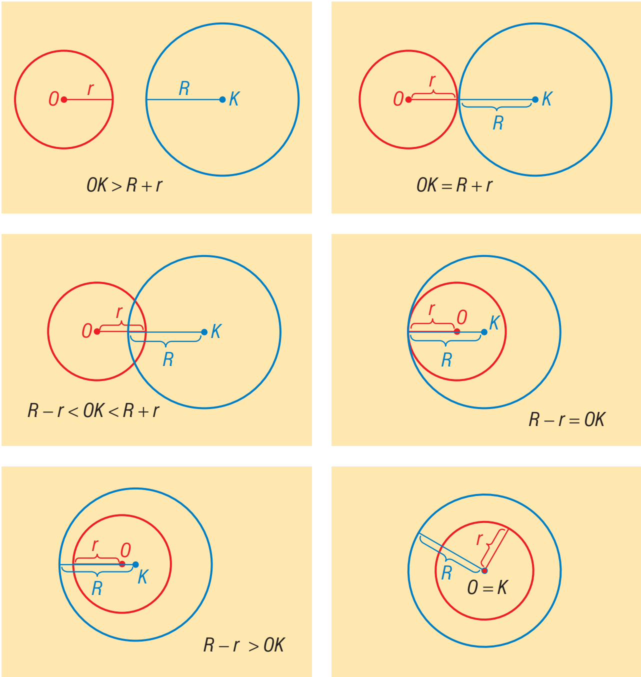
5.11. ábra Körzőrajz

Megjegyzés:
Hegedűsék hamarosan rájöttek, hogy célszerű a kanyarrészt kibővíteni, mert nem túl kényelmes ugyanezen az úton kifarolni.

Vegyük észre, hogy az előbbi példában két (egymásra merőleges) egyeneshez közös érintő kört szerkesztettünk!

Vizsgáljuk meg, hogy két kör hogyan helyezkedhet el egymáshoz képest! Jelöljük az egyik kör középpontját *O*-val, sugarát *r*-rel, a másik kör középpontját *K*-val, sugarát *R*-rel! Világos, hogy ha a két kör nem esik egybe, akkor vagy 2 közös pontjuk van (metszik egymást), vagy 1 közös pontjuk van (érintik egymást), vagy nincs közös pontjuk.

Az is természetes, hogy adott köröknél ez a középpontjaik távolságán múlik.



5.12. ábra Körök közötti kapcsolat

A legutolsó esetben a két kör középpontja egybeesik, ezeket koncentrikus (egyközepű) köröknek nevezzük.

Az érintésnek pedig két fajtáját is megfigyelhetjük: ahogy közelítjük egymáshoz a két kör középpontját, először a külső, utána a belső érintés esetét.

5.13. ábra Keressünk koncentrikus köröket az ábrán!

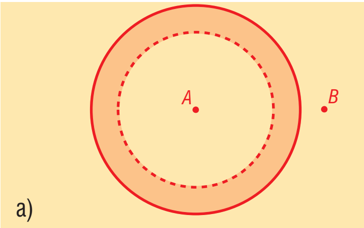
Vegyük észre, hogy két érintő kör középpontja és az érintési pont egy egyenesbe esik külső és belső érintéskor is! (Ilyenkor a két kör érintési pontjában közös érintő egyenes húzható a két körhöz.)

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 182 2012.06.25. 14:40:12

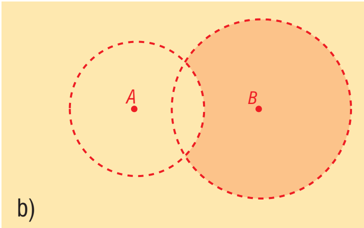
5. példa Az *A* és a *B* pont 5 cm-re fekszik egymástól.
Mi azon pontok halmaza a síkban, amelyek
a) *A*-tól 3 cm-nél nagyobb, de 4 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak;
b) *A*-tól 3 cm-nél nagyobb, és *B*-től 4 cm-nél kisebb távolságra vannak;
c) *A*-tól 4 cm-nél nem nagyobb, és *B*-től 2 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak;
d) *A*-tól 1 cm-nél kisebb, *B*-től 3 cm-nél kisebb távolságra vannak;
e) *A*-tól 1 cm-nél nem kisebb, *B*-től 7 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak?
A megoldásokat rajzzal szemléltessük!

5.14. ábra Napfogyatkozás

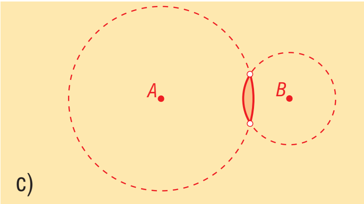
Megoldás:
Ha egy körvonal hozzátartozik a keresett ponthalmazhoz, akkor azt folyamatos vonallal rajzoljuk meg, ha nem tartozik hozzá, akkor azt szaggatott vonallal rajzoljuk meg.



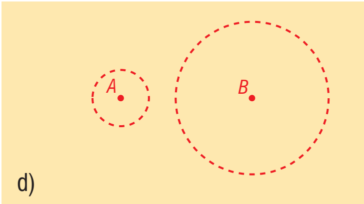
5.15. ábra A két körvonal közötti rész a megoldáshalmaz



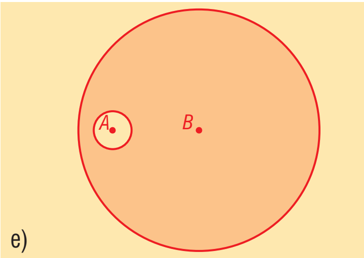
5.16. ábra A *B* középpontú, 4 egység sugarú kör belsejének az *A* középpontú, 3 egység sugarú körön kívül eső része



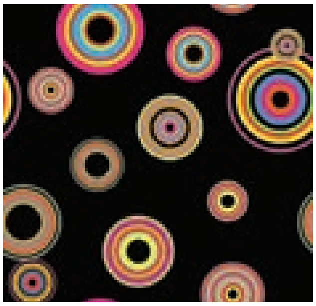
5.17. ábra A két körív közé eső síkrész



5.18. ábra Nincs ilyen pont. A keresett halmaz üres halmaz



5.19. ábra Itt a kis *A* középpontú körbe nem tartozó, de a *B* középpontúba beletartozó pontok adják a megoldást



5.20. ábra Koncentrikus körök egy textilmintán

Oldjuk meg!

1. Szerkesszünk egy megadott körhöz egy adott egyenessel párhuzamos érintőt!

2. Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza 3 cm és 5 cm. Szerkesszünk olyan kört, amely a téglalapnak három oldalát érinti! Hány megoldás van?

3. Hogy tudnánk jellemezni a sík azon pontjait, amelyek a sík egy *O* pontja körül rajzolt 12 cm és 15 cm sugarú körvonal közé esnek?

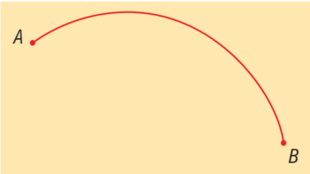
4. Egy kecskét 8 méter hosszú kötéllel kötnek ki legelni. Majd mikor már ezt a területet lelegelte, odébb viszik a karót 12 méterrel. Milyen alakú területet tud lelegelni az új helyen a kecske? Szerkesszünk méretarányos ábrát!

5. Adott egy 5 cm sugarú kör. Mi azon 2 cm sugarú körök középpontjának halmaza, amelyeknek nincs közös pontja a megadott körrel?

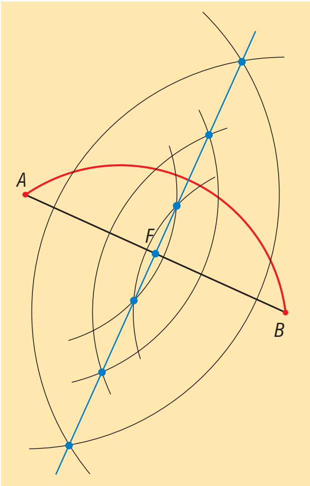
6. Egy szakasz két végpontja köré szerkesszünk a) egyenlő sugarú érintő köröket; b) olyan érintő köröket, amelyek sugarának aránya 1:3! Hány megoldást találunk az egyes esetekben?

7. Egy háromszög csúcsai köré szerkesszünk olyan köröket, amelyek páronként érintik egymást! Minden háromszög esetén megoldható-e a feladat? Hány megoldás van?

6. A háromszög köré írható kör



6.1. ábra Körív



6.2. ábra *A* és *B* ponttól egyenlő távolságra lévő pontok

Az előző leckében ígéretet tettünk, hogy visszatérünk a következő problémára.

1. példa Szerkesszük meg egy adott körívnek a középpontját!

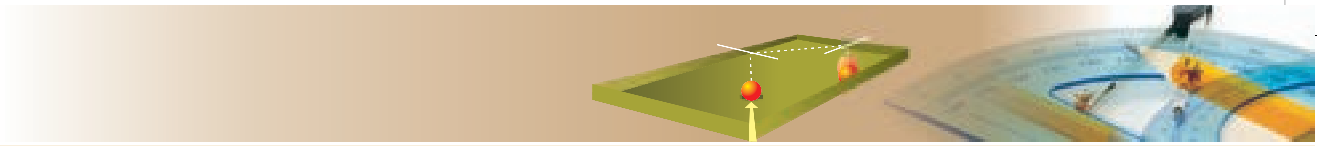
Megoldás:
A körív két végpontja egyenlő távol van a kör középpontjától. Keressünk olyan pontokat, amelyek egyenlő távolságra vannak az *A* és a *B* ponttól!

Egy ilyen pontot biztosan találunk: az *AB* szakasz felezőpontját (*F*). Ezenkívül olyan egyenlő szárú háromszögek harmadik csúcsát kell megszerkesztenünk, melyeknek az *AB* szakasz az alapja. Vegyünk föl néhány lehetséges szárhosszúságot – csak arra kell figyelnünk, hogy ezek az *AB* szakasz felénél hosszabbak legyenek. Majd szerkesszük meg a harmadik csúcsok helyét!

Az egyenlőszárú háromszögeket nem érdemes megrajzolnunk, hiszen itt most a szárukra semmi szükségünk sincs. A keresett pontokat az ábrán kékkel jelöltük. Észrevehetjük, hogy az összes megszerkesztett pont egy egyenesre esik. Sőt azt is, hogy ez az egyenes merőleges az *AB* szakaszra és (minthogy az *F* pont is rajta van) felezi azt. Ezt az egyenest az *AB* szakasz felezőmerőleges egyenesének nevezzük.

Az is természetesnek látszik, hogy ha ezen az egyenesen felveszünk egy tetszőleges pontot, az egyenlő távolságra lesz *A*-tól és *B*-től.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 184 2012.06.25. 14:40:20

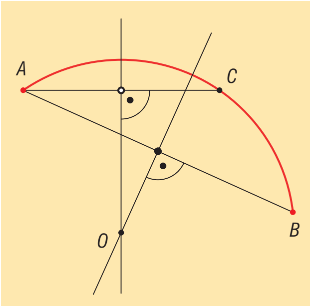


A kör középpontjának tehát rajta kell lennie az AB húr felezőmerőleges egyenesén.

De ezek szerint, ha ennek a körívnek egy másik húrját választjuk ki, akkor annak a felezőmerőlegesén is rajta kell lennie a kör középpontjának. Már csak arra kell ügyelnünk, hogy a másik húr ne legyen párhuzamos az előzővel.

Válasszunk ki a köríven pl. az A ponthoz egy B-től különböző másik pontot: C-t!

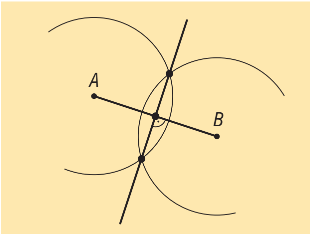
Az AB szakasz és az AC szakasz felezőmerőlegesének metszéspontjaként kapjuk az ívet tartalmazó kör középpontját. (6.3. ábra)



6.3. ábra A húrok felezőmerőlegesei átmennek a kör középpontján

Vegyük észre, hogy az előző megoldás során egy egyszerű eljárást találtunk egy szakasz felezőmerőleges egyenesének a megszerkesztésére!

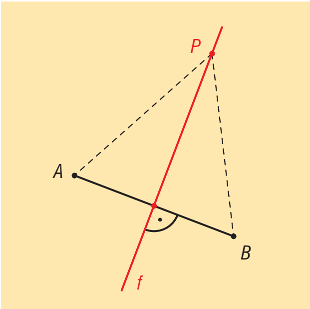
A szakasz végpontjai körül rajzoljunk egy-egy egyenlő sugarú kört ügyelve arra, hogy ez a sugár nagyobb legyen a szakasz hosszának felénél! A két kör két metszéspontját összekötő egyenes lesz a szakasz felezőmerőleges egyenese. Ezzel persze egyben a szakasz felezőpontját is megtaláltuk. (6.4. ábra)



6.4. ábra Szakasz felezőmerőlegesének szerkesztése

Fontos összefüggésre bukkantunk az előző példa megoldása során.

Tétel Azon pontok halmaza a síkban, amelyek egy szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak, a szakasz felezőmerőleges egyenese.



6.5. ábra $P \in f \Leftrightarrow PA = PB$

Figyeljünk erre a megfogalmazásra, hogy „azon pontok halmaza”! Ezzel ugyanis még sokszor fogunk találkozni. Két dolgot jelent egyszerre. Itt most a következő kettőt.

Az egyik: ha egy pont rajta van egy szakasz felezőmerőlegesén, akkor egyenlő távol van a szakasz két végpontjától.

Ha $P \in f$, akkor $PA = PB$.

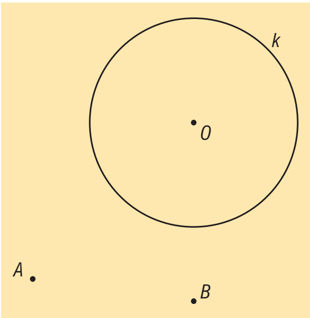
A másik: ha egy pont egyenlő távol van egy szakasz két végpontjától, akkor rajta van a szakasz felezőmerőleges egyenesén.

Ha $PA = PB$, akkor $P \in f$.

(Ez utóbbit másként úgy is mondhatnánk, hogy ha egy pont nincs rajta a szakasz felezőmerőlegesén, akkor nem egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától.

Ha $P \notin f$, akkor $PA \neq PB$.)

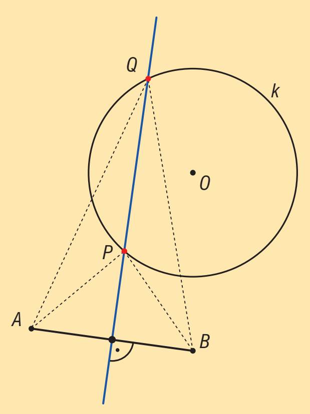
2. példa A 6.6. ábrán látható k körnek mely pontjai vannak egyenlő távolságra az A és a B ponttól? Szerkesszük meg ezeket a pontokat!



6.6. ábra 2. példa

Megoldás:

Az A és B ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőlegese. Ezen tehát rajta kell lenniük a keresett pon-

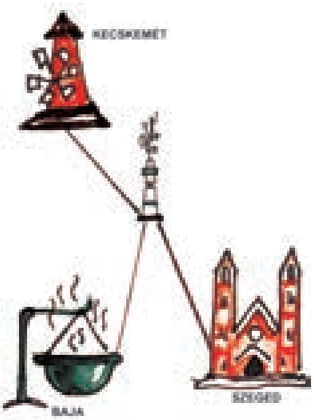


6.7. ábra 2. példa megoldása

toknak. Ugyanakkor a körvonal pontjai közül szeretnénk választani. A megoldás tehát: az AB szakasz felezőmerőlegesének és a körvonalnak a metszéspontjai. Az ábrán a P és a Q pont. (6.7. ábra)

Megjegyzés: A pontok és a kör adott elhelyezkedése mellett két pontot találtunk, amely megfelel a feladat feltételeinek. Gondoljunk bele, hogy a megoldások száma attól függ, hogy a felezőmerőleges egyenesnek és a körnek hány közös pontja van! Így a kör és az adott pontok más elrendeződése esetén lehetne egy megoldás is, sőt az is előfordulhatna, hogy egyáltalán nincs megoldás. (Rajzoljuk le az A és a B pontot, valamint a kört olyan elrendezésben, hogy ne legyen megoldása, illetve hogy egy megoldása legyen a feladatnak!)

3. példa Az Alföldön egy új tévétornyot szeretnének építeni, amely egyformán tudja besugározni Szegedet, Baját és Kecskemétet. Van-e olyan hely, amely a három várostól egyenlő távolságra van?



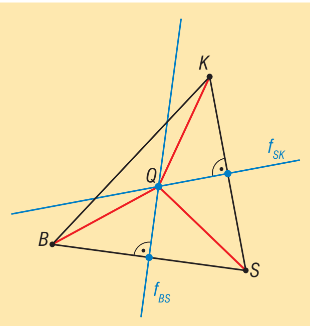
6.8. ábra Hol legyen a tévétorony?

Megoldás:

A városok közti nagy távolságok miatt pontszerűnek tekinthetjük a városokat. A feladat matematikai modellje tehát: adott három pont (S, B, K), van-e olyan pont a síkjukban, amely mindhárom ponttól egyenlő távolságra van? Ha van ilyen pont, akkor annak Szegedtől és Bajától is egyenlő távolságra kell lennie, vagyis a modellben az SB szakasz felezőmerőlegesén kell lennie. Ugyanez mondható el Szegedről és Kecskemétről is. A keresett pontnak tehát rajta kell lennie az SK szakasz felezőmerőlegesén is. Tehát ha van ilyen pont, akkor az csak a két felezőmerőleges metszéspontja lehet. (Mivel Szeged, Baja és Kecskemét nem esik egy egyenesbe, ezért a két felezőmerőleges biztosan nem párhuzamos, vagyis metszik egymást.) Jelöljük ezt a pontot Q-val. A Q pont tehát egyenlő távol van Bajától és Szegedtől, valamint Szegedtől és Kecskeméttől is. Tehát $BQ = QS = QK$. Így a Q pont egyenlő távol van Bajától és Kecskeméttől is.

Jelekkel leírva:
$$\left.\begin{array}{l} Q \in f_{BS} \;\Rightarrow\; QB = QS \\ \qquad\quad \text{és} \\ Q \in f_{SK} \;\Rightarrow\; QS = QK \end{array}\right\} \Rightarrow\; QB = QK$$

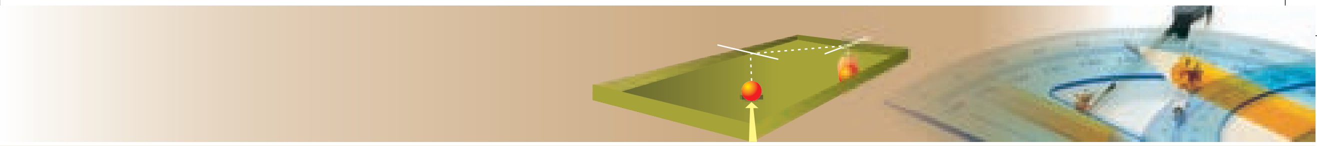
Van tehát olyan pont, amelyik mindhárom várostól egyenlő távolságra van. Keressük meg a térképen, hogy kb. hova esik ez a pont a valóságban!



6.9. ábra A három oldalfelező merőleges egy ponton megy át

Vegyük észre, hogy mivel a Q pont egyenlő távol van B-től és K-tól, így a Q pont rajta van a BK felezőmerőlegesén is! Vagyis a három felezőmerőleges egy pontban metszi egymást. Csak azt használtuk ki, hogy a B, az S és a K pont háromszöget alkot (vagyis nem esnek egy egyenesbe). A BS, az SK és a KB szakaszok a háromszög oldalai; ezen szakaszok felezőmerőlegesei pedig a háromszög oldalainak felezőmerőlegesei, röviden **oldalfelező merőlegesek**.

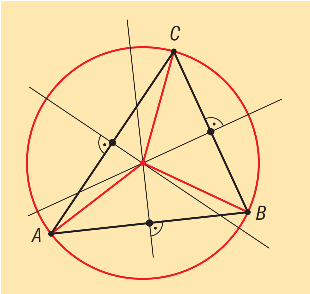
Azt is észrevehetjük, hogy mivel a Q pont egyenlő távol van a BSK háromszög mindhárom csúcsától, ezért egy Q középpontú QB sugarú kör mindhárom csúcson átmegy.



Definíció Az olyan kört, amely a háromszög minden csúcsán átmegy, a **háromszög köré írható körének** nevezzük.

Tetszőleges háromszögre igazoltuk tehát a következő tételt.

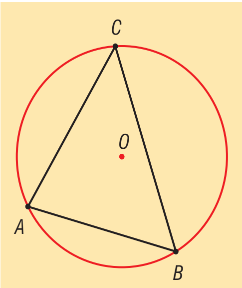
Tétel A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög köré írható körének a középpontja.



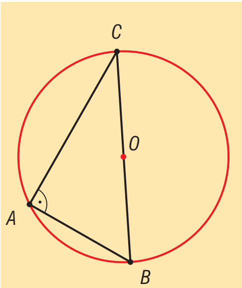
6.10. ábra A háromszög köré írható kör szerkesztése

Az előző példában leírtakból az is kiderül, hogy minden háromszögnek pontosan egy körülírt köre van.

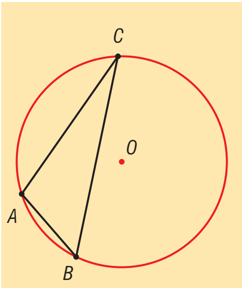
Figyeljük meg, hogy hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögek esetén hol helyezkedik el a háromszög köré írt kör középpontja!



6.11. ábra Hegyesszögű háromszögnél a háromszög belsejébe esik



6.12. ábra Derékszögű háromszögnél az átfogóra esik (így annak csak felezőpontja lehet)



6.13. ábra Tompaszögű háromszögnél a háromszögön kívülre esik

6.14. ábra Hogyan helyezkedhet még el a két tanya?

Oldjuk meg!

1. Az országúttól nem messze (néhány kilométernél nem távolabb) épült két tanya. A két tanyán élő családok közös postaládát szeretnének közvetlenül az országút mentén. Úgy egyeznek meg, hogy akkor a legigazságosabb a postaláda elhelyezése, ha egyenlő távolságra van mindkét tanyától. Ezen a szakaszon az országút egyenes. Szerkesszük meg, hova kerüljön a postaláda! A tanyák bármilyen elhelyezkedésénél megoldható-e a feladat?

2. A koordináta-rendszerben adott a $P(-8;\ 5)$ és a $Q(4;\ 11)$ pont. Melyik pont van egyenlő távolságra a P és a Q ponttól

a) az x tengelyen; b) az y tengelyen; c) a $(-4;\ 2)$ középpontú 5 egység sugarú körön?

Rajz segítségével határozzuk meg a keresett pontok helyét, majd olvassuk le a koordinátáikat!

3. Milyen nehézséget jelentene Berettyóújfalutól, Debrecentől és Nyírbátortól egyenlő távolságra tévétornyot építeni?

4. Szerkesszünk szabályos háromszöget, melynek oldalai 5 cm hosszúságúak! Szerkesszük meg a háromszög köré írt kört!

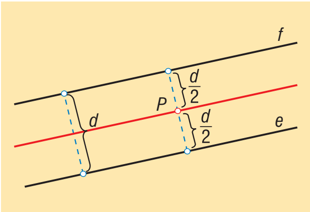
5. Hány olyan kör van, amely a) egy paralelogramma; b) egy téglalap; c) egy trapéz négy csúcsa közül legalább három csúcson átmegy?

7. A háromszögbe írható kör

Az előző leckében megtaláltuk azon pontok halmazát a síkban, amelyek a sík két adott pontjától egyenlő távolságra vannak. Vizsgáljunk meg most egy hasonló problémát: a két adott pont helyett két adott egyenessel!

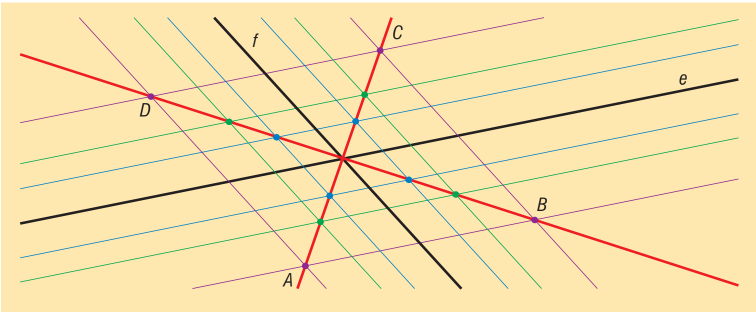
1. példa Mi azon pontok halmaza a síkban, amelyek két adott egyenestől egyenlő távolságra vannak?

Megoldás:
A síkon kétféleképpen helyezkedhet el két egyenes. Vagy párhuzamosak, vagy metszők. Ha a két egyenes párhuzamos, akkor a keresett pont nyilván csak a két egyenes között lehet. Jelöljük a két párhuzamos távolságát *d*-vel! Akkor lesz egy pont egyenlő távolságra mindkét egyenestől, ha ez a távolság $\frac{d}{2}$. Ami azt jelenti, hogy a keresett pontok egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos az adott egyenesekkel, és mindkettőtől $\frac{d}{2}$ távolságra halad. Ennek az egyenesnek minden pontja megfelelő, azaz egyenlő távolságra van a két adott egyenestől. Ezt a két párhuzamos egyenes **középpárhuzamos**ának is nevezzük.



7.1. ábra Középpárhuzamos

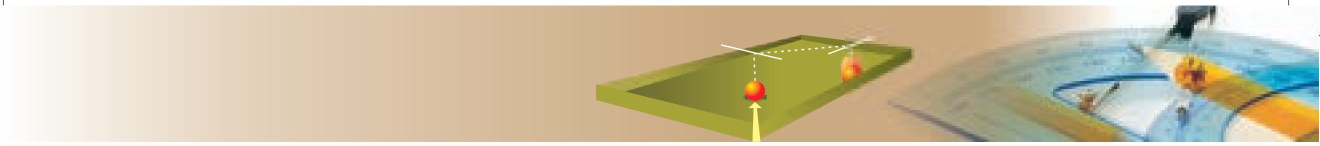
Abban az esetben, ha a két egyenes metsző, már oldottunk meg kicsit hasonló feladatot. Kerestük azokat a pontokat, amelyek mindkét egyenestől 2 cm-re vannak. (Mindkét egyenestől 2 cm-re párhuzamosokat húztunk, ezek metszéspontjai voltak a keresett pontok.) Ugyanezzel a módszerrel keressünk még olyan pontokat, amelyek mindkét egyenestől adott távolságra vannak (pl. 3 cm-re, 4,5 cm-re, tetszőlegesen felvett távolságra)!



7.2. ábra *e*-től és *f*-től egyenlő távolságra lévő pontok


7.3. ábra A szögfelező iránya

Azon pontok halmazát, amelyek egy adott távolságra vannak az *e* és az *f* egyenestől, egyformán színeztük. A metszéspontjukként keletkezett keresett pontokat – ezek adott egyenlő távolságra vannak mindkét egyenestől – pedig ugyanolyan színnel.



Vegyük észre, hogy az egyszínű pontok egy-egy rombusz csúcsai! (Pl. *ABCD*.) Sőt, az egyes rombuszok oldalai páronként párhuzamosak egymással, így egyenlők a szögeik is; középpontjuk pedig ugyanaz a pont. Vagyis a rombuszok átlói mind egy-egy egyenesbe esnek. Az *e* és az *f* egyenes metszéspontja szintén egyenlő távolságra van a két egyenestől, így az is eleme a keresett ponthalmaznak. Eddigi megfigyeléseink alapján észrevehető, hogy a keresett ponthalmaz két egyenes, amely felezi a két adott metsző egyenes (*e* és *f*) által bezárt szögeket.

7.4. ábra A káró is rombusz

Tétel Két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkjukban a két egyenes által meghatározott szögek szögfelező egyenesei.

Itt is két állítást fogalmaztunk meg egyszerre.

I. Ha egy pont rajta van a két egyenes által meghatározott szögek két szögfelezője közül valamelyiken, akkor a pont egyenlő távolságra van a két metsző egyenestől.

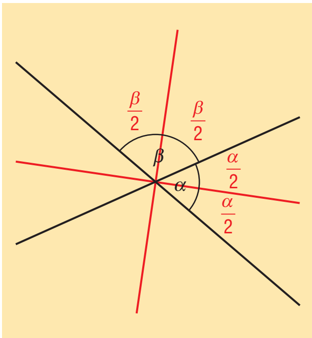
II. Ha egy pont egyenlő távolságra van két metsző egyenestől, akkor rajta van a két egyenes által meghatározott szögek valamelyik szögfelezőjén. (Hasonló megállapítást kerülgettünk az 5. leckében, amikor a garázsbejáró ívét próbáltuk elkészíteni.)

Természetesen egy konvex szög két szárától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a szögtartományban a szögfelező félegyenes.

2. példa Milyen szöget zár be egymással két metsző egyenes két szögfelező egyenese?

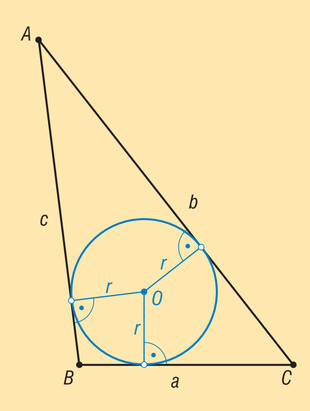
Megoldás:

A 7.5. ábrán is szépen látszik, de néhány további rajzzal megerősíthetjük a sejtésünket, hogy a két szögfelező egyenes merőleges egymásra. Valóban, hiszen az egyenesek által bezárt szomszédos szögek egyenesszögre egészítik ki egymást, vagyis $\alpha + \beta = 180°$, így a szögek felének összege: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, ami éppen a szögfelezők hajlásszöge.



7.5. ábra Nemcsak úgy látszik, valóban merőlegesek

3. példa A Maxim Vándorcirkusz járja az országot, minden héten más településen vernek sátrat. A sátor méreteit bizonyos keretek között tudják változtatni, de az alapjának mindenképpen kör alakúnak kell lennie. A következő településen viszonylag kicsi, háromszög alakú terület áll rendelkezésükre, ezért itt úgy kell felverniük a sátrat, hogy mindhárom oldalon a telek széléig érjen. Segítsünk nekik, hogy hova tegyék a sátor alapjának középpontját! (Az üres terület elég nagy ahhoz, hogy a sátrat felállítsák.)



7.6. ábra A háromszög mindhárom oldalát érintő kör

Megoldás:
Rajzoljuk, majd fogalmazzuk meg a problémát matematikai nyelven! Adott egy háromszög (*ABC*), és olyan kör középpontját keressük (*O*), amely a háromszög minden oldalát érinti. (7.6. ábra)

Ha van ilyen kör, akkor a középpontja sugárnyi távolságra van a háromszög mindhárom oldalától, hiszen korábban megállapítottuk, hogy az érintési ponthoz tartozó sugár merőleges az érintőre. Olyan pontot keresünk tehát, amely egyenlő távol van az *ABC* háromszög minden oldalától.

Azt már tudjuk, hogy azok a pontok, amelyek két oldalegyenestől vannak egyenlő távolságra, a két oldalegyenes által bezárt szög szögfelezőjén helyezkednek el. Így az *O* pontnak rajta kell lennie az α szög szögfelezőjén (f_α) is, és a β szög szögfelezőjén (f_β) is. A két szögfelező metszi egymást, csak ez a pont lehet az *O*. És ez valóban jó is, hiszen az *O* pont egyenlő távol van a *b* és a *c* oldalegyenestől, valamint a *c* és az *a* oldalegyenestől, vagyis a háromszög mindhárom oldalegyenesétől. A gondolatmenetből az is kiderül, hogy az *O* ponton kívül nincs más pont, amely mindhárom oldalegyenestől egyenlő távolságra lenne.

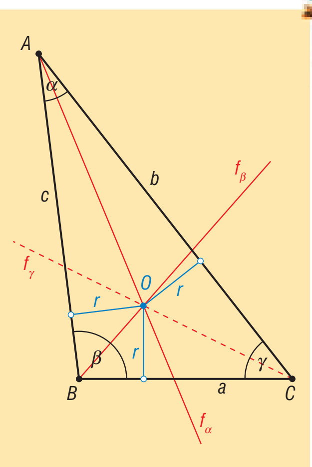
A cirkuszi sátor alapjának középpontját tehát úgy határozhatjuk meg a háromszög alakú telken, hogy megkeressük a háromszög valamelyik két szöge szögfelezőjének a metszéspontját.

Az előző példában találtunk egy olyan kört, amely érinti egy háromszög oldalait.

Definíció Egy olyan kört, amely érinti a háromszög mindhárom oldalát, a **háromszög beírt köré**nek (vagy **a háromszögbe írható kör**nek) nevezünk.

Foglalkoztunk még a háromszög belső szögeinek szögfelezőjével is, ezeket röviden a **háromszög szögfelezői**nek is mondjuk.

Vegyük észre, hogy mivel az *O* pont egyenlő távol van az *a* és a *b* oldaltól is, ezért rajta van a *C* csúcsból induló szögfelezőn $\left(f_\gamma\right)$-n is! (7.7. ábra)



7.7. ábra A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást

Az eddigiek alapján kimondhatjuk a következő tételt.

Tétel A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög beírt körének középpontja.

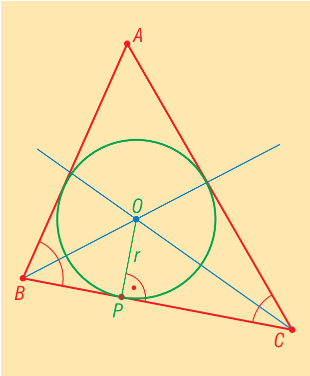
Az előző példában leírtakból az is kiderül, hogy minden háromszögnek pontosan egy beírt köre van.

4. példa Szerkesszük meg egy háromszög beírt körét!

Megoldás:
Annyival több a dolgunk, mint az előző leckében, hogy nemcsak a középpontját kell megszerkesztenünk a körnek, hanem a sugarát is. Ez pedig éppen a középpontnak az oldalaktól vett távolsága. A szerkesztés menete:

- Vegyük föl a háromszöget!
- Szerkesszük meg két szög szögfelezőjét, metszéspontjuk legyen O!
- O-ból állítsunk merőlegest valamelyik oldalra, a merőlegesnek ezzel az oldallal vett metszéspontja legyen P!
- Szerkesszünk O középpontú, OP sugarú kört!

(A szerkesztés menetében sem, és az ábrán sem tüntettük fel a szerkesztés részlépéseit, amelyeket már korábbról ismerünk. A P pont a beírt körnek az ábrán a BC oldallal vett érintési pontja.) (7.8. ábra)



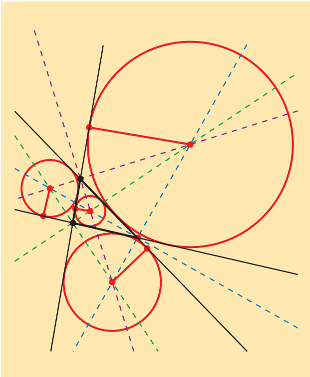
7.8. ábra Háromszög beírt körének szerkesztése

5. példa Hány olyan kör van egy háromszög síkjában, amely a háromszög mindhárom oldalegyenesét érinti?

Megoldás:
Első látásra lehet, hogy nem tűnik föl, mi az újdonság ebben az előző feladatokhoz képest. Figyelmes olvasás után viszont kiderül, hogy itt nem pusztán a háromszög oldalait jelentő szakaszokról van szó, hanem az oldalakat is magukba foglaló egyenesekről. Készítsünk ábrát!

Használjuk fel korábbi megállapításunkat, miszerint két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon az egyenesek két (egymásra merőleges) szögfelezője! Az ábrán az egy csúcshoz tartozó szögfelezőket egyformán színeztük. Annak belátását, hogy három különböző színű egyenes egy pontban metszi egymást a háromszögön kívül is, az eddigiek alapján az olvasóra bízzuk.

Tehát négy ilyen kör van. (7.9. ábra)


7.9. ábra Három egyenest egyszerre érintő körök

Definíció Egy olyan kört, amely kívülről érinti a háromszög egyik oldalát, és érinti másik két oldalának a meghosszabbítását is, a **háromszög hozzáírt körének** nevezünk.

Minden háromszögnek három hozzáírt köre van.

Oldjuk meg!

1. Szerkesszük meg az ABC háromszög AB oldalának azt a pontját, amelyik a másik két oldalegyenestől egyenlő távolságra van!
2. Szerkesszünk olyan félkört, amely érinti egy háromszög két oldalát, átmérője pedig a háromszög harmadik oldalára illeszkedik!
3. Hány olyan kör van a síkon, amelyik egyszerre érint két párhuzamos egyenest és egy azokat metsző harmadik egyenest? Válaszunkat indokoljuk!
4. Szerkesszük meg az ABC háromszög körülírt körének azokat a pontjait, amelyek egyenlő távolságra vannak az AB és a BC oldal egyenesétől!
   Szerkesszük meg a körülírt kör azon pontjait is, amelyek egyenlő távolságra vannak az A és a C ponttól! Mit figyelhetünk meg?

5. A Kertész család a költözés után virágoskertet tervez. Ehhez egy paralelogramma alakú földterület áll rendelkezésükre, amelynek az átlója mentén egy kis átkelőutat meg akarnak hagyni. Az átkelő két oldalán pedig egy-egy árvácskatükröt szeretnének kialakítani, vagyis olyan kör alakú részt, amelybe árvácskákat ültetnek. Segítsünk nekik megtervezni az árvácskák helyét! (A lehető legnagyobb tükröt képzelték el, amely az egyes részekben elfér.)

6. Mutassuk meg, hogy egy paralelogramma szögfelezői vagy egy pontban metszik egymást, vagy metszéspontjaik téglalapot határoznak meg!

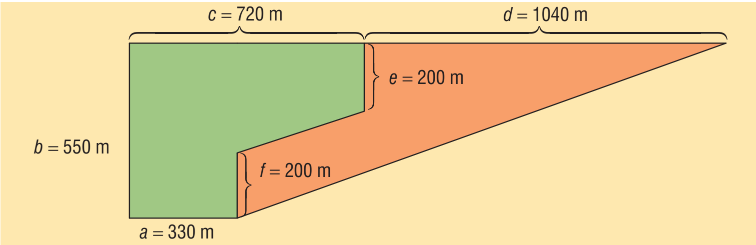
7. Egy háromszög két szögének nagysága: 74° és 42°. Mekkora szöget zárnak be egymással a háromszög szögfelezői?

8. Egy háromszög szögeit jelölje α, β és γ! Mekkora szöget zárnak be egymással a háromszög szögfelezői?

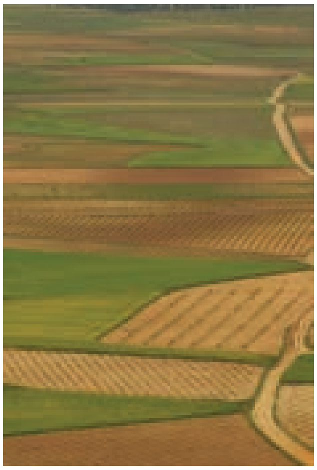
8. Területszámítás

1. példa Szántóföldet szeretnénk vásárolni. A térkép alapján döntsük el, melyik földdarabot érdemes választani, a zölddel vagy a pirossal színezettet, ha termőértékük egyforma az egész területen!

Határozzuk meg a parcellák területét! A számításhoz szükséges adatokat az ábrán feltüntettük!



8.1. ábra Egyik széles, másik hosszú. Melyiket válasszam?

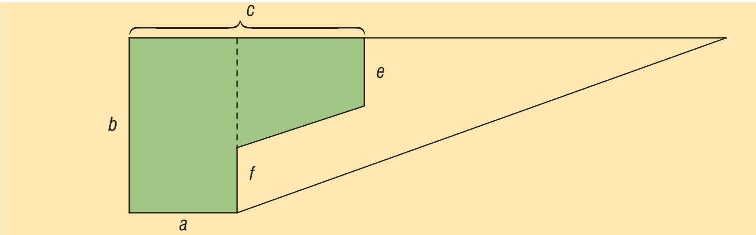


8.2. ábra Szántóföldparcellák

Megoldás:

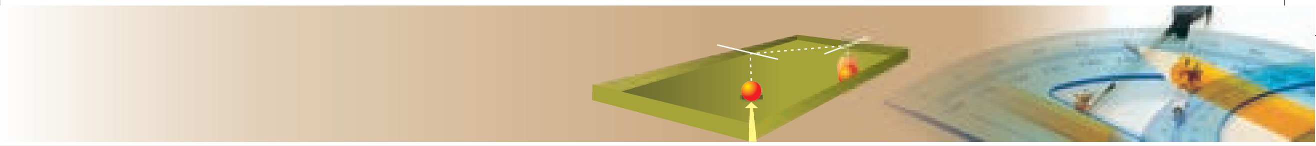
A választható földterületek egyike sem téglalap alakú, sőt nem hasonlít egyik ismert területképletű matematikai síkidomra sem. Úgy tudnánk meghatározni a területeket, ha felbontanánk a parcellákat olyan részekre, amelyeknek külön-külön ki tudjuk számítani a területét.

A zöld síkidomot például egyetlen szakasszal egy téglalapra és egy trapézra tudjuk bontani. Ezek területét meg tudjuk határozni, hiszen ismerjük a téglalap oldalhosszait (a 8.3. ábrán a és b), valamint könnyen meg tudjuk határozni a trapéz magasságát (c–a) és alapjainak a hosszát (b–f és e).



8.3. ábra Bontsuk szét és számoljunk!

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 192 2012.06.25. 14:41:27



A téglalap oldalai: (8.4. ábra)

$a = 330\text{ m}$ és $b = 550\text{ m}$,

területe:

$$T_{\text{téglalap}} = a \cdot b = 330\text{ m} \cdot 550\text{ m} = 181500\text{ m}^2.$$

A trapéz alapjai: (8.5. ábra)

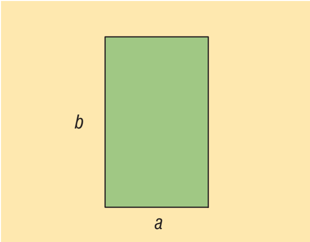
$b - f = 350\text{ m}$ és $e = 200\text{ m}$,

magassága: $c - a = 390\text{ m}$.

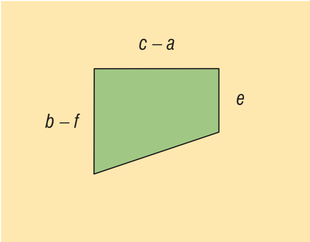
Területe: $T_{\text{trapéz}} = \dfrac{350\,\text{m} + 200\,\text{m}}{2} \cdot 390\,\text{m} = 107\,250\,\text{m}^2$.

Így a zöld terület:

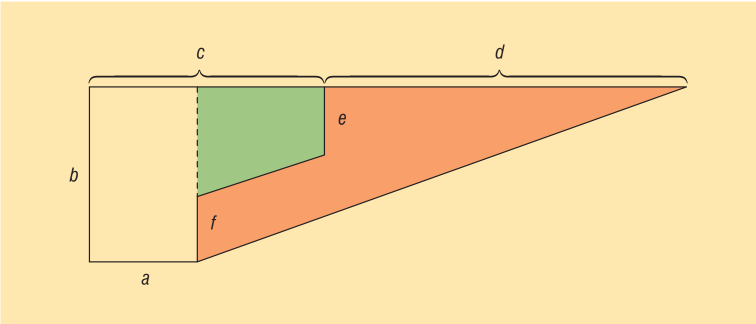
$$T_{\text{téglalap}} + T_{\text{trapéz}} = 330 \cdot 550 + \frac{350 + 200}{2} \cdot 390 = 288750 \ \ (\text{m}^2).$$



8.4. ábra Téglalap. Ez menni fog!



8.5. ábra Trapéz. Hát..., ha tudnánk az alapok és a magasság hosszát...



8.6. ábra Ezt meg egészítsük ki!

A piros síkidom területét meghatározhatjuk például úgy, hogy kiegészítjük azt a zöld területnél vizsgált trapézzal. Így egy derékszögű háromszöghöz jutunk, amelynek befogói $b = 550\text{ m}$ és $d + c - a = 1040\text{ m} + 720\text{ m} - 330\text{ m} = 1430\text{ m}$. Majd a derékszögű háromszög területéből kivonjuk a trapéz területét.
A piros terület: (8.6. ábra)

$$T_{\text{háromszög}} - T_{\text{trapéz}} = \frac{550 \cdot 1430}{2} - 107250 = 286000 \ \left(\text{m}^2\right).$$

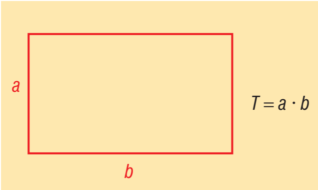
Tehát a zöld síkidom területe a nagyobb, bár elenyésző a különbség a két terület között. (Ugyanakkor formája miatt talán megmunkálni is könnyebb a zöld területet, mint a pirosat.)

8.7. ábra „Így könnyű!”

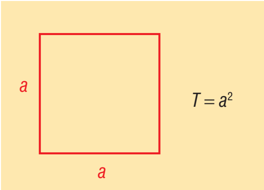
Bevezető példánkban volt alkalmunk átismételni néhány korábbról már ismert területképletet. Gyűjtsük most össze a legfontosabbakat, amelyeket eddig tanultunk!

Területképletek:

Téglalap (8.8. ábra); négyzet mint speciális téglalap (8.9. ábra)



8.8. ábra Téglalap területe

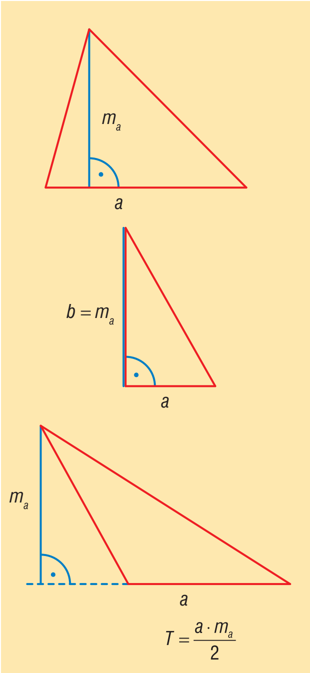


8.9. ábra Négyzet területe

Háromszög (8.10. ábra)

A háromszög **magasságvonala** (m_a) az egyik csúcsból a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenes. A háromszög magasságát kétféle értelemben is használjuk. Egyrészt a magasságvonal azon szakasza, amely a csúcs és a szemközti oldalegyenes közé esik, másrészt ennek a szakasznak a hossza (amely éppen az egyik csúcsnak a szemközti oldalegyenestől vett távolsága). Minden háromszögnek három magasságvonala van, és a három oldalhoz tartozó magassága lehet más-más hosszúságú.

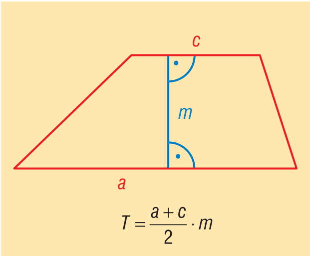
A hegyesszögű háromszög mindhárom magassága a háromszögön belül halad. A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a háromszögön belül halad, az egyik befogóhoz tartozó magassága egybeesik a másik befogóval és fordítva. A tompaszögű háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága a háromszögön belül halad, de a két rövidebb oldalhoz tartozó magassága a háromszögön kívül.



8.10. ábra Háromszög területe

Trapéz (8.11. ábra)

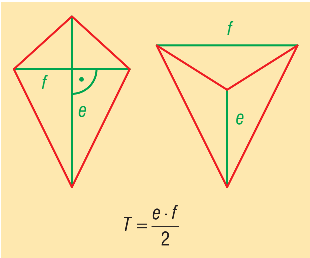
A trapéz magasságának az alapok egyeneseinek távolságát nevezzük.



8.11. ábra Trapéz területe

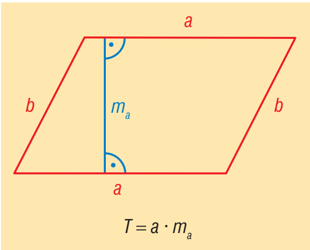
Deltoid (8.12. ábra)

A területképlet konkáv deltoidra is érvényes!

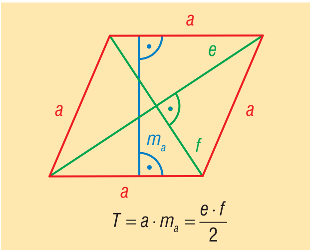


8.12. ábra Deltoid területe

Paralelogramma (8.13. ábra)



8.13. ábra Paralelogramma területe

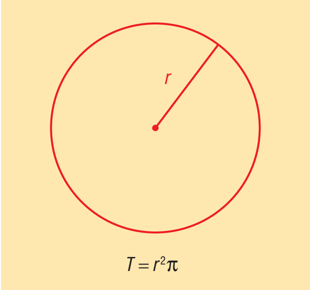


8.14. ábra Rombusz területe

Mivel a paralelogramma speciális trapéz, ezért magassága ugyanúgy az alapok egyeneseinek távolsága, mint a trapéz esetében. De a paralelogrammának akármelyik két szemközti oldalát tekinthetjük a trapéz alapjának, így a paralelogrammának kétféle magassága lehet.

Rombusz (8.14. ábra)
A rombusz területének kiszámítására egyaránt használható a paralelogramma területképlete és a deltoid területképlete, mivel a rombusz speciális paralelogramma és speciális deltoid is egyben.

Kör (8.15. ábra)



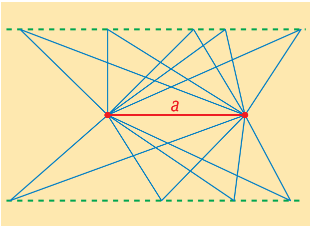
8.15. ábra Kör területe

2. példa Egy háromszög területe 20 területegység, egyik oldala pedig 8 egység hosszú. Mekkora ennek a háromszögnek az ismert oldalhoz tartozó magassága?
Hány különböző alakú ilyen háromszög van?

Megoldás:
Legyen a a 8 egység hosszúságú oldal! Az ehhez tartozó magasságot jelöljük m_a-val! Tudjuk, hogy $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$. Helyettesítsük be az ismert adatokat! $20 = \frac{8 \cdot m_a}{2}$. És innen $m_a = 5$ egység.

Most keressünk olyan háromszögeket, amelyek megfelelnek a megadott adatoknak!

Rögzítsük a háromszög 8 egység hosszúságú a oldalát! Abból, hogy az ehhez tartozó magasság hossza 5 egység, csak annyit tudunk, hogy a szemközti csúcs 5 egységnyire helyezkedik el az a oldal egyenesétől. Vagyis az a oldal egyenesétől mindkét oldalra 5 egységnyire lévő párhuzamosok bármelyik pontja lehet a háromszög harmadik csúcsa. Tehát végtelen sok különböző háromszög létezik a megadott adatokkal (köztük hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű is). (8.16. ábra)

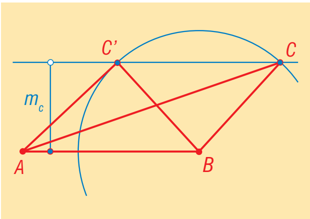


8.16. ábra Közös oldalú, azonos magasságú háromszögek

3. példa Az ABC háromszögben AB = 12 cm, BC = 8 cm és a C csúcsból induló magasság: $m_c = 6$ cm. Határozzuk meg az A csúcshoz tartozó magasságot!
Hány ilyen háromszög van? Számítsuk ki mindegyiknek a kérdezett magasságát!

Megoldás:
Nézzük először, hány megoldás lehet! Most nem feladat ugyan megszerkeszteni az ABC háromszöget, de ha elképzeljük, hogyan hajtanánk végre ezt a szerkesztést, akkor látszik, hogy két megoldás adódik.

A C csúcsnak egyrészt m_c távolságban kell lennie az AB szakasz egyenesétől, vagyis rajta kell lennie az AB-vel – attól m_c távolságban húzott – párhuzamos egyenesek valamelyikén; másrészt a B ponttól $BC = 8$ cm távolságra kell lennie, azaz rajta kell lennie a B középpontú, 8 cm sugarú körön is. Az egyeneseknek és a körnek két-két metszéspontjuk van, így az AB oldal egyenesének mindkét oldalán kétféle megoldás lehetséges: az ABC háromszög és az ABC' háromszög. (Az ábrán csak az egyik oldalára eső háromszögeket ábrázoltuk.)



8.17. ábra Először képzeljük el, hogyan szerkesztenénk!

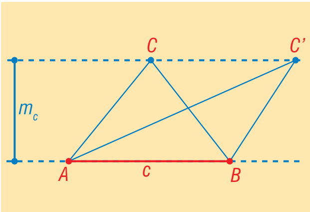
Számítsuk ki mindkét esetben az m_a magasságot! Ehhez használjuk a területképletet:

$T_{ABC} = \frac{AB \cdot m_c}{2} = \frac{BC \cdot m_a}{2}$! Innen $AB \cdot m_c = BC \cdot m_a$ és

$m_a = \frac{AB \cdot m_c}{BC} = \frac{12 \cdot 6}{8} = 9$ (cm).

A háromszög *A* csúcsból induló magasságának hossza 9 cm.

Azt az eredményt kaptuk tehát, hogy az m_a magasság független attól, hogy a két háromszög közül melyikről volt szó. De ez annyira nem meglepő, hiszen a területük ugyanakkora, és a *BC* oldal is egyenlő a *BC′* oldallal.



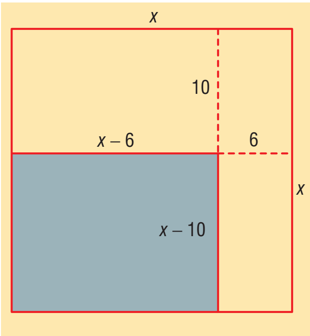
8.18. ábra A megoldás

4. példa Egy téglalap két párhuzamos oldalát 6 cm-rel, másik két oldalát 10 cm-rel megnöveljük. Így egy olyan négyzetet kapunk, amelynek területe 324 cm^2-rel nagyobb, mint a téglalap területe. Mekkorák a téglalap oldalai?

Megoldás:
Jelöljük az oldalak megnövelése után kapott négyzet oldalát *x*-szel! Ekkor tudjuk, hogy a téglalap oldalai (cm-ben mérve) kezdetben $x-6$ és $x-10$ hosszúak.

A téglalap területe tehát $T_{\text{téglalap}} = (x-6)\cdot(x-10)$, a négyzet területe: $T_{\text{négyzet}} = x^2$. A négyzet területe nagyobb 324 cm^2-rel, ezért a következő összefüggés teljesül: $(x-6)\cdot(x-10)+324 = x^2$. Az egyenlet bal oldalán végezzük el a műveleteket, majd vonjunk össze:

$$x^2 - 6x - 10x + 60 + 324 = x^2,$$
$$x^2 - 16x + 384 = x^2,$$
$$-16x = -384,$$
$$x = 24.$$



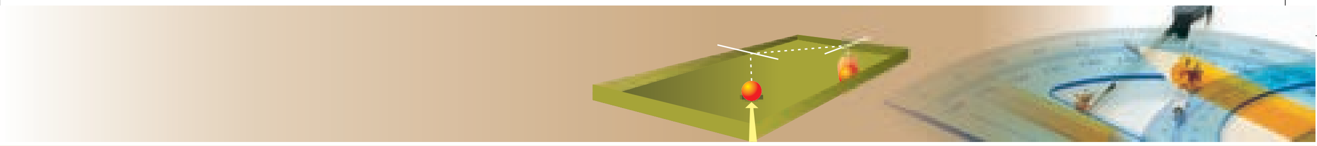
8.19. ábra 4. példa

Innen ki tudjuk számolni a téglalap oldalainak hosszát: $x-6=18$ (cm) és $x-10=14$ (cm).

Ellenőrzés: a 18 és 14 cm-es oldalakkal rendelkező téglalap területe: $T = 18 \cdot 14 = 252$ (cm^2), a 24 cm oldalú négyzet területe pedig $T = 24^2 = 576$ (cm^2). A négyzet területe valóban 324 cm^2-rel több a téglalap területénél.

5. példa Jelöljük meg az *ABCD* téglalap oldalain az oldalak egy-egy harmadolópontját egy körüljárási irányban haladva a következőképpen: az *AB* oldal *A*-hoz közelebbi harmadoló pontja legyen *P*, a *BC* oldal *B*-hez közelebbi harmadoló pontja legyen *Q*, a *CD* oldal *C*-hez közelebbi harmadoló pontja legyen *R*, és a *DA* oldal *D*-hez közelebbi harmadoló pontja legyen *S*!
Hányadrésze a *PQRS* négyszög területe az *ABCD* téglalap területének, ha a téglalap két szomszédos oldalának hossza

a) $AD = 6$ cm és $AB = 9$ cm; b) $AD = a$ és $AB = b$?



Megoldás:

a) A téglalap területe: $T_{ABCD} = 6\ \text{cm} \cdot 9\ \text{cm} = 54\ \text{cm}^2$.

A *PQRS* négyszög területét legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, ha az *ABCD* téglalap területéből kivonjuk a *PQ*, *QR*, *RS* és *SP* szakaszok által a téglalapból „levágott” derékszögű háromszögek területét.

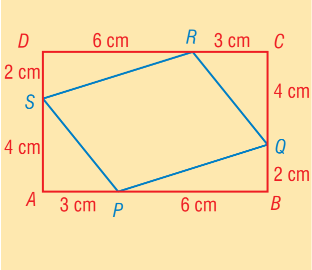
Mivel két oldal és a közbezárt szög egyértelműen meghatározza a háromszöget, így a szemközti csúcsoknál keletkezett háromszögek egybevágóak, területük egyenlő. Az egyes derékszögű háromszögek befogóinak hosszát feltüntettük az ábrán.

A háromszögek összterülete:

$$2 \cdot T_{APS\triangle} + 2 \cdot T_{BQP\triangle} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 6}{2} = 12 + 12 = 24\ (\text{cm}^2).$$

Így a *PQRS* négyszög területe: $T_{PQRS} = 54\ \text{cm}^2 - 24\ \text{cm}^2 = 30\ \text{cm}^2$.

A *PQRS* négyszög területe tehát $\dfrac{T_{PQRS}}{T_{ABCD}} = \dfrac{30\ \text{cm}^2}{54\ \text{cm}^2} = \dfrac{5}{9}$ része az *ABCD* téglalap területének.



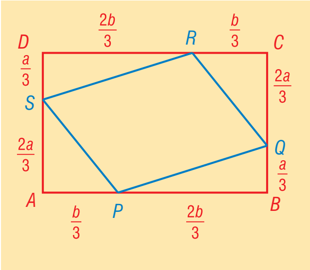
8.20. ábra Vágjuk le a „fölösleget”!

b) A gondolatmenet ugyanaz, mint az a) részben.

$$T_{PQRS} = T_{ABCD} - 2 \cdot T_{APS\triangle} - 2 \cdot T_{BQP\triangle} = a \cdot b - 2 \cdot \frac{\frac{2a}{3} \cdot \frac{b}{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\frac{a}{3} \cdot \frac{2b}{3}}{2} =$$

$$= a \cdot b - \frac{2a}{3} \cdot \frac{b}{3} - \frac{a}{3} \cdot \frac{2b}{3} = a \cdot b - \frac{2ab}{9} - \frac{2ab}{9} = a \cdot b - \frac{4ab}{9} = \frac{5ab}{9}$$

És itt is ugyanazt az eredményt kaptuk: a *PQRS* négyszög területe $\dfrac{5}{9}$ része az *ABCD* téglalap területének. Tehát a két terület aránya független attól, hogy mekkorák az *ABCD* téglalap oldalai.



8.21. ábra Oldjuk meg általánosan!

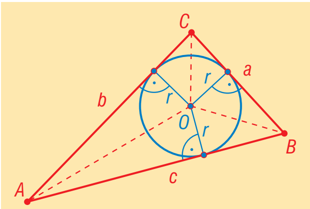
Megjegyzés: Az arány kiszámításához ugyan nem kellett tudnunk, hogy a *PQRS* négyszög milyen alakú, de a megoldás menetét továbbgondolva könnyen adódik, hogy a *PQRS* négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, vagyis a *PQRS* négyszög egy paralelogramma.

6. példa A park egy háromszög alakú füves parcellájába olyan kör alakú virágágyást (tükröt) terveznek, amely érinti a háromszög oldalait. Hány százaléka lesz a virágágyás területe a parcella teljes területének, ha tudjuk, hogy a parcella területe 140 m², és összesen 875 darab 8 cm széles szegélyező díszcölöp kellett hozzá, hogy teljesen körül tudják keríteni?

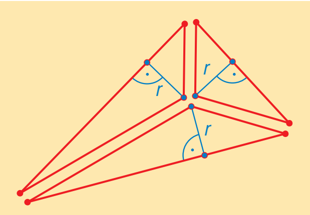
Megoldás:

A feladat szövege első ránézésre zavarba ejtő, hiszen a parcella alakjáról semmit nem tudunk azon kívül, hogy háromszögletű. A területén kívül még a kerületét tudjuk kiszámolni a felhasznált cölöpök száma alapján. A háromszög kerülete: $K = 875 \cdot 8\ \text{cm} = 7000\ \text{cm} = 70\ \text{m}$.

Rajzoljunk találomra egy ilyen parcellát virágágyással együtt! Pontosabban a feladat szempontjából nekünk már csak ennek a ma-



8.22. ábra 6. példa matematikai modellje tematikai modellje szükséges: egy háromszög, a beírt körével együtt. Húzzuk meg a beírt körnek az érintési pontokhoz tartozó sugarát! Ezek merőlegesek a megfelelő oldalakra. Majd kössük össze a beírt kör középpontját (O) a háromszög csúcsaival! (8.22. ábra)



8.23. ábra Vágjuk szét a háromszöget!

A szaggatott vonalak mentén képzeletben felvághatjuk az ABC háromszöget, így három kis háromszög keletkezik: az AOB, a BOC és a COA háromszög. Az AOB háromszögnél az $AB = c$ oldalhoz tartozó magasság éppen a beírt kör sugara: r. Így ennek a háromszögnek a területe: $T_{AOB\triangle} = \frac{c \cdot r}{2}$. Ugyanígy adódik a másik két háromszögre is: $T_{BOC\triangle} = \frac{a \cdot r}{2}$ és $T_{COA\triangle} = \frac{b \cdot r}{2}$. A három terület összege adja az ABC háromszög területét: $T_{ABC\triangle} = T_{AOB\triangle} + T_{BOC\triangle} + T_{COA\triangle} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2}$.

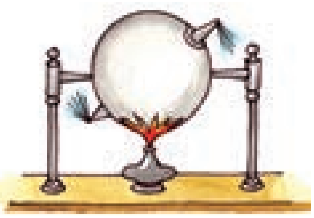
Vagyis $T_{ABC\triangle} = \frac{K_{ABC\triangle} \cdot r}{2}$. Szavakban: a háromszög területe egyenlő a háromszög fél kerületének és beírt köre sugarának szorzatával. Tehát a háromszög alakját nem ismerjük ugyan, de a beleírható kör sugarát ez alapján ki tudjuk számolni.

A feladat adataival: $140 = \frac{70 \cdot r}{2}$, ahonnan $\frac{2 \cdot 140}{70} = r$, így $r = 4\,(\mathrm{m})$.

Ebből már meghatározható a kör alakú virágágyás területe: $T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi = 4^2 \cdot \pi = 16\pi \approx 50{,}3\,(\mathrm{m}^2)$. Ez pedig $\frac{50{,}3}{140} \cdot 100 \approx 35{,}9$ százaléka a parcella teljes területének. A konkrét feladat alapján még ez a pontosság is soknak tűnik, elegendő azt válaszolnunk, hogy a virágágyás területe kb. 36%-a a parcella területének.

Érdekességként megjegyezhetjük még, hogy **Heron-képlet** néven ismert egy területképlet, amely a háromszög oldalhosszainak ismeretében adja meg a háromszög területét. Ha a, b és c a háromszög három oldala, akkor $T = \sqrt{\frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}{16}}$, ami rövidebben így is írható:

$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, ahol s a háromszög fél kerületét jelöli, azaz $s = \frac{a+b+c}{2}$.



8.24. ábra Nézzünk utána, hogy mire és hogyan használták Heron labdáját az ókorban!

7. példa Egy háromszög oldalainak hossza 13, 14 és 15 egység. Számítsuk ki, mekkora a háromszögnek a 14 egység hosszúságú oldalhoz tartozó magassága!

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 198 2012.06.25. 14:42:05

Megoldás:

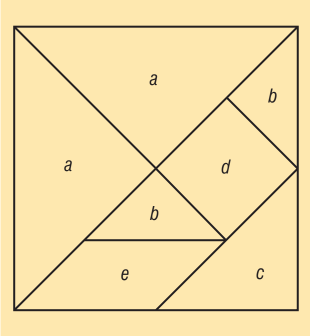
Számoljuk ki először a háromszög kerületének a felét: $s = \dfrac{13+14+15}{2} =$
$= 21$ egység. A területe az imént említett Heron-képlettel:

$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ területegység}.$$

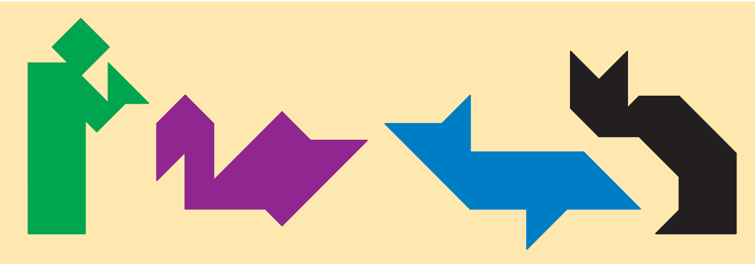
Másként viszont ugyanez a terület: $T = \dfrac{14 \cdot m}{2} = 7m$. Vagyis $7m = 84$, így $m = 12$ egység.
A 14 egység hosszúságú oldalhoz tartozó magasság 12 egység.

És egy játék mindenki számára!
Ősi távol-keleti eredetű a tangram nevű játék. A 8.25. ábrán látható módon fel van darabolva egy négyzet kisebb alkotórészekre: négyszögekre és háromszögekre. (Fogalmazzuk meg, milyen speciális síkidomok ezek!) A játék lényege, hogy egy-egy előre megadott figurát ki kell rakni a rendelkezésünkre álló készlet darabjaiból. (Pontosan ezek felhasználásával, vagyis minden darabot föl kell használnunk, és ha véletlenül több készlet lenne előttünk az asztalon, akkor sem szabad a másik készletből további lapokat elkérni.)



8.25. ábra Tangram

A tangramot a 8.25. ábra alapján akár kartonpapírból is el tudjuk készíteni magunknak. De találhatunk az interneten is olyan oldalakat, ahol játszhatunk vele, például: http://games.ztor.com/tang/.



8.26. ábra Állítsuk elő az ábrákat a tangramkészlet darabjaiból!

Minél zártabb, tömörebb egy alakzat, annál nehezebb kitalálni, hogyan lehet összerakni. Vegyük észre, hogy az összes feladványban szereplő figura mint síkidom területe ugyanakkora, ami persze nyilvánvaló, hiszen ugyanazokból a darabokból áll.

Oldjuk meg!

1. Egy háromszög három oldalának hosszáról tudjuk, hogy $a < b < c$. Három magasságáról pedig tudjuk, hogy $m_1 < m_2 < m_3$. Melyik magasság melyik oldalhoz tartozik? A választ indokoljuk meg!
2. Egy négyzet átlóinak hossza 8 cm. Mekkora a négyzet területe?
3. Egy négyzet középpontja körül rajzoljunk kört, amely átmegy a négyzet csúcsain! Állapítsuk meg a kör és a négyzet területének arányát, ha a kör sugara a) 6 cm; b) r !
4. Hányszorosára nő a négyzet területe, ha az oldalait az
   a) 5-szörösükre, b) 7-szeresükre, c) n-szeresükre növeljük?

5. Hányszorosára nőtt annak a négyzetnek az oldala, amelynek a területe
a) a 36-szorosára, b) a 100-szorosára, c) a k^2-szeresére, d) az n-szeresére nőtt?

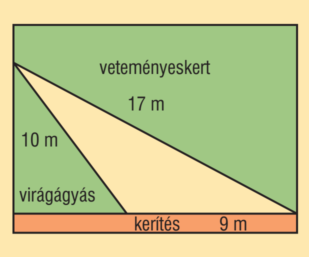
6. Adott háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk olyan egyenest, amely két egyenlő területű háromszögre bontja az eredeti háromszöget!

7. Egy háromszög beírt körének sugara 5 cm, területe 150 cm^2. Számítsuk ki a háromszög kerületét!

8. Egy háromszög egyik oldalának hossza 16 cm, és a hozzá tartozó magasság 18 cm. Milyen hosszú lehet a háromszögnek az az oldala, amelyhez 12 cm-es magasság tartozik?

9. Egy háromszög két magasságának hossza 12 cm és 18 cm, egyik oldalának hossza16 cm. Eldönthető-e ezek alapján egyértelműen, hogy mekkora a háromszög területe? Ha nem, indokoljuk meg, miért nem; ha igen, számítsuk is ki a területet!

10. A Molnár család a lehető leghosszabb pórázon szeretné tartani Prézlit, a kutyát. Ismervén Prézlit, pontosan tudják, hogy ameddig elér, mindent kiás. Hova tűzzék le a karót, amelyhez majd kikötik, hogy se a virágos kertet ne érje el, se a kerítést, se a veteményeskertet? Legfeljebb milyen hosszú pórázra köthetik ki Prézlit? A kert alaprajza a 8.27. ábrán látható.

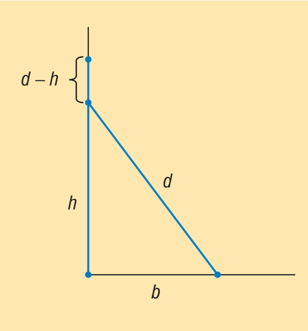


8.27. ábra A kert

9. A Pitagorasz-tétel I.

A következő példát egy kb. 4000 évvel ezelőtti babiloni agyagtáblán találták.

1. példa „Egy gerenda 0;30 hosszú. Felül 0;6-tal lecsúszott. Lentről mennyivel távolodott el?"
A szöveg igen szűkszavú (bár még így is némiképpen ki van egészítve ahhoz képest, ami az agyagtáblán fönnmaradt). Ma valahogy így fogalmaznánk meg ugyanezt a feladatot:
Egy 30 egység hosszú gerenda felső széle 6 egységnyit csúszott le a fal mellett. Milyen messzire csúszott el így a gerenda alja a faltól?



9.1. ábra 1. példa

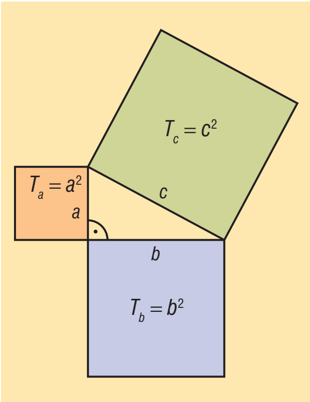
Megoldás:
Az agyagtáblán közölt megoldás mai jelölésekkel való (kicsit részletesebb) leírását próbáljuk tolmácsolni úgy, hogy a 4000 éve közölt gondolatok ne csorbuljanak.

Jelöljük a gerenda hosszát d-vel, azt a magasságot, ahol a csúszás után a fölső vége van, h-val, és amennyit az alja elcsúszott a faltól, azt b-vel. A „lecsúszást" ismerjük, ez $d-h=6$ egység. Ebből tudjuk h-t: $h=30-6=24$ egység. Itt egy képlet következik az óbabiloni megoldás szerint: $b=\sqrt{d^2-h^2}$. Ezt kiszámítva: $b=\sqrt{30^2-24^2}=\sqrt{900-576}=$

$=\sqrt{324}=18$ egységet kapunk. A gerenda alja tehát 18 egységgel távolodott el a faltól.

A használt képletet nyilvánvalóan a $b^2 = d^2 - h^2$ összefüggés előzte meg, amely egyenértékű a $b^2 + h^2 = d^2$ összefüggéssel. Vagyis egy olyan összefüggéssel, amely a derékszögű háromszög oldalai között áll fenn. Ez az összefüggés már általános iskolából is ismerős lehet: ezt nevezzük ma **Pitagorasz-tétel**nek.

Tétel Bármely derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével. Vagy másként: bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.

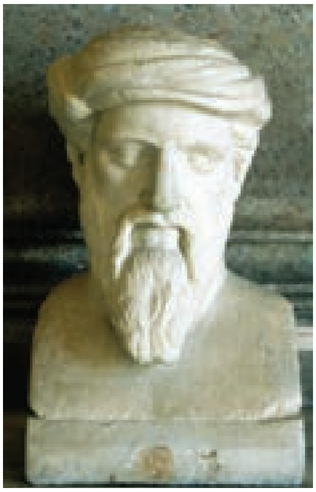


9.2. ábra Derékszögű háromszög oldalaira rajzolt négyzetek

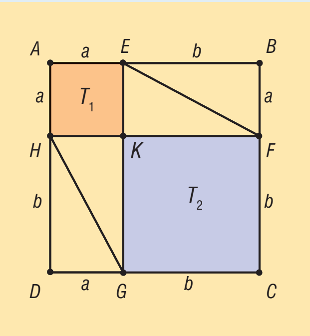
Ha a derékszögű háromszög befogóit a és b jelöli, az átfogóját pedig c, akkor így is írhatjuk az összefüggést:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

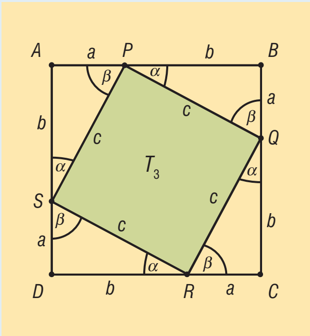
A dologban az az érdekes, hogy a Pitagorasz-tételt a fenti megoldásban több mint 1000 évvel azelőtt alkalmazták, hogy Püthagorasz megszületett volna. A mai tudománytörténet szerint valószínű, hogy az óbabiloni matematika valóban használta ugyan a tételt (sőt keresett is racionális oldalhosszúságú derékszögű háromszögeket), de bizonyítani nem tudták. Azt viszont tudjuk, hogy Püthagorasz és követői, az ún. pitagoreusok már ismerték a tétel bizonyítását. Ők adták közre, és így később (újabb pár száz év múlva) Püthagorasz nevéhez kapcsolták ezt a tételt.


9.3. ábra Püthagorasz (Kr. e. 582–496)

A tétel bizonyítása:
Ahhoz, hogy mi is lássuk a tétel igazságát, daraboljunk fel kétféleképpen egy $a+b$ oldalhosszúságú négyzetet!

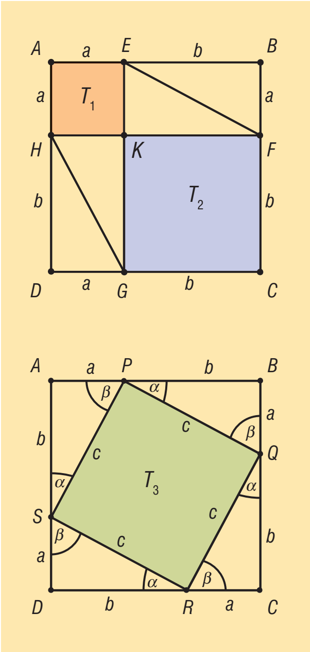


9.4. ábra 1. feldarabolás



9.5. ábra 2. feldarabolás

A 9.4. ábrában meghúztuk az EG szakaszt és a HF szakaszt. Így két négyzet keletkezett: az a oldalhosszúságú $AEKH$ négyzet és a b oldalhosszúságú $CGKF$ négyzet, valamint két téglalap, amelyeknek az oldalhosszúságai a, illetve b. Ha a téglalapokat az ábrán látható módon az



9.6. ábra Emlékeztető

átlójukkal két háromszögre bontjuk, akkor négy darab *a* és *b* befogójú derékszögű háromszöget kapunk.

Így az $a+b$ oldalhosszúságú négyzet területe egyenlő a két négyzet és a négy derékszögű háromszög területének összegével:

$$T_1+T_2+4\cdot T_{\text{háromszög}}=a^2+b^2+4\cdot T_{\text{háromszög}}.$$

Nézzük a 9.5. ábrát! Itt az $a+b$ oldalhosszúságú négyzet csúcsainál keletkezett egy-egy derékszögű háromszög, amelyeknek a befogói szintén *a* és *b*. A 9.5. ábra kis derékszögű háromszögeiből tehát ugyanannyi van, mint a 9.4. ábrán, és területük is egyenlő. Vizsgáljuk meg most a kimaradó részt! Egy olyan négyszög keletkezik, amelynek minden oldala olyan hosszú, mint a derékszögű háromszögünk átfogója, vagyis a négyszög minden oldala egyenlő, így ez egy rombusz. Ugyanakkor tudjuk, hogy a derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege 90°, így a *PQRS* négyszögnek pl. az *R* csúcsa mellett álló két szög összege is $\alpha+\beta=90^\circ$. Így a négyszög *R* csúcsánál lévő belső szöge is 90°, hiszen az *α*-val és a *β*-val együtt egyenesszöget alkotnak. Tehát a *PQRS* négyszög egy derékszögű rombusz, vagyis egy négyzet. Itt tehát az $a+b$ oldalhosszúságú négyzet területe egyenlő a nagy négyzet és a négy derékszögű háromszög területének összegével:

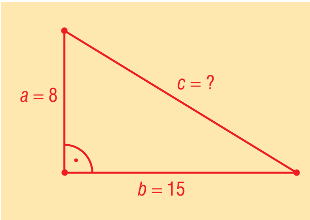
$$T_3+4\cdot T_{\text{háromszög}}=c^2+4\cdot T_{\text{háromszög}}.$$

Mivel a két különböző felosztásnál ugyanazt a területet írtuk fel kétféleképpen, így azok nyilván egyenlők egymással:

$$a^2+b^2+4\cdot T_{\text{háromszög}}=c^2+4\cdot T_{\text{háromszög}},\quad \text{azaz}\quad a^2+b^2=c^2.$$

Éppen ezt akartuk bizonyítani.

2. példa Számítsuk ki, milyen hosszú az átfogója annak a derékszögű háromszögnek, amelynek két befogója
a) 8 cm és 15 cm; b) 10 m és 6 m hosszúságúak!



9.7. ábra 2. a) példa

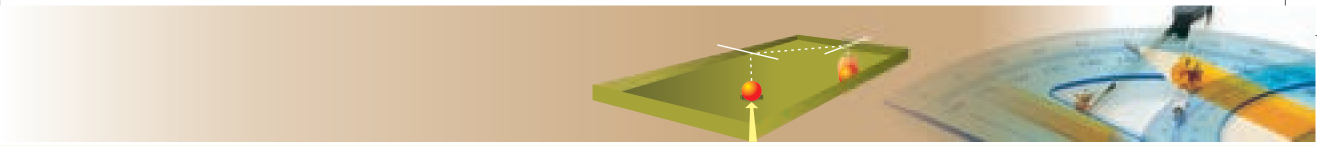
Megoldás:

A Pitagorasz-tételt alkalmazhatjuk mindkét esetben. Jelöljük a befogókat *a*-val és *b*-vel, a keresett átfogót pedig *c*-vel! Ekkor a tétel szerint tudjuk, hogy $a^2+b^2=c^2$. Ebbe az összefüggésbe helyettesítsük be az adatokat!

$$8^2+15^2=c^2$$
$$64+225=c^2$$
$$289=c^2$$

Két olyan számot is találnánk, amelynek 289 a négyzete: a 17-et és a –17-et. De mivel a *c* hosszúságot jelöl, így csak a pozitív szám jöhet szóba: $c=17$.

Tehát az a) kérdésre a válasz: a derékszögű háromszög átfogója 17 cm hosszú.



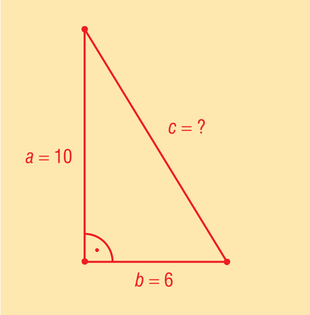
Ugyanezt kell végigcsinálnunk a b) kérdésnél is, csak itt végül nem kapunk egész számot.

$$10^2 + 6^2 = c^2$$
$$100 + 36 = c^2$$
$$136 = c^2$$
$$\sqrt{136} = c$$

A négyzetgyök segítségével könnyen tudjuk jelölni ilyenkor is a keresett számot. Közelítő értékét pedig számológéppel vagy függvénytáblázat segítségével meghatározhatjuk.

$$c = \sqrt{136} \approx 11,66$$

Válasz a b) kérdésre: az átfogó hossza $\sqrt{136}$ m, vagyis kb. 11,66 m.



9.8. ábra 2. b) példa

3. példa Egy téglalap átlója 26 cm, az egyik oldala pedig 10 cm hosszú. Mekkora a téglalap területe?

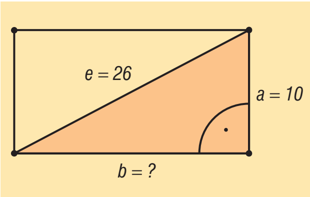
Megoldás:
A téglalap területét két szomszédos oldalának szorzataként számolhatjuk ki. Az egyik oldala adott, tehát ha a másik oldalát ki tudjuk számítani, akkor már majdnem kész is vagyunk a feladat megoldásával. Mivel a téglalapnak minden szöge derékszög, ezért a téglalapot az átlója két derékszögű háromszögre bontja. Ezek egyikére máris alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt. Használjuk az ábra jelöléseit!

A kiemelt háromszögnek a két befogója a és b, átfogója e. Így $a^2 + b^2 = e^2$. Behelyettesítve az adatokat:

$$10^2 + b^2 = 26^2,$$
$$100 + b^2 = 676,$$
$$b^2 = 576,$$
$$b = 24.$$

A téglalap másik oldalhosszúsága tehát 24 cm. Így a területe:

$$T = a \cdot b = 10\ \text{cm} \cdot 24\ \text{cm} = 240\ \text{cm}^2.$$

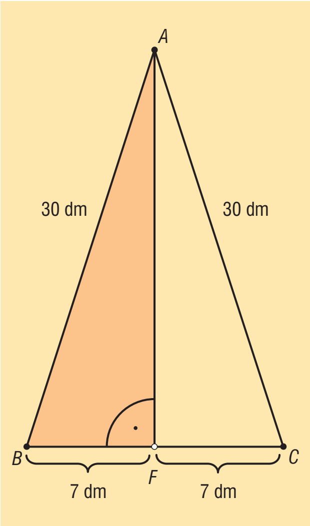


9.9. ábra 3. példa

4. példa Egy kétágú létra szárai 3 méter hosszúak. A létra akkor áll stabilan, ha vízszintes talajon teljesen szét van nyitva, amennyire csak az összekötő lánc engedi. Ilyenkor a két szárának a földön mért távolsága 140 cm. Milyen magasan van ilyenkor a létra legteteje?

Megoldás:
A létra szárainak modelljéül használhatjuk egy egyenlő szárú háromszög szárait. Ennek a háromszögnek az alapja a létra szárainak a földön mért távolsága.

Mivel az A pont egyenlő távolságra van a B és a C ponttól, ezért korábbi megállapításunk szerint A illeszkedik a BC oldal felezőmerőleges



9.10. ábra 4. példa

egyenesére. Így a BFA háromszög egy derékszögű háromszög. Ebben a háromszögben az átfogó (AB) és az egyik befogó (BF) ismeretében keressük az FA befogót.

Átfogó: $AB = 3\text{ m} = 30\text{ dm}$.

Egyik befogó: $BF = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{140\text{ cm}}{2} = 70\text{ cm} = 7\text{ dm}$.

Másik befogó: $FA = ?$

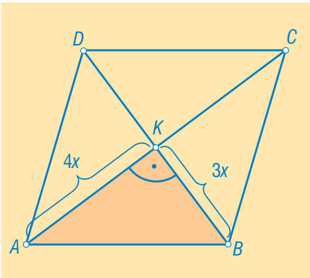
Pitagorasz-tétel: $FA^2 + BF^2 = AB^2$. Helyettesítsük be az adatokat! (Figyeljük meg, hogy ilyen adatok mellett dm-ben a legkényelmesebb elvégezni a számolást!)

$$FA^2 + 7^2 = 30^2$$
$$FA^2 + 49 = 900$$
$$FA^2 = 851$$
$$FA = \sqrt{851} \approx 29{,}17\text{ (dm)}$$

Vagyis a létra magassága kb. 29,2 dm = 2 m 92 cm. (Mindenképpen érdemes tehát a legjobb stabilitás kedvéért teljesen szétnyitni a létra két szárát amennyire csak lehet, hiszen az adott létra esetén mindössze 8 cm-t veszíthetünk vele a magasságból.)

9.11. ábra Csak óvatosan!

5. példa Egy rombusz kerülete 32 egység. Átlóinak hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3 a 4-hez. Mekkora a rombusz területe?



9.12. ábra 5. példa

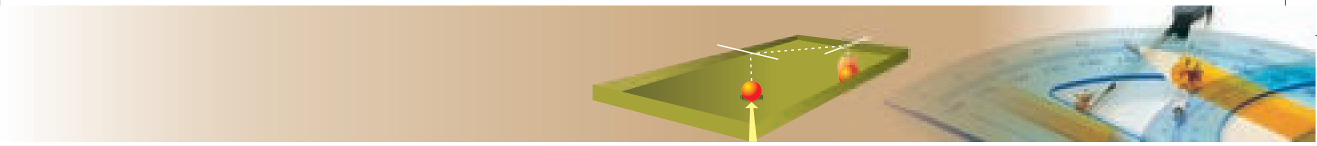
Megoldás:

Tudjuk, hogy a rombusz olyan négyszög, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú (jelöljük a-val). Így a kerület ismeretében megállapíthatjuk az oldalainak hosszát. $K = 4a = 32 \quad \Rightarrow \quad a = 8$.

Mivel a rombusz területét kiszámíthatjuk az átlók szorzatának feleként, ezért nyilván az átlók hosszának meghatározása a cél. Tudjuk még azt is, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra és felezik egymást. Így két fél átló és egy oldal derékszögű háromszöget alkot, ahol a két fél átló hosszának aránya is 3:4. Ezért bevezethetünk ismeretlennek egy olyan x hosszúságú szakaszt, amelynek a KB szakasz éppen háromszorosa, a KA szakasz pedig éppen 4-szerese.

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az AKB derékszögű háromszögre:

$$AK^2 + KB^2 = AB^2,$$
$$(4x)^2 + (3x)^2 = 8^2,$$
$$16x^2 + 9x^2 = 64,$$
$$25x^2 = 64,$$
$$x^2 = \frac{64}{25},$$
$$x = \frac{8}{5}.$$



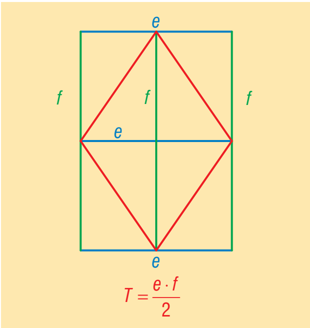
Innen $AK = 4x = 4 \cdot \frac{8}{5} = \frac{32}{5}$ és $KB = 3x = 3 \cdot \frac{8}{5} = \frac{24}{5}$.

Vagyis a rombusz átlóinak hossza:

$$AC = 2 \cdot AK = 2 \cdot \frac{32}{5} = \frac{64}{5} \text{ és } BD = 2 \cdot KB = 2 \cdot \frac{24}{5} = \frac{48}{5}.$$

A rombusz területe:

$$T_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\frac{64}{5} \cdot \frac{48}{5}}{2} = \frac{64 \cdot 48}{5 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{1536}{25} = 61{,}44 \text{ területegység.}$$

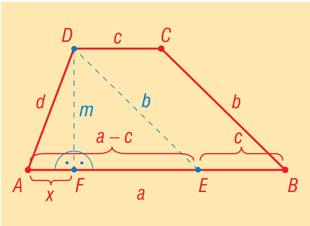


9.13. ábra A rombusz területe

6. példa Egy trapéz alapjainak hossza 8 cm és 22 cm, egyik szárának hossza 13 cm. Állapítsuk meg, mekkora lehet a trapéz másik szárának a hossza, ha tudjuk, hogy a trapéz területe 180 cm^2!

Megoldás:

Készítsünk ábrát és használjuk a 9.14. ábra jelöléseit! Adottak: $a = 22$ cm, $c = 8$ cm, $d = 13$ cm és az *ABCD* trapéz területe $T_{ABCD} = 180 \text{ cm}^2$. Keressük a *b* oldal hosszát. Húzzunk párhuzamost a *b* oldallal a *D* csúcson át! Ennek metszéspontja az *AB* oldallal legyen az *E* pont! Az *EBCD* négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, ezért ez a négyszög paralelogramma. Ebből viszont tudjuk, hogy szemközti oldalai egyenlő hosszúak, tehát a *DE* oldal is *b* hosszúságú, és az *EB* szakasz is *c* hosszúságú.



9.14. ábra 6. példa

Az *AED* háromszögnek tehát ismerjük két oldalát: $AD = 13$ cm és $AE = a - c = 22 \text{ cm} - 8 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$. Ha még e háromszög magasságát is tudnánk, akkor ki tudnánk számítani Pitagorasz-tétellel az *AF* szakasz hosszát is, amiből pedig tudnánk az *EF*-et, így végül ismét a Pitagorasz-tételt alkalmazva a *DE* szakasz hosszát is kiszámolhatnánk. Az *ADE* háromszög magassága egyben a trapéz magassága is. Ki fogjuk használni, hogy a magasság merőleges az alapokra.

A trapéz területképletét alkalmazva ki tudjuk számítani a trapéz magasságát: $T_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot m$, vagyis $180 = \frac{22+8}{2} \cdot m = 15m$, ahonnan $m = \frac{180}{15} = 12$ (cm).

A Pitagorasz-tételt alkalmazva az *AFD* derékszögű háromszögre:

$$x^2 + m^2 = d^2,$$
$$x^2 + 12^2 = 13^2,$$
$$x^2 = 25,$$
$$x = 5 \text{ (cm)},$$

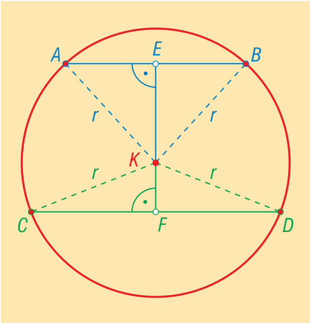
ahonnan $FE = 14 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$.

Most az *EFD* derékszögű háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$FE^2 + m^2 = b^2,$$
$$9^2 + 12^2 = b^2,$$
$$225 = b^2,$$
$$b = 15 \text{ (cm)}.$$

Tehát a trapéz másik szárának hossza 15 cm.

7. példa Mekkora annak a körnek a sugara, amelyben egymástól 27 cm távolságra egy 30 cm és egy 48 cm hosszúságú húr helyezkedik el egymással párhuzamosan?



9.15. ábra 7. példa megoldása

Megoldás:
Használjuk a 9.15. ábra jelöléseit! Mivel a kör középpontja sugárnyi távolságra helyezkedik el a húrok végpontjaitól, így a *KAB* háromszög és a *KCD* háromszög egyenlő szárú. Ezért a kör középpontja (*K*) illeszkedik a húrok felezőmerőlegesére. S mivel a két húr párhuzamos, így ezek a felezőmerőlegesek egy egyenesbe esnek.

Az adatok: $AB = 30\text{ cm} \Rightarrow AE = 15\text{ cm}$

$CD = 48\text{ cm} \Rightarrow CF = 24\text{ cm}$

$EF = 27\text{ cm}$

Jelöljük a *KE* távolságot *x*-szel! Ekkor a *KF* távolság $27 - x$. Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az *AEK* és a *CFK* derékszögű háromszögekre!

$AE^2 + EK^2 = AK^2$, vagyis $15^2 + x^2 = r^2$ és

$CF^2 + FK^2 = CK^2$, vagyis $24^2 + (27 - x)^2 = r^2$.

Mivel mindkét egyenlőség jobb oldalán ugyanaz a kifejezés áll, így a bal oldalaknak is egyenlőknek kell lenniük: $15^2 + x^2 = 24^2 + (27 - x)^2$.

Végezzük el a négyzetre emeléseket! $225 + x^2 = 576 + 729 - 54x + x^2$.

Innen $54x = 576 + 729 - 225,$

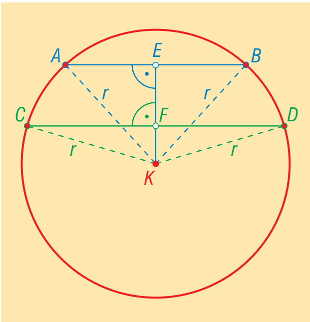
$54x = 1080,$

$x = 20.$

Az egyik húr tehát 20 cm távolságra van a kör középpontjától. Ebből tudjuk a másik húr *K*-tól vett távolságát is: $KF = 27 - 20 = 7$ (cm). Ezek után a vizsgált háromszögek bármelyikére felírt Pitagorasz-tétel segítségével kiszámíthatjuk a kör sugarának hosszát:

$$r^2 = 15^2 + x^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625.$$

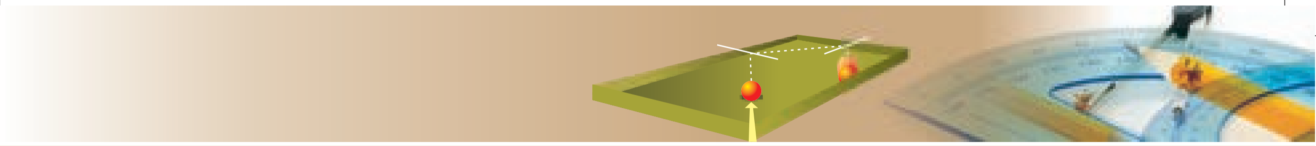
Vagyis $r = 25$ cm.
(A másik összefüggést használhatjuk ellenőrzésképpen: $24^2 + 7^2 = $
$= 576 + 49 = 625 = r^2$, innen is $r = 25$ cm -t kapunk eredményül.)
A kör sugara 25 cm.



9.16. ábra Így is felvehettük volna az ábrát

Megjegyzés: Az ábra felvételekor még nem tudhattuk biztosan, hogy a kör *K* középpontja az *EF* szakasznak belső pontja-e vagy külső. De gondoljuk végig, hogy ha – a 9.16. ábrán lévő módon – *K* külső pont, akkor is jelölhetjük a *KE* távolságot *x*-szel, csak akkor a *KF* távolság $x - 27$ lenne.

Ez azonban megoldásunkon semmit nem változtat, hiszen ennek a kifejezésnek csak a négyzete szerepel a megoldásban, vagyis algebrailag ugyanazt a kifejezést, végül a sugárra is ugyanazt a 25 cm-es értéket kapjuk ebből az alaphelyzetből kiindulva is.



Vegyük észre, hogy minden példában meg kellett találnunk valahol elrejtve az ábrában egy derékszöget, illetve derékszögű háromszögeket, amelyekre alkalmazhattuk a Pitagorasz-tételt!

9.17. ábra Hol vannak derékszögek?

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki, milyen hosszú annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, melynek befogói
a) 3 cm és 4 cm; b) 24 cm és 7 cm; c) 24 cm és 10 cm hosszúak!

2. Mekkora a derékszögű háromszög másik befogója, ha
a) az egyik befogója 16 egység hosszú, átfogója pedig 34 egység hosszú;
b) az egyik befogója 14 egység hosszú, átfogója pedig 24 egység hosszú;
c) az egyik befogója x hosszúságú, az átfogója pedig $x + 1$ hosszúságú?

3. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 12 egység, magassága 8 egység hosszúságú. Számítsuk ki, mekkorák a háromszög szárai, és milyen hosszúak a szárakhoz tartozó magasságok!

4. Határozzuk meg, mekkora távolságra halad egymástól a 25 egység sugarú kör két párhuzamos húrja, ha az egyik húr 30 egység hosszúságú, a másik pedig 48 egység hosszúságú! Figyeljük meg, hogyan helyezkedhetnek el a húrok! Hány eset van?

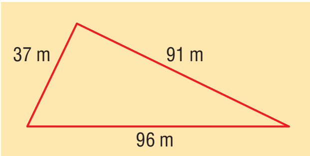
5. Egy deltoid átlói egyenlő hosszúak. Az egyik átló a másikat 1:3 arányban osztja két részre. Mekkora a deltoid két átlójának hossza, ha területe 72 cm^2? Számítsuk ki a deltoid kerületét!

6. Az $ABCD$ trapéznak az A csúcsnál derékszöge van. Határozzuk meg, mekkora a trapéz területe, ha alapjainak hossza 13 cm és 20 cm, a DC szára pedig 25 cm hosszúságú!

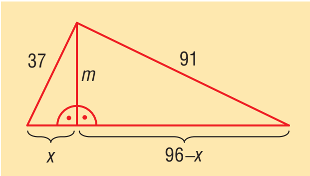
10. A Pitagorasz-tétel II.

1. példa Egyes vidékeken olykor számunkra érdekes alakú házakat láthatunk. Az ilyen különös építkezés célja lehet az időjáráshoz való alkalmazkodás, vagy egyszerűen csak a figyelemfelkeltés. Számítsuk ki, milyen magas lehet az a szemből nézve háromszög alakúnak látszó hotel, amelynek méretei az 10.2. ábrán láthatók.

10.1. ábra Hotel



10.2. ábra Adatok



10.3. ábra Megoldás alapötlete

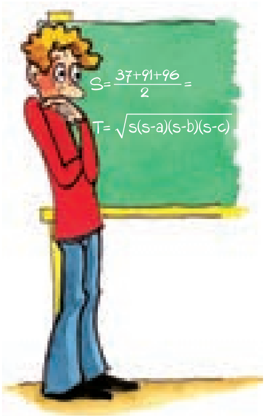
Megoldás:
Húzzuk be a keresendő magasságot! Ez merőleges a szemközti oldalra, és két részre bontja azt. Az egyik rész hosszát nevezzük el x-nek, a másik ekkor $96 - x$ hosszúságú.
Felírhatjuk a Pitagorasz-tételt mindkét derékszögű háromszögre:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + m^2 &= 37^2 \\ (96 - x)^2 + m^2 &= 91^2 \end{aligned}\right\}.$$

Mivel mindkét egyenletben szerepel a magasság négyzete, így az átrendezés után kapott

$$m^2 = 37^2 - x^2 \quad \text{és}$$

$$m^2 = 91^2 - (96 - x)^2$$



10.4. ábra Hogy is van ez?

egyenletekben a bal oldalon álló kifejezés egyenlő, így a jobb oldalon álló kifejezéseknek is egyenlőknek kell lenniük.

$$37^2 - x^2 = 91^2 - (96 - x)^2$$

Végezzük el a kéttagú kifejezés négyzetre emelését, majd rendezzük az egyenletet!

$$37^2 - x^2 = 91^2 - (96^2 - 2 \cdot 96 \cdot x + x^2)$$

$$37^2 - x^2 = 91^2 - 96^2 + 2 \cdot 96 \cdot x - x^2 \qquad / + x^2$$

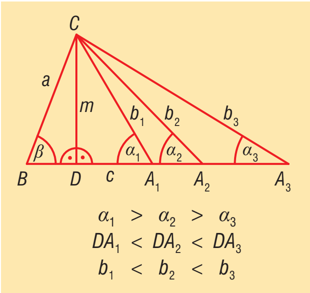
$$1369 = 8281 - 9216 + 192x \qquad / + 9216 - 8281$$

$$2304 = 192x$$

$$12 = x$$

Innen $96 - x = 96 - 12 = 84$, bár erre az adatra már legfeljebb csak ellenőrzéshez lehet szükségünk. Ugyanis már az x segítségével is meg tudjuk határozni a magasságot: $m^2 = 37^2 - x^2 = 37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225$, $m = \sqrt{1225} = 35$.
Tehát az épület magassága 35 méter.

Megjegyzés: A Heron-képlet segítségével is meghatározhattuk volna a magasságot. Ezt az olvasóra bízzuk, a végeredményt pedig az első megoldás alapján tudjuk ellenőrizni.



10.5. ábra Az α szög és az A pont helyének kapcsolata

Figyeljük meg alaposan, mit tudunk még egy hasonló ábráról leolvasni!

Először is nyilvánvaló a Pitagorasz-tétel alapján, hogy egy derékszögű háromszögnek az átfogó a leghosszabb oldala. Vizsgáljuk meg, milyen összefüggés lehet más háromszögekben az oldalak nagysága és a szögek nagysága között!

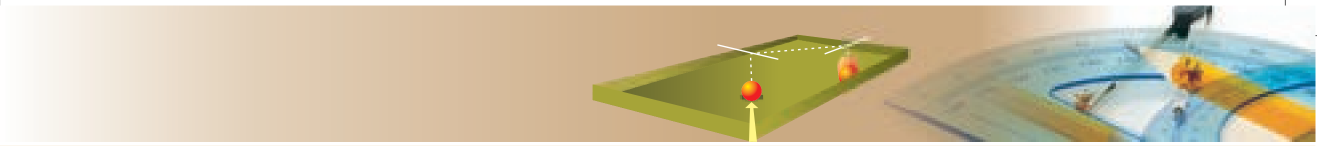
A szemlélet alapján elfogadhatjuk, hogy minél messzebb van a háromszög A csúcsa a magasság talppontjától D-től a c oldal egyenesén, annál kisebb az ennél a csúcsnál lévő szög. (10.5. ábra) Ugyanakkor a Pitagorasz-tétel értelmében annál nagyobb a CDA háromszög befogóinak négyzetösszege, így az átfogója, a b oldal is. Gondolatmenetünket „visszafelé" is elmondhatnánk: minél nagyobb a b oldal, annál messzebb lesz az A csúcs a D-től, így annál kisebb lesz az α szög.

Természetesen ugyanez érvényes a magasságvonal másik oldalán is. Vagyis ha $\beta > \alpha$, akkor az A csúcs távolabb van D-től, mint a B, így a b oldal nagyobb, mint az a oldal. És megfordítva: ha $b > a$, akkor $\beta > \alpha$ is teljesül.

Eddigi eredményeinket így foglalhatjuk össze:

- bármely háromszögben egyenlő szögekkel szemközt egyenlő oldalak vannak, és megfordítva: egyenlő oldalakkal szemközt egyenlő szögek vannak; továbbá
- bármely háromszögben nagyobb szöggel szemközt nagyobb oldal van, és megfordítva: nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög található.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 208 2012.06.25. 14:43:16



Ebből az is következik, hogy a háromszög maximális oldalával szemközt található a maximális szög, és viszont. Ugyanezért a leghosszabb oldalon fekvő két szög biztosan hegyesszög. Ebből pedig az is adódik, hogy a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság a háromszögön belül halad.

(Ezek alapján már megállapítható, hogy az első példában nemcsak úgy látszik, hogy az épület magassága a háromszögön belül van, hanem valóban úgy is van.)

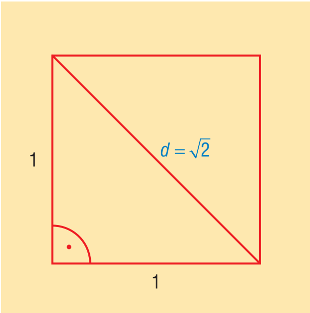
Nagyon gyakran lesz szükségünk a későbbiekben a következő példa eredményeire, így azokat érdemes minél hamarabb megjegyeznünk!

2. példa Határozzuk meg
a) az egység oldalú négyzet átlójának hosszát;
b) az *a* oldalú négyzet átlójának hosszát;
c) az egység oldalú szabályos háromszög magasságát;
d) az *a* oldalú szabályos háromszög magasságát!

Megoldás:
a) Az átló két egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja a négyzetet. Írjuk föl az egyikre a Pitagorasz-tételt!

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

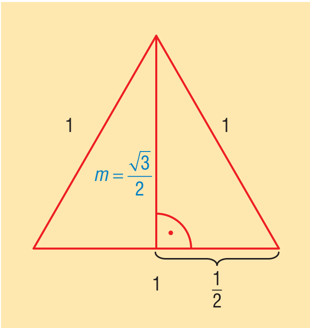
Az egység oldalú négyzet átlója $\sqrt{2}$ hosszúságú.
b) Itt csak az a) részre hivatkozunk, hiszen akár *a* is lehetne az egység: az *a* oldalú négyzet átlója $\sqrt{2} \cdot a$.



10.6. ábra 2. a) példa

c) A szabályos háromszög mindhárom oldala egyenlő, így magasságai egyenlő hosszúságúak, és felezik a szemközti oldalt.
Írjuk föl az egyik derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt!

$$m^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$
$$m^2 + \frac{1}{4} = 1$$
$$m^2 = \frac{3}{4}$$
$$m = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

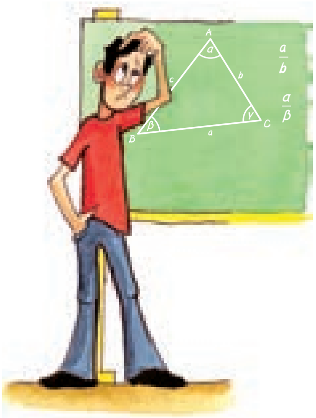


10.7. ábra 2. c) példa

Tehát az egység oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}$ hosszúságú.

d) Az *a* oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$.

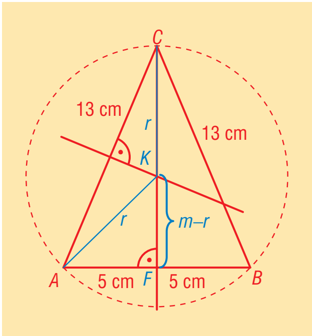
MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 209 2012.06.25. 14:43:22



10.8. ábra Melyik nagyobb?

Vegyük észre, hogy mindkét példában jól nyomon követhetjük az oldalak és szögek közötti összefüggést, de az is gyorsan kiderül, hogy nem egyenes arányosságról van szó. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög szögei 45°, 45° és 90°, tehát a legnagyobb szög kétszerese a kisebbeknek, a velük szemközti oldalak közül viszont a hosszabbik csak $\sqrt{2}$ -szöröse a rövidebbiknek. A szabályos háromszöget a magassággal két olyan derékszögű háromszögre bontottuk, amelyeknek a szögei 30°, 60° és 90°-osak, vagyis arányuk 1:2:3; oldalaik aránya viszont $\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$. Tehát az arány nem egyenlő!

3. példa Egy egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 13 cm, alapjának hossza pedig 10 cm. Számítsuk ki, mekkora a háromszög köré írható kör sugara!



10.9. ábra 3. példa vázlatrajza, ha *K* a háromszög belsejébe esik

Megoldás:
Készítsünk ábrát! (10.9. ábra)
Tudjuk, hogy az egyenlő szárú háromszög alapját a hozzá tartozó magasság felezi. Így természetesen ez a magasságvonal egyben az alaphoz tartozó oldalfelező merőleges is. És mivel a háromszög köré írható körének középpontja (*K*) az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, ezért a kör középpontja illeszkedik a *CF* egyenesre.
Ezek után elkészíthetjük megoldásunk tervét.

1. Számítsuk ki az alaphoz tartozó magasságot az *AFC* háromszögre felírt Pitagorasz-tétel segítségével!
2. Mutassuk meg, hogy *K*, a körülírt kör középpontja a háromszög belsejébe esik!
3. Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az *AFK* derékszögű háromszögre! Ebben az egyenletben csak *r* az ismeretlen. Majd számítsuk ki *r* értékét!

Hajtsuk végre a tervet!

1. Pitagorasz-tétel az *AFC* háromszögre:

$$AF^2+FC^2=AC^2,$$
$$5^2+m^2=13^2,$$
$$m^2=13^2-5^2=169-25=144,$$
$$m=12.$$

Az alaphoz tartozó magasság 12 cm.

2. Mivel $CF=m=12>5=AF$, így $FAC\measuredangle > ACF\measuredangle$, tehát az *AC* oldal felezőmerőlegese a *CF* szakaszt annak belső pontjában metszi.
3. Pitagorasz-tétel az *AFK* háromszögre:

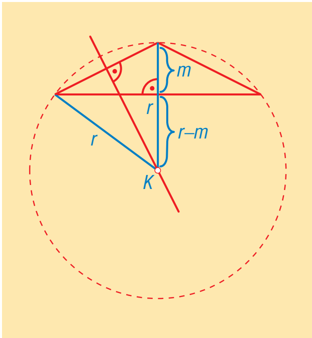
$$AK^2=AF^2+FK^2,$$
$$r^2=5^2+(12-r)^2,$$
$$r^2=25+144-24r+r^2, \quad /-r^2$$

$$24r = 169,$$

$$r = \frac{169}{24}.$$

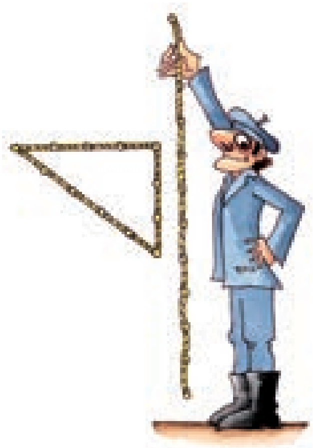
Az *ABC* háromszög körülírt körének sugara $\frac{169}{24}$ cm $\left(\approx 7{,}04 \text{ cm}\right)$.

Megjegyzés:
A megoldás 2. pontját akár ki is hagyhattuk volna, hiszen ha *K* a háromszögön kívül esne, akkor a *CK* szakasz hossza $r - m$ volna, ami viszont csak négyzetre emelt formában jelenik meg a megoldás további részében. Márpedig tudjuk, hogy $(m-r)^2 = (r-m)^2$, vagyis algebrailag ugyanazokat a kifejezéseket kapjuk a megoldás közben.



10.10. ábra 3. példa vázlatrajza, ha *K* a háromszögön kívülre esik

4. példa Már több ezer éve Mezopotámiában is ismerték azt a derékszögű háromszöget, melynek oldalai 3, 4 és 5 egység hosszúak. (Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ha 3 és 4 a két befogó hossza, és a háromszög derékszögű, akkor az átfogója valóban $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ egység hosszúságú.) Furfangos kőművesek helyenként még őrzik azt a hagyományt, hogy ha éppen egyéb mérőeszköz híján vannak, akkor egy madzagra egyenletes távolságokban csomókat kötnek úgy, hogy 12 egyenlő részt kapjanak. Majd meghajlítják a 3. csomónál, az onnantól számított 4. csomónál és az onnantól számított 5. csomót, vagy a kötél végét összefogják a kötél elejével. A hajlítási pontok között pedig feszesre kihúzzák a kötelet. És azt mondják, hogy a 3 csomó hosszú rész és a 4 csomó hosszú rész derékszöget zár be egymással.
Alátámasztható-e az igazuk a Pitagorasz-tétel segítségével?



10.11. ábra Furfangos kőműves

Megoldás:
Rövid próbálkozás után rájöhetünk, hogy a Pitagorasz-tétel abból indul ki, hogy egy háromszög derékszögű, és az oldalak közötti immár jól ismert összefüggést állítja. Tehát abból, hogy $3^2 + 4^2 = 5^2$, a Pitagorasz-tétel alapján még nem vonhatjuk le azt a következtetést, hogy a 3, 4 és 5 egységnyi oldalakkal rendelkező háromszög derékszögű!

Az ókori és legújabb kori emberek viszont mégiscsak jogosan használják a csomós madzagot, mivel igaz **a Pitagorasz-tétel megfordítása** is.

Tétel Ha egy háromszög két (rövidebb) oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

(Ezt itt most nem bizonyítjuk be.)
A Pitagorasz-tételben feltétel, hogy a háromszög derékszögű, és állítás, hogy ekkor $a^2 + b^2 = c^2$.

10.12. ábra Melyik volt előbb?

Feltétel	Állítás
Ha derékszögű,	akkor $a^2+b^2=c^2$.

A Pitagorasz-tétel megfordításában az a feltétel, hogy $a^2+b^2=c^2$, és az az állítás, hogy ekkor a háromszög derékszögű.

Feltétel	Állítás
Ha $a^2+b^2=c^2$,	akkor derékszögű.

Egy tétel megfordítása azt jelenti, hogy fölcseréljük a tétel feltételét és állítását. Nem minden tételnek igaz a megfordítása. Gondoljunk pl. arra, hogy ha egy egész szám osztható néggyel, akkor a szám páros! De megfordítva nem igaz, hogy ha egy szám páros, akkor néggyel is osztható.

Ha egy tételnek igaz a megfordítása, akkor azt szoktuk mondani, hogy a tétel megfordítható.

A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján tehát a 3, 4 és 5 egység oldalú háromszög derékszögű.

5. példa Döntsük el az alábbi számhármasokról, hogy lehetnek-e derékszögű háromszög oldalhosszai! Minden esetben hivatkozzunk rá, hogy mi alapján döntöttünk!

a) 5, 12, 13; *b*) 6, 9, 11; *c*) 16, 30, 34; *d*) 83, 116, 205.

Megoldás:

a) Vizsgáljuk a rövidebb oldalak négyzetösszegét! $5^2+12^2=25+144=$ $=25+144=169$, ez pedig éppen 13^2. Mivel a két rövidebb oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű.

b) Próbálkozzunk az előbbi módszerrel!

$6^2+9^2=36+81=117$. Ugyanakkor $11^2=121$. Nem egyenlő a két szám. A tétel megfordítását itt nem használhatjuk, mivel nem teljesül annak feltétele. Viszont a Pitagorasz-tétel szerint ha ez a háromszög derékszögű lenne, akkor teljesülni kellene a $6^2+9^2=11^2$ egyenlőségnek, amely pedig nem teljesül. Tehát a Pitagorasz-tétel szerint ez a háromszög nem derékszögű.

c) $16^2+30^2=256+900=1156$ és $34^2=1156$. A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű.

d) Mielőtt automatikusan kezdenénk a négyzetre emeléseket, figyeljük meg jobban, hogy a háromszög-egyenlőtlenség miatt ilyen oldalakkal rendelkező háromszög nincs is: $83+116=199<205$!

Pitagorasz-féle számhármasok $c<100$

a	*b*	*c*
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37
13	84	85
16	63	65
20	21	29
28	45	53
33	56	65
36	77	85
39	80	89
48	55	73
65	72	97

10.13. ábra És ebből mindből derékszögű háromszög lesz

Az eddigiekben sok derékszögű háromszöggel találkoztunk már. Volt közöttük olyan, amelynek oldalai között szerepelt irracionális szám, de sok olyannal is találkoztunk, amelynek mindhárom oldala egész szám, pl. 3, 4, 5 vagy 5, 12, 13 stb.

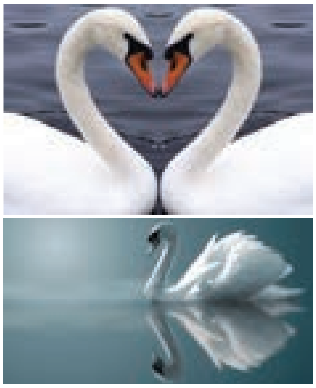
Az olyan pozitív egészekből álló számhármasokat, melyek lehetnek egy derékszögű háromszög oldalhosszai, **pitagoraszi számhármasok**nak nevezzük. Az előbb említett két számhármas a két legegyszerűbb, de rövid keresgélés után magunk is könnyedén találunk még továbbiakat. Élvezetes kutatási feladatként ajánlott önállóan bebizonyítani, hogy végtelen sok olyan pitagoraszi számhármas van, amelyben a három szám páronként relatív prím. (Ehhez nem kell megtalálnunk az összes ilyen tulajdonságú számhármast.)

Oldjuk meg!

1. Egy szabályos háromszög oldala 8 egység hosszú. Határozzuk meg a magasságát és a területét!
2. Milyen hosszúak az átlói annak a szabályos hatszögnek, amelynek oldalai 5 cm-esek?
3. Lakótelepeken gyakran kitapossák az emberek a füvet a házak közötti téren egy-egy keskeny sávban, hogy lerövidítsék az útjukat. Az útjának hány százalékát spórolja meg az az ember, aki egy 300 méter oldalú négyzet alakú téren átlósan vág át a tér szélén „körbe” haladó járda helyett? (Egyes helyeken már bevezették, hogy a lakótelepek, lakóparkok benépesedése után várnak még 1-2 hónapot, hogy kiderüljön, merre is szeretnek járni az emberek a tereken keresztül, majd oda építenek járdákat.)
4. A Területszámítás c. lecke végén bemutattunk egy játékot: a tangramot. Mekkorák az abban szereplő lapocskák oldalai és mekkora a területük, ha a kicsi négyzet oldalhosszát vesszük 1 egységnek?
5. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 17 cm, az alaphoz tartozó magassága 8 cm. Számítsuk ki a területét, a köré írt kör és a beírt kör sugarát! Hol helyezkedik el a körülírt kör középpontja?
6. Az *ABCD* téglalap *AB* oldalának hossza 32 cm, *BC* oldalának hossza pedig 24 cm. A *B* csúcstól milyen messze helyezkedik el az *AB* oldalon az a *P* pont, amely egyenlő távol van az *AC* átló két végpontjától? Adjunk szerkesztési eljárást is a pont helyének meghatározására!
7. Döntsük el, hogy az alábbi számhármasok közül melyek lehetnek derékszögű háromszög oldalai, melyek nem, és miért!
   a) 8, 15, 17; b) 50, 48, 14; c) 11, 14, 23; d) 24, 10, 26; e) 8, 31, 32

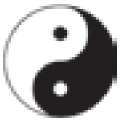
11. Geometriai transzformációk (bevezetés)

Már kicsi gyerekként találkozik mindenki a szimmetria fogalmával, akár használjuk rá ezt a kifejezést, akár nem. Már óvodáskorban is az egyik kedvenc játék a „tükörjáték”. (Olyan pózt próbálnak felvenni a gyerekek, mint a társuk, ugyanazt a mozdulatsort hajtják végre. Mintha csak közöttük lenne egy nagy tükör, és egyikük tükörképe lenne a másiknak.) Majd képeken, tárgyakon is fölfedezzük, hogy „jobbról és balról ugyanúgy néz ki”. (Abban, hogy ezeket a szimmetriákat fedezi föl először a kis ember, nagy szerepe van az agyunk működésének. Felnőtt korban is hamarabb ismerünk fel egy függőleges tengelyre való szimmetriát, mint egy vízszintesre vonatkozó, vagy főleg egy ezektől eltérő („ferde”) irányú **tengelyre vonatkozó szimmetriát**. Még kevésbé feltűnő a szemünk számára egy más jellegű szimmetria.)



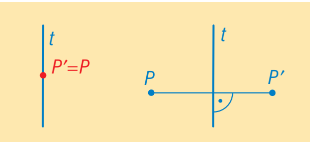
11.1. ábra Tengelyes vagy (térben) síkra szimmetrikus ábrák

11.2. ábra „Eltolási szimmetriával” rendelkező képek (ebben van egy kis csalás)

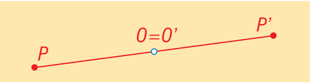


11.3. ábra Középpontosan szimmetrikus ábra

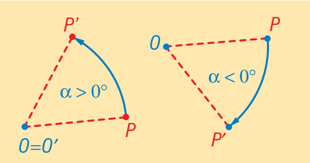
11.4. ábra Forgásszimmetriával rendelkező tárgyak és szimbólumok



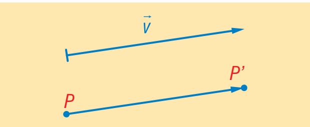
11.5. ábra Tengelyes tükrözés



11.6. ábra Középpontos tükrözés



11.7. ábra Elforgatás



11.8. ábra Eltolás

Később megtanulunk észrevenni másfajta szimmetriákat is: a **középpontos szimmetriát**, a **forgásszimmetriát**, az **eltolási szimmetriát**.

De hogy is fogja meg egy matematikus a szimmetria és a „tükörjátékok” fogalmát?

A szimmetria valóban átvitt értelemben is mindig azt jelzi, hogy dolgok, tárgyak, képek, személyek valamilyen szempontból egyformán néznek ki, egyforma szerepet töltenek be, vagy éppen egyformán viselkednek, esetleg éreznek. Visszatérve a geometriai szimmetriákhoz, azt mondjuk, hogy valamelyik szimmetriával rendelkezik egy ábra, ha azt tengelyesen vagy középpontosan tükrözve, vagy elforgatva, esetleg eltolva, saját magába megy át (persze alkalmasan megválasztott tengelyről, középpontról stb. van szó). Ezek mindegyike egy-egy geometriai transzformáció, amely minden egyes esetben pontosan megadja, hogy a sík melyik pontja hova kerüljön. Vagyis pontokhoz pontokat rendelünk hozzá egyértelműen: függvényekről van tehát szó.

Definíció A **geometriai transzformáció** olyan függvény, melynek értelmezési tartománya és képhalmaza is ponthalmaz. Egy *P* ponthoz a függvény által hozzárendelt pontot a *P* **pont képének** nevezzük, és *P’*-vel szoktuk jelölni.

Speciális síkbeli geometriai transzformációk

Tengelyes tükrözés

Adott egy egyenes: *t*.

Ha $P \in t$, akkor legyen $P' = P$!

Ha $P \notin t$, akkor P' legyen olyan pontja a síknak, amelyre a *t* egyenes a PP' szakasz felezőmerőlegese lesz!

t: a tengely. (11.5. ábra)

Középpontos tükrözés

Adott egy pont: *O*.

Legyen $O' = O$!

Ha pedig $P \neq O$, akkor P' legyen olyan pontja a síknak, amelyre *O* felezi a PP' szakaszt!

O: a középpont. (11.6. ábra)

Pont körüli elforgatás

Adott egy pont: *O* és egy irányított szög: α.

Legyen $O' = O$!

Ha pedig $P \neq O$, akkor *P’* legyen olyan pontja a síknak, amelyre $PO = P'O$ és $POP' \sphericalangle = \alpha$!

O: a forgatás középpontja, α az elforgatás szöge.

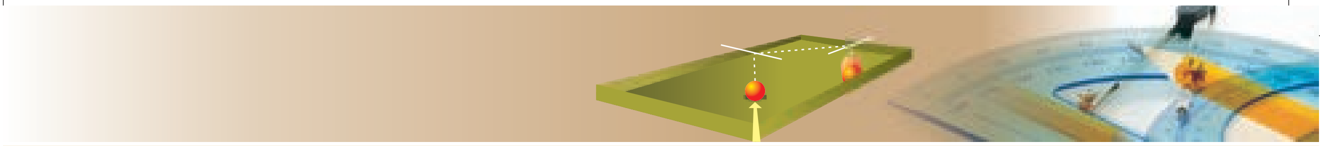
Az irányított szög lehet pozitív is, negatív is, attól függ, milyen irányban szeretnénk forgatni. Megállapodás szerint, ha az óramutató járásával ellentétes irányba forgatunk, azt nevezzük pozitív iránynak. (11.7. ábra)

Eltolás

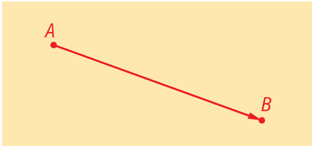
Adott egy vektor: $\vec{v}$.

Minden *P* pontnak olyan *P’* pont legyen a képe, amelyre $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$!

$\vec{v}$: az eltolás vektora. (11.8. ábra)



Definíció Ha megkülönböztetjük egy szakasz kezdő- és végpontját, akkor **irányított szakasz**hoz jutunk. Pl.: az A pontból a B pontba mutató irányított szakasz: $\overrightarrow{AB}$.
Az irányított szakaszra jellemző a hosszán kívül az iránya (milyen egyenessel párhuzamos) és az irányítása is (melyik a kezdőpont és melyik a végpont).



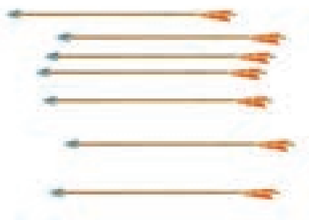
11.9. ábra Irányított szakasz

Az azonos hosszúságú, irányú és irányítású irányított szakaszok halmazát **vektor**nak nevezzük, jele: $\vec{v}$.

Szoktuk egyetlen irányított szakaszra is használni a vektor elnevezést. A vektorokra majd visszatérünk még.

Ponthalmaz képét a ponthalmazt alkotó pontok képének a halmazaként kaphatjuk meg. Ez a gyakorlatban általában nem így szokott végbemenni, hiszen egy-egy síkidomnak általában végtelen sok pontja van. Ezért érdemes felhasználnunk a transzformációk néhány jó tulajdonságát.

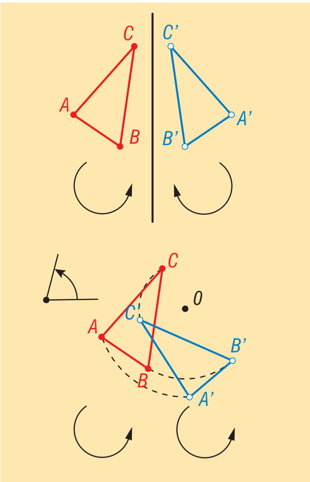
Mind a négy említett transzformációra jellemző, hogy egyenes képe egyenes, sőt szakasz képe szakasz. (Gondoljunk bele, hogy ez nem természetes, hiszen pl. a görbe tükröknél ez nem teljesül!) Ez máris lehetővé teszi, hogy a sokszögek képét csúcsaik képének megadása révén ábrázoljuk. A képpontokat csak annak megfelelően össze kell kötnünk, ahogy az eredeti pontok össze voltak kötve az eredeti sokszögben.



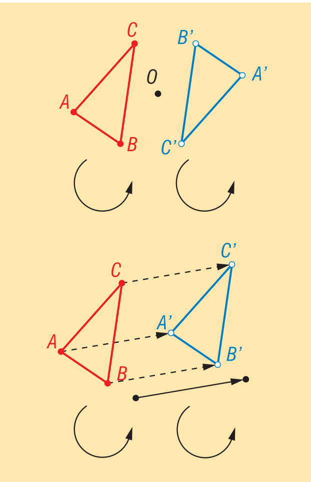
11.10. ábra Vektor

Mind a négy transzformáció **távolságtartó**, vagyis bármely két pont távolsága egyenlő a pontok képének távolságával. Az ezen tulajdonsággal rendelkező transzformációkat **egybevágósági transzformációk**nak is nevezzük. Ez már a kör képének megadását is leegyszerűsíti, hiszen így elég a kör középpontjának képét megadnunk (tükröznünk, elforgatnunk, eltolnunk), a képe ugyanakkora sugarú kör lesz. A távolságtartó tulajdonság következménye a **szögtartóság**.

Figyeljük meg, hogy egy háromszög és képe azonos körüljárású-e az egyes transzformációk esetében.



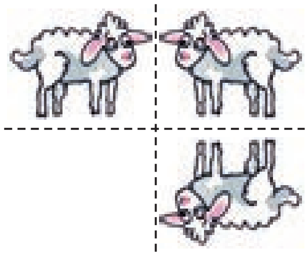
11.12. ábra Tengelyes tükrözés, elforgatás



11.13. ábra Középpontos tükrözés, eltolás

11.11. ábra Figyeljük meg a körüljárási irányt!

Vegyük észre, hogy egyedül a tengelyes tükrözés fordítja meg a körüljárási irányt, a másik három transzformációnál változatlan marad!



11.14. ábra Két egymásra merőleges tengelyre való tükrözés egymásutánja középpontos tükrözéssel egyenértékű

A rajzok annak megjegyzésében is segítenek, hogy a középpontos tükrözés és az eltolás minden szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át. ($AB \parallel A'B'$)

A hegyesszögű elforgatás esetén viszont a szakasz és képe ugyanakkora szöget zár be egymással, mint az elforgatás szöge.

A négy transzformáció közül a pont körüli elforgatásnak és az eltolásnak fordulhatnak elő speciális esetei a szög nagyságától, illetve a vektor nagyságától függően.

Ha az elforgatás szöge 180°, akkor éppen a középpontos tükrözést kapjuk.

Ha az elforgatás szöge 0°, vagy ±360°, akkor minden pont helyben marad a transzformáció után. Ugyanezt a transzformációt kapjuk akkor is, ha 0 hosszúságú vektorral (nullvektorral) végzünk eltolást. Ezt a transzformációt identikus transzformációnak hívjuk, röviden **identitás**nak; magyarul pedig **helybenhagyás**nak.

További segítségünkre lehet, ha megállapítjuk, hogy az egyes transzformációknál mely pontoknak a képe lesz önmaga. Ezeket a pontokat a transzformáció **fixpont**jainak nevezzük.

Tengelyes tükrözésnél a tengely minden pontja fixpont (ezért magát a tengelyt fixegyenesnek mondjuk), más fixpont pedig nyilván nincs. A középpontos tükrözés és a pont körüli elforgatás egyetlen fixpontja a középpont. Az eltolásnál pedig minden, az **eltolás vektorával** párhuzamos egyenes invariáns.

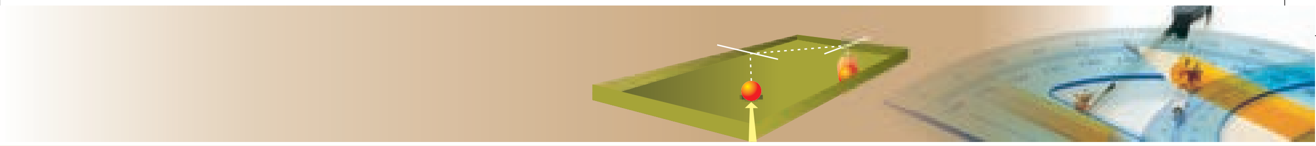
11.15. ábra Eltévedtem

Találkozunk olyan egyenesekkel is, amelyeknek a képe önmaga (de nem feltétlenül fixpont minden pontja). Ezeket a transzformáció **invariáns egyenes**einek nevezzük. A tengelyes tükrözésnek invariáns egyenese minden, a tengelyre merőleges egyenes. (És természetesen maga a tengely is.) A középpontos tükrözésnél minden, a középponton áthaladó egyenes. Az elforgatásnál általában véve nincs ilyen (hacsak nem valamilyen speciális elforgatásról van szó). Az eltolásnál pedig minden, a vektorral párhuzamos egyenes invariáns.

Célszerű még rögzítenünk a tengelyes tükrözésnek azt a jó tulajdonságát, hogy a tengelyt metsző egyenes képe ugyanabban a pontban metszi a tengelyt, mint az eredeti egyenes. Ha pedig egy egyenes párhuzamos volt a tengellyel, akkor annak képe is párhuzamos lesz a tengellyel.

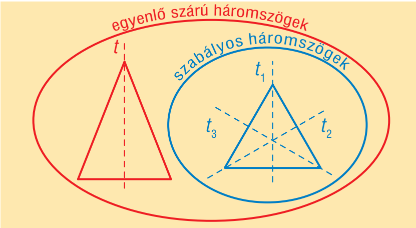
Az olvasóra bízzuk a következő gondolkodtató feladat megoldását. Legalább milyen magas legyen az a tükör, amelyben a feje tetejétől a talpáig látja magát egy 164 centiméter magas ember? Milyen magasra helyezze ehhez a tükröt a falon, ha a szemmagasságának és testmagasságának különbsége 12 cm? A feladat megoldása előtt fontoljuk meg, hogy csak a szemünkbe érkező fénysugarakat érzékeljük! Van-e jelentősége annak, hogy mekkora távolságra áll az ember a tükörtől? Készítsünk rajzot! Segíti a megoldást.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 216 2012.06.25. 14:44:02

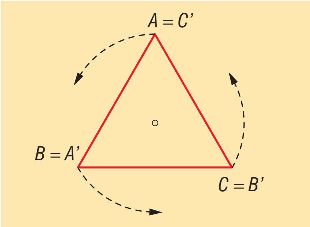


Vegyük szemügyre ezután azokat a síkidomokat, amelyek rendelkeznek valamilyen szimmetriával!
Kezdjük a sokszögekkel!

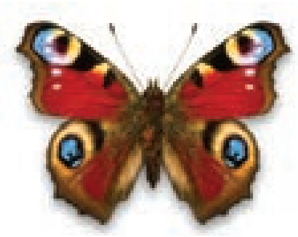
Háromszögek:



11.16. ábra Tengelyes szimmetria



11.17. ábra Forgásszimmetria

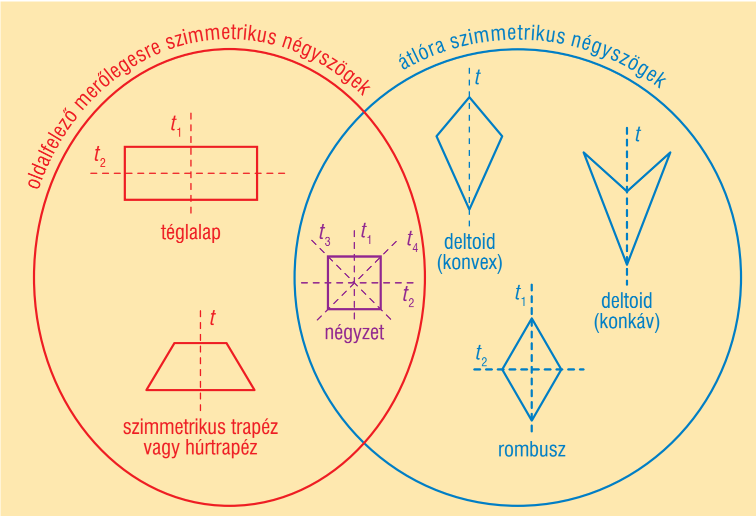


11.18. ábra Tengelyes szimmetria az állatvilágban

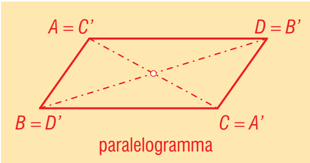
Tengelyesen szimmetrikus háromszögek: (11.16. ábra).
Forgásszimmetrikus háromszög: egyedül a szabályos háromszög. (11.17. ábra)
Középpontosan szimmetrikus háromszög nincs.

11.19. ábra Tengelyes szimmetria a növényvilágban

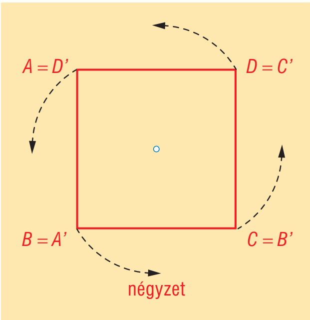
Négyszögek:
Oldalfelező merőlegesre szimmetrikusak: szimmetrikus trapéz vagy más néven húrtrapéz és speciális szimmetrikus trapézként a téglalap. (11.20. ábra)
Átlóra szimmetrikusak: deltoid (konvex és konkáv) és speciális deltoidként a rombusz. (11.20. ábra)
Oldalfelező merőlegesre és átlóra is szimmetrikus: a négyzet. (11.20. ábra)



11.20. ábra Négyszögek tengelyes szimmetriája



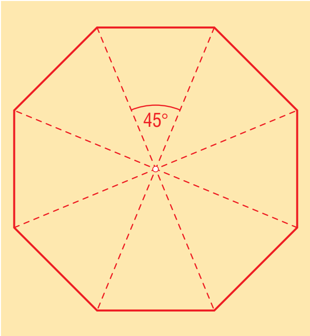
11.21. ábra Középpontosan szimmetrikus négyszög: paralelogramma



11.22. ábra Forgásszimmetrikus négyszög: négyzet

Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor az paralelogramma. (Tehát minden speciális paralelogramma is középpontosan szimmetrikus: a téglalap, a rombusz és a négyzet.) (11.21. ábra)
Forgásszimmetrikus négyszög: a négyzet. (11.22. ábra)

1. példa Melyik az a legkisebb pozitív irányszögű elforgatás, amely egy szabályos nyolcszöget önmagába visz át?

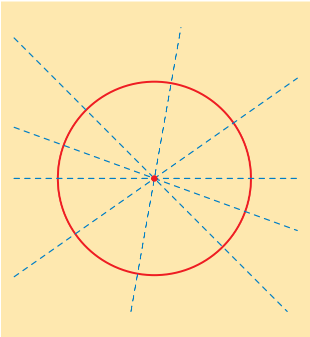


11.23. ábra A középpont körüli +45°-os elforgatás saját magába viszi át

Megoldás:
Csak a szabályos nyolcszög (11.23. ábra) középpontja körüli forgatás jöhet szóba, és mivel csúcsot csúcsba kell vinnie, ezért akkor lesz a legkisebb szögű, ha egy csúcsot a vele szomszédos csúcsba visz át.

Kössük össze a nyolcszög középpontját a csúcsaival! Mivel a szabályos nyolcszög minden belső szöge egyenlő, ezért a keletkezett egyenlő szárú háromszögek szárszögei is egyenlők lesznek. Mivel 8 darab van belőlük, ezért egyenként $\frac{360°}{8} = 45°$ -osak. A keresett transzformáció tehát a nyolcszög középpontja körüli 45º-os elforgatás.

Minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus. Hiszen a középpontja körül $\frac{360°}{n}$ nagyságú szöggel elforgatva (akár pozitív, akár negatív irányban) saját magába megy át (ahol n a sokszög oldalainak száma). A szabályos háromszögnél éppen a harmadik 120°-os elforgatás után tér vissza minden pont az eredeti helyére, ezért azt mondjuk, hogy harmadrendűen forgásszimmetrikus. Ugyanígy a szabályos n oldalú sokszög n-edrendű forgásszimmetriával rendelkezik.

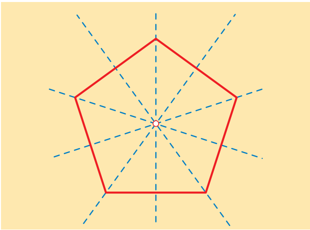


11.24. ábra Minden a középponton áthaladó egyenesre szimmetrikus

A kört (11.24. ábra) a középpontja körül akármekkora szöggel forgatjuk el, önmagába megy át; azt mondjuk, teljes forgásszimmetriával rendelkezik.

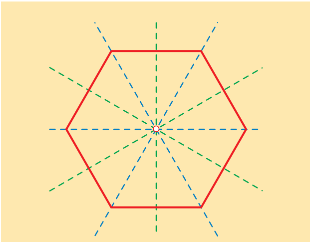
A kör természetesen középpontosan is szimmetrikus, és akármelyik, a középpontján áthaladó egyenesre nézve tengelyesen szimmetrikus is.

2. példa Hány szimmetriatengelye van egy szabályos
a) ötszögnek, b) hatszögnek, c) n-szögnek?



11.25. ábra Öt szimmetriatengely

Megoldás:
a) Minden oldal felezőmerőlegese szimmetriatengely. Ezek átmennek a szemközti csúcson. Tehát a szabályos ötszögnek 5 szimmetriatengelye van. (11.25. ábra)
b) Két-két szemközti oldal felezőmerőlegese egybeesik, ezek szimmetriatengelyek, de így nyilván csak 3 ilyen van. Viszont a két-két szemközti csúcsot összekötő egyenesek is szimmetriatengelyek, és azokból is 3 van. Így a szabályos hatszögnek 6 szimmetriatengelye van. (11.26. ábra)
c) Ugyanígy látható be, hogy az n oldalú szabályos sokszögnek n darab szimmetriatengelye van, akár páros az n értéke, akár páratlan.



11.26. ábra Hat szimmetriatengely

A szabályos sokszögek közül csak a páros oldalszámúak a középpontosan szimmetrikusak.

Az „eltolási szimmetria” kifejezést a lecke elején idézőjelben használtuk. Az egyik flamingó valóban úgy néz ki, mintha a másikat csak eltoltuk volna. Ugyanakkor a két flamingó együtt már nem alkot eltolási szimmetriával rendelkező képet, hiszen az azt jelentené, hogy van egy olyan eltolás (nem a nullvektorral), amely a képet önmagába viszi át. Ehhez pedig kellene még egy flamingó, majd még egy, még egy stb.

Ehhez persze végtelen sok flamingóra lenne szükség, ami máris lehetetlen…

De ha csak elképzeljük, hogy ugyanilyen rendben végtelen sok van belőlük, akkor az így nyert kép már rendelkezik az eltolási szimmetriával.

Ezt a végtelenséget képviselik a magyar népművészetben a kézimunkák szélein futó egyes minták vagy a faliszőnyegek bizonyos mintamotívumai (még akkor is, ha ezeknek a kézimunkáknak jól meghatározott szélük van):

Terítő széle (Kalotaszeg) – a minta érdekessége, hogy két sorban is megfigyelhető a monoton ismétlődő minta (külön az indáknál és külön a virágmintáknál), de ha együtt nézzük a két mintát, akkor már nem találunk olyan eltolást, amely önmagába vinné (az egyik fajta mintából öt van, míg a másik fajtából csak négy).

Lássunk további népművészeti példákat a szimmetriákra!

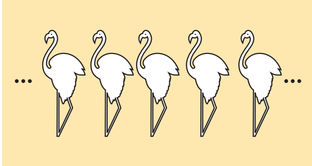
3. példa Keressük meg, hogy rendelkezik-e valamilyen szimmetriával az egész minta vagy annak egy részlete! Figyeljük azt is, megtöri-e valahol a szimmetriát a kézimunka készítője!
A 11.29. ábra a), b), c) és e) képein látható kézimunkák Kalotaszegről származnak, a d) gyimesi csángó párna.

a)

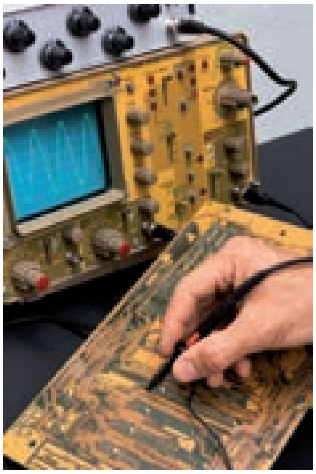
b)

c)

11.29. ábra Szimmetria a népművészetben



11.27. ábra Valódi eltolási szimmetria



11.28. ábra Oszcilloszkóp monitor

d)  e) 

11.29. ábra Szimmetria a népművészetben

11.30. ábra Kalotaszegi népviselet

Megoldás:

Csak néhányat sorolunk fel a felfedezhető szimmetriák közül.

a) Forgásszimmetrikus (a terítő közepén lévő minta hatodrendűen, a szélén lévő nyolcadrendűen).

b) A terítő széleivel párhuzamos egyenesekre tengelyesen szimmetrikus. (Az átlókra már nem.) A terítő szélén megfigyelhető a „majdnem végtelen” eltolással önmagába vihető minta.

c)  Ez a rész középpontosan szimmetrikus, a közepén lévő négyszirmú virág pedig külön tengelyes szimmetriákkal is rendelkezik.  Egy-egy ilyen rész függőleges, vízszintes és átlós tengelyekre való szimmetriát is mutat.

d)  Egy-egy ilyen kicsi minta középpontos szimmetriával rendelkezik.

e) Tengelyesen szimmetrikus.

Oldjuk meg!

11.31. ábra Népi motívum

1. Keressük meg, hogy a ránézésre tengelyesen szimmetrikus minta hímzője mely helyeken töri meg akár a színek, akár a formák tengelyes szimmetriáját! (Kalotaszegi fiatalasszony fátylának hímzett sarka.)

2. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(6;\ 2)$, $B(1;\ 4)$ és $C(-2;\ 3)$. Tükrözzük tengelyesen a háromszöget
a) az y tengelyre; b) az x tengelyre; c) az $x = 1$ egyenletű egyenesre; d) az $y = x$ egyenletű egyenesre, és adjuk meg a képként keletkezett háromszögek csúcspontjainak koordinátáit!

3. Tükrözzük középpontosan az origóra az $ABCD$ négyszöget, ha $A(1;\ -7)$, $B(5;\ -2)$; $C(3;\ 6)$ és $D(1;\ 2)$! Adjuk meg az $A'B'C'D'$ négyszög csúcsainak koordinátáit!

4. Toljuk el az x tengellyel párhuzamosan az x tengely pozitív felének irányába mutató 3 egység hosszúságú vektorral az ABC háromszöget, ha $A(0; 0)$, $B(4; 2)$ és $C(-2; 4)$! Adjuk meg az $A'B'C'$ háromszög csúcsainak koordinátáit!
Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú, derékszögű háromszög! (Gondoljunk az origó körüli 90°-os elforgatásra!)

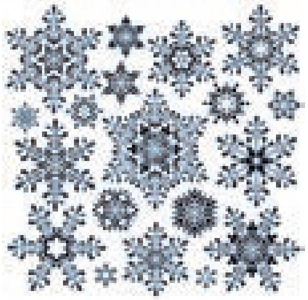
5. Hány oldalú lehet az a szabályos sokszög, amelyiknek legalább nyolc szimmetriatengelye van?

6. Egy háromszögről a következőket tudjuk: pontosan egy szimmetriatengelye van, és van egy 90°-os szöge. Mutassuk meg, hogy oldalainak aránya $1:1:\sqrt{2}$!

7. Milyen négyszög lehet az, amelyik tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus?

8. Keressünk minél többféle közlekedési táblát, amelyik rendelkezik valamilyen szimmetriával!

9. Milyen szimmetriákkal rendelkeznek a képen látható hópelyhek?



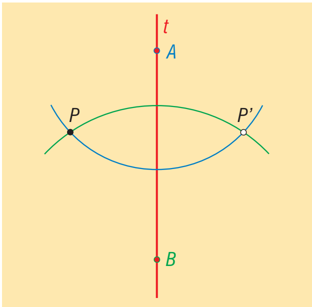
11.32. ábra Hópelyhek

12. Geometriai transzformációkkal kapcsolatos szerkesztések

1. példa Szerkesszük meg egy pont tengelyes tükörképét minél kevesebb szerkesztési lépés felhasználásával!

Megoldás:
A definíció alapján bárki könnyedén elvégezhet egy szerkesztést. (Merőlegest állítunk az adott pontból a tengelyre, és a tengellyel való metszésponttól ugyanolyan távolságban vesszük fel ezen a merőlegesen a pont tükörképét a tengely túloldalán, mint amennyire az eredeti pont van az egyik oldalon.) Mutatunk egy gyorsabb eljárást.

A tengely egy tetszőleges pontjából (A) mint középpontból körözzünk ennek a pontnak és a tükrözni kívánt pontnak a távolságával! Ezt ismételjük meg a tengely egy tetszőleges másik pontjával (B)! A két körív egyik metszéspontja a tükrözendő pont lesz, a másik pedig a pont tükörképe. (12.1. ábra)

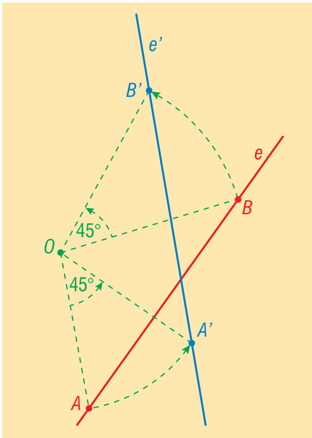


12.1. ábra 1. példa

A másik három tanult egybevágósági transzformáció szerkesztésének kivitelezéséhez használjuk fel a korábban tanult szerkesztési lépéseket!

2. példa Forgassuk el az e egyenest a rá nem illeszkedő O pont körül pozitív irányba 45°-kal!

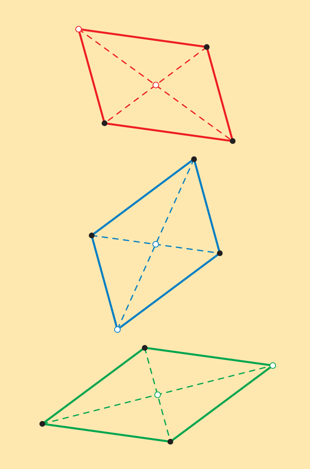
Megoldás:
Mivel egyenes képe egyenes, ezért elegendő az e egyenes két tetszőleges pontját elforgatnunk az O pont körül, majd ezeket egy egyenessel összekötni. Ez lesz az e' egyenes. (12.2. ábra)



12.2. ábra 2. példa

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 221 2012.06.25. 14:44:38

Vegyük észre, hogy korábbi megállapításunkkal összhangban az e és az e' egyenes valóban 45°-os szöget zár be egymással!



12.3. ábra 3. példa

3. példa Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott három csúcspontja! Hány megoldás van?

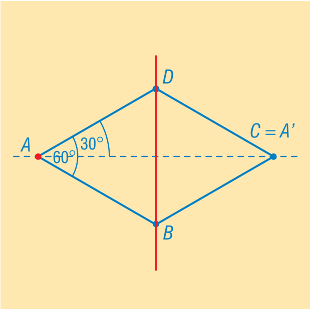
Megoldás:
Mivel a paralelogramma középpontosan szimmetrikus, ezért a három megadott csúcs közül valamelyik kettő az egyik átló két végpontja lesz. Ennek felezőpontja lesz a szimmetria-középpont, tehát erre a felezőpontra tükrözzük a harmadik pontot. Ez lesz a paralelogramma hiányzó csúcsa.

Ebből a leírásból az is kiderül, hogy a három megadott pont közül bármelyik kettő lehet az egyik átló két végpontja, így három különböző paralelogramma lehet, ha ezek a pontok nem esnek egy egyenesbe. Viszont egyetlen paralelogramma sem lesz, ha ezek a pontok egy egyenesbe estek.

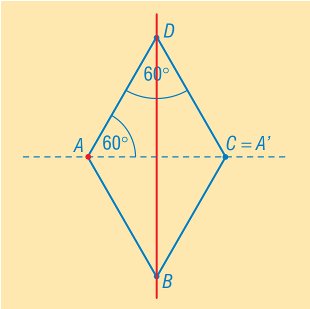
(Mindhárom ábrán a fekete színnel jelölt pontok voltak megadva eredetileg, és a negyedik pontot szerkesztettük hozzájuk.)

4. példa Szerkesszünk rombuszt, ha adott az egyik átlójának egyenese és egy erre nem illeszkedő csúcsa, ha tudjuk, hogy a rombusz egyik szöge 60°-os!

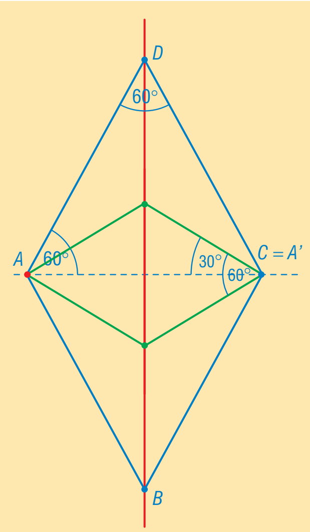
Megoldás:
Készítsünk vázlatrajzot! (A pirossal jelölt ponthalmazok adottak.)



12.4. ábra Egyik lehetőség



12.5. ábra Másik lehetőség



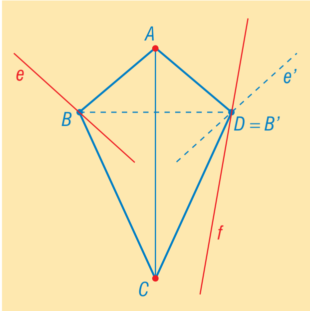
12.6. ábra 4. példa

Két lehetőség is van: vagy a megadott pontnál helyezkedik el a 60°-os szög, vagy a megadott szimmetriatengelyen.

Használjuk ki mindkét esetben, hogy a rombusz az átló egyeneseire tengelyesen szimmetrikus! Tükrözzük a megadott pontot (A-t) az adott átlóegyenesre: ez lesz a C pont. És mivel a másik átló egyenesére is szimmetrikus a rombusz, ezért az átló felezi az A és a C csúcsnál lévő szöget (amely tehát vagy 60°-os, vagy 120°-os). Ezért az első esetben az AC szakaszra az A pontban mindkét oldalra egy-egy 30°-os szöget kell szerkesztenünk (12.4. ábra), a második estben pedig egy-egy 60°-os szöget. Ezek új szögszárai metszik ki az adott átlóegyenesből a B és a D pontot. (12.5. ábra)

(Természetesen nincs megoldás, ha az adott pont az adott egyenesre illeszkedik.)

5. példa Adott egy deltoid szimmetriaátlójának (szimmetriatengelyére illeszkedő átlójának) két végpontja, valamint a másik két csúcsára illeszkedő egy-egy egyenes. Szerkesszük meg a deltoidot!

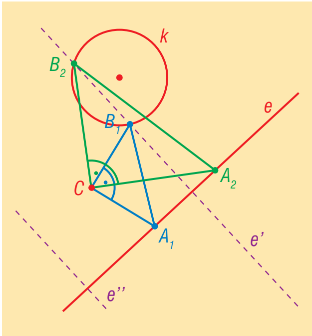


12.7. ábra 5. példa

Megoldás:
A vázlatrajzon pirossal jelöltük a megadott pontokat, ponthalmazokat. Itt is a tengelyes szimmetriát tudjuk kihasználni. Mivel a B pont illeszkedik az e egyenesre, ezért a B pontnak a szimmetriaátló egyenesére vonatkozó tükörképe, a D pont illeszkedni fog az e egyenesnek a szimmetriaátló egyenesére vonatkozó tükörképére, e'-re. Ugyanakkor a D pont illeszkedik az f egyenesre is, így a D pont az e' és az f egyenes metszéspontja lesz. Ezt a pontot már csak tükröznünk kell a szimmetriatengelyre, így kapjuk a B pontot. (12.7. ábra)

Ha az e' és az f egyenes nem metszi egymást, akkor nincs megoldás. Ha az e' és az f egyenes egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van. Ha pedig az e' és az f egyenes metszik egymást, akkor majdnem minden esetben pontosan egy deltoidot kapunk, kivéve ha a B, a D és vagy az A, vagy a C egy egyenesbe esik (ilyenkor szintén nincs megoldása a feladatnak).

6. példa Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott az átfogóval szemközti csúcs, továbbá az átfogó egyik végpontjára illeszkedő egyenes és a másik végpontjára illeszkedő kör!



12.8. ábra 6. példa

Megoldás:
A vázlatrajzon pirossal jelöltük a megadott pontot, egyenest, kört.

Ez esetben azt használjuk ki, hogy az egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik befogója a másik befogónak 90°-os elforgatottja a közös pontjuk (C) körül. Így ha $A \in e$, akkor az A elforgatottja: $A' = B \in e'$ vagy e''. (Azért beszélhetünk kétféle elforgatottról, mert a forgatás iránya nincs meghatározva.) Ugyanakkor $B \in k$ is teljesül, tehát a B pont az adott egyenes valamelyik elforgatottjának és a körnek a közös pontja lesz, ha ez létezik. A B pontot elforgathatjuk C körül 90º-kal az ellenkező irányba. Ez lesz a megfelelő B ponthoz tartozó A pont. (12.8. ábra)

Ábránkon az e egyenesnek csak a pozitív irányú elforgatottja metszi az adott k kört, a negatív nem. Így ebben az esetben két megoldás keletkezett: a kék és a zöld háromszög. Az eddigiekből az is látszik, hogy legfeljebb négy megoldás lehet, de lehet három, kettő vagy egy megoldás is. És az is lehet, hogy egyáltalán nincs megoldása a feladatnak, ha a kör és az egyenes úgy helyezkedik el, hogy az egyenesek egyik irányú 90°-os elforgatottjának sincs közös pontja a körrel.

Oldjuk meg!

1. Tükrözzünk egy kört egy szelője egyenesére!
2. Adott egy négyzet egyik csúcsa és középpontja. Szerkesszük meg a négyzetet!
3. Tükrözzünk egy háromszöget egyik oldalának felezőpontjára! Milyen síkidomot alkot az eredeti háromszög és a képként kapott háromszög egyesítése?
4. Forgassunk el egy tompaszögű (nem egyenlő szárú) háromszöget a legnagyobb oldallal szemközti csúcsa körül 90°-kal pozitív irányba! Mekkora szöget zár be egymással a leghosszabb oldal egyenese és a képe? És a legrövidebb oldal egyenese és annak a képe?
5. Egy 6 cm oldalú szabályos háromszöget tükrözzünk a középpontjára! Mekkora a területe az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítéseként kapott sokszögnek? Milyen szimmetriákkal rendelkezik ez a sokszög?
6. Adott egy egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye és az erre illeszkedő csúcsa. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott még a másik két csúcson átmenő egy-egy egyenes! Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételét!
7. Adott két párhuzamos egyenes és közöttük egy pont. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egyik csúcspontja az adott pont, másik két csúcsa pedig illeszkedik egy-egy megadott egyenesre!

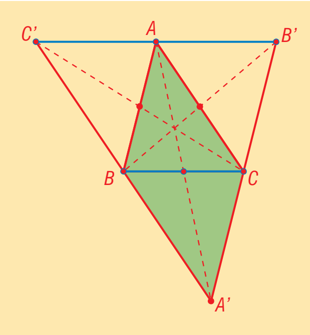
13. Geometriai transzformációkkal kapcsolatos bizonyítások
(Magasságpont, középvonal, súlyvonal)

1. példa Tükrözzünk egy háromszöget minden oldalának felezőpontjára! Milyen ponthalmazt határoz meg az eredeti háromszög és a tükörképek egyesítése?

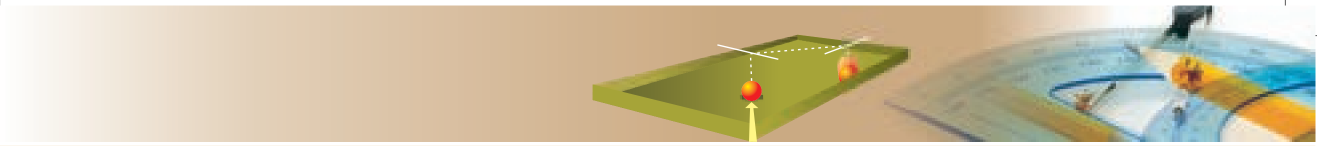
Megoldás:
A BC oldal felezőpontjára való tükrözéskor a B pont képe a C pont, és a C pont képe a B pont lesz. Az A pont tükrözéséhez használt segédszakaszt szaggatottan jelöltük (AA'). A középpontos tükrözés tulajdonságai szerint $AB \parallel CA'$ és $AC \parallel BA'$. Ezért az $ABA'C$ négyszög egy paralelogramma. De ugyanígy paralelogrammát kapunk a másik két oldal felezőpontjára való tükrözéskor is ($ABCB'$ és $AC'BC$).

E két utóbbi paralelogrammának közös oldala a BC, és ezzel párhuzamos oldaluk a $C'A$ és az AB', melyeknek közös pontja az A. Így ez a két szakasz egy egyenesbe esik. Ugyanígy egy egyenesbe esik a B', a C és az A' pont is, valamint az A', a B és a C' pont is.

A fenti gondolatmenetből az is kiderül, hogy $BC = C'A = AB'$.



13.1. ábra $ABA'C$ négyszög paralelogramma



Tehát a kapott síkidom egy háromszög: $A'B'C'$, melynek oldalai párhuzamosak az ABC háromszög oldalaival és (páronként) kétszer olyan hosszúak.

Miután az ABC háromszöget tükröztük az oldalfelező pontjaira, rajzoljuk be az így kapott ábrába az ABC háromszög magasságvonalait!

Vegyük észre, hogy az m_a magasságvonal nemcsak a BC oldalra merőleges, hanem a $B'C'$ oldalra is! Továbbá mivel átmegy az A ponton, ezért az előző példa szerint éppen felezi a $B'C'$ szakaszt. Vagyis az ABC háromszög m_a magasságvonala egyben az $A'B'C'$ háromszög $B'C'$ oldalának a felezőmerőlegese is. Ugyanígy a másik két magasságvonal is egy-egy oldalfelező merőleges szerepét tölti be a nagy háromszögben. (13.2. ábra)

Ezek alapján megállapítható, hogy bármely háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást, hiszen egy másik háromszögben oldalfelező merőlegesek szerepét töltik be, amelyekről már korábban bebizonyítottuk, hogy egy pontban metszik egymást.

Ez az egyik legszebb gondolat, amellyel középiskolai matematikai tanulmányaink alatt találkozhatunk.

Tétel A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot a háromszög **magasságpont**jának nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hol helyezkedhet el egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszög magasságpontja! (13.3. ábra)

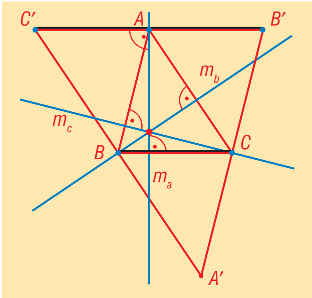
2. példa Mutassuk meg, hogy a paralelogramma két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakasz párhuzamos és egyenlő hosszú a paralelogramma másik két oldalával!

Megoldás:

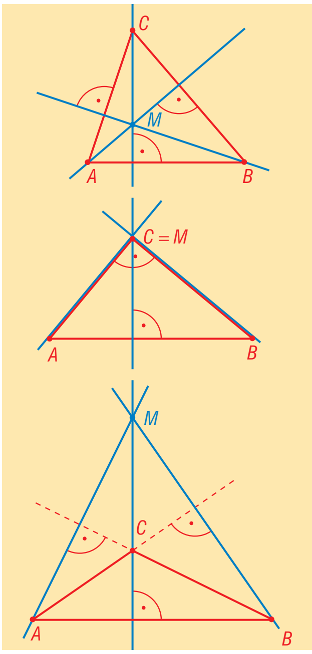
Az $ABCD$ négyszög paralelogramma, ezért $AD \parallel BC$ és $AD = BC$. De így az is igaz, hogy $AE \parallel BF$. És mivel E is és F is oldalfelező pont, ezért $AE = BF$. Tehát az $EABF$ négyszög is paralelogramma, hiszen két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú. Ebből pedig már következik a feladat állítása: $EF \parallel AB$ és $EF = AB$. (Ez ugyanígy igaz a CD oldalra is. 13.4. ábra)

Az EF szakasz a paralelogramma egyik **középvonala**.

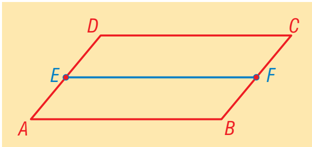
Definíció Egy négyszög két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a **négyszög középvonalá**nak nevezzük. Minden négyszögnek két középvonala van. (13.5. ábra)



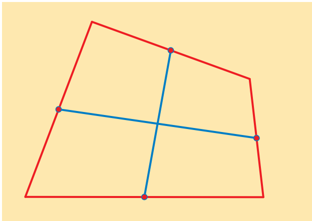
13.2. ábra A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást



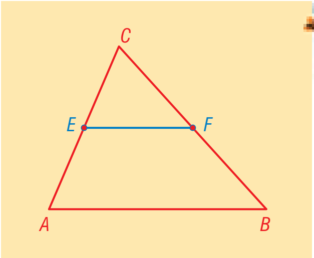
13.3. ábra Hol van a magasságpont?



13.4. ábra Középvonal – 2. példa



13.5. ábra Négyszög középvonalai



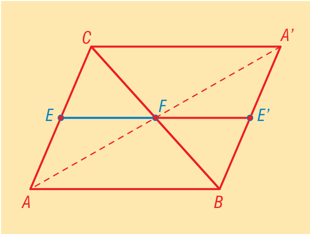
13.6. ábra Háromszög középvonala

Definíció Egy háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakasz a **háromszög** egyik **középvonala**. (13.6. ábra)

(Minden háromszögnek három középvonala van.)

Tétel A háromszög bármely középvonala párhuzamos a háromszög harmadik (általa össze nem kötött) oldalával, és hossza ennek az oldalnak a felével egyenlő.

Az ábra jelöléseivel: $EF \parallel AB$ és $EF = \frac{1}{2}AB$.



13.7. ábra Tükrözzük a háromszöget az *F* pontra!

Bizonyítás:

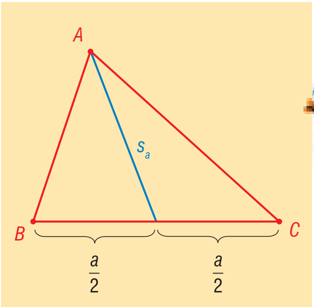
Tükrözzük a háromszöget az adott középvonal egyik végpontjára (*F*-re)!

Mivel ez a pont a háromszög egyik oldalfelező pontja, így az *ABA'C* négyszög egy paralelogramma. (13.7. ábra)

Az *E*, az *F* és az *E'* pont egy egyenesbe esik, és a tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt az *E'* is felezőpontja az *A'B* oldalnak. Tehát *EE'* középvonala az *ABA'C* paralelogrammának. Így $EE' \parallel AB$ és $EE' = AB$. Ezzel a párhuzamosságot igazoltuk. A hosszra vonatkozó állítás pedig azért teljesül, mert $EF = \frac{1}{2} \cdot EE' = \frac{1}{2} \cdot AB$.

Vegyük észre (a lecke 1. példája alapján), hogy egy háromszög oldalfelező merőlegesei egybeesnek a középvonal-háromszög magasságvonalaival!

Azt is észre vehetjük az 1. példa ábráján, hogy a tükrözésekhez használt segédszakaszok is egy ponton mennek át. Ezek olyan nevezetes vonalai a háromszögnek, amilyenekkel eddig nem találkoztunk.



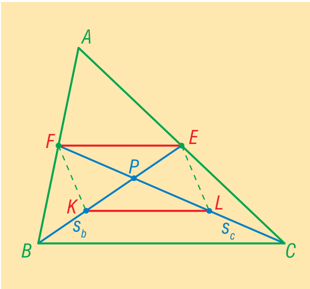
13.8. ábra Háromszög súlyvonala

Definíció A háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög **súlyvonal**ának nevezzük. (13.8. ábra)

Minden háromszögnek három súlyvonala van.

Szokásos jelölése: s_a, s_b, s_c.

3. példa Mutassuk meg, hogy a háromszög bármely két súlyvonala harmadolva metszi egymást! (A metszéspont a csúcstól távolabbi harmadolópontba esik.)



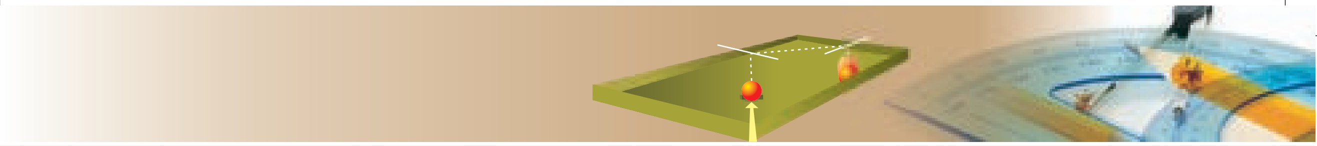
13.9. ábra $FE \parallel KL$ és $FE = KL$

Megoldás:

Legyenek *E* és *F* a háromszög oldalfelező pontjai (13.9. ábra), *P* az s_b és az s_c súlyvonal metszéspontja, *K* és *L* pedig a *BP*, illetve a *CP* szakasz felezőpontjai!

Egyrészt *FE* középvonala az $ABC\triangle$-nek, így $FE \parallel BC$ és $FE = \frac{1}{2} \cdot BC$.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 226 2012.06.25. 14:45:10

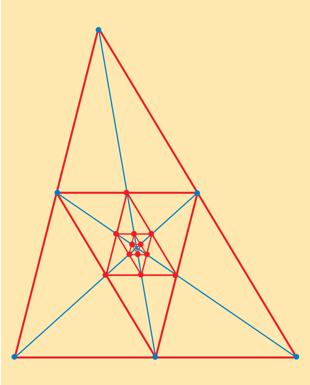


Másrészt KL középvonala a $PBC\triangle$-nek, így $KL \parallel BC$ és $KL = \frac{1}{2} \cdot BC$.

Ezért $FE \parallel KL$ és $FE = KL$. Tehát az $FKLE$ négyszög paralelogramma, amelynek az átlói felezik egymást. Vagyis $FP = PL = LC$. Ugyanígy $EP = PK = KB$.

A P pont tehát mindkét súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja.

Vegyük észre, hogy mivel az iménti gondolatmenet bármely két súlyvonalra érvényes, ezért az s_a és az s_b súlyvonal ugyanabban a pontban metszi az s_c súlyvonalat! (A C-től távolabbi harmadolópontjában.)
Tehát a három súlyvonal egy ponton halad át.



13.10. ábra Egy háromszögnek és a középvonal-háromszögének egybeesnek a súlyvonalai. A súlypont mindegyik középvonal-háromszögben benne van

Tétel A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot a háromszög súlypontjának nevezzük. A **súlypont** mindhárom súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontjába esik.

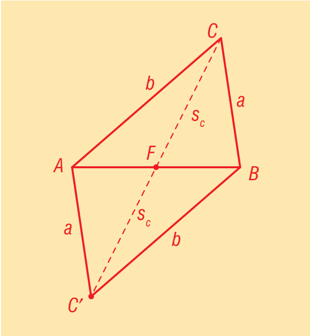
4. példa Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög bármely súlyvonala rövidebb, mint a két szomszédos oldal számtani közepének hossza!

Megoldás:

Írjuk föl az ábra jelöléseivel az állítást: $\frac{a+b}{2} > s_c$!

Tükrözzük a háromszöget az AB oldal felezőpontjára!

Az így kapott paralelogramma oldalai a, illetve b hosszúságúak, a C csúcsból induló átlója pedig $2 \cdot s_c$ hosszúságú. A $CAC'\triangle$-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alapján $a + b > 2 \cdot s_c$. Ezt az egyenlőtlenséget 2-vel osztva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.



13.11. ábra $a + b > 2s_c$

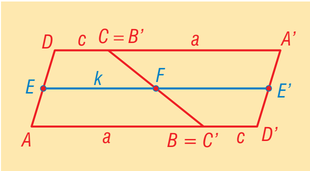
5. példa Igazoljuk, hogy egy trapéz szárainak felezőpontját összekötő középvonal párhuzamos a trapéz alapjaival, és hossza egyenlő az alapok számtani közepével!

Megoldás:

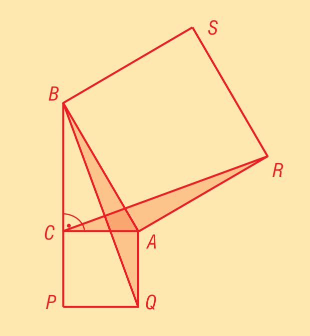
Használjuk a 13.12. ábra jelöléseit! Tükrözzük a trapézt a középvonalával együtt annak F végpontjára! Mivel az AB alap képe párhuzamos az AB-vel, és illeszkedik a $C = B'$ pontra, így egy egyenesbe esik a CD alappal. (Ugyanígy CD képe is egy egyenesbe esik AB-vel.)

A középpontos tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt $AD' = DA'$. Így az $AD'A'D$ négyszög paralelogramma. Ebben EE' középvonal, tehát $EE' \parallel AD'$ és $EE' = AD' = a + c$. Ugyanakkor $EE' = 2 \cdot k$, ezért

$k = \frac{a+c}{2}$ és $EF \parallel AB$.



13.12. ábra Tükrözzük a trapézt az F pontra!

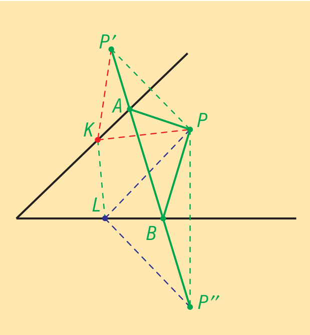


13.13. ábra Az *ACR* háromszög az *ABQ* háromszögnek −90°-os elforgatottja az *A* pont körül!

6. példa Az *ABC* derékszögű háromszög *AC* befogójára és *AB* átfogójára kifelé állítsunk egy-egy négyzetet (*CPQA* és *ARSB*)! Mutassuk meg, hogy $BQ \perp CR$!

Megoldás:
Igaz, hogy a feladat csak két szakasz merőlegességéről szól, de vegyük észre, hogy az *ACR* háromszög az *ABQ* háromszögnek −90°-os elforgatottja az *A* pont körül! Valóban: hiszen *AQ* −90°-os elforgatottja *AC*, és *AB* −90°-os elforgatottja *AR*. Tehát a *BQ* szakasz −90°-os elforgatottja a *CR* szakasz. Ezzel a merőlegességüket igazoltuk. (13.13. ábra)

7. példa Egy hegyesszög két szára között adott a *P* pont. Szerkesszük meg a lehető legkisebb kerületű háromszöget, amelynek egyik csúcspontja a *P* pont, másik két csúcspontja pedig illeszkedik a szög egy-egy szárára!



13.14. ábra 7. példa

Megoldás:
Tükrözzük a *P* pontot mindkét szögszárra (*P′* és *P″*)! Majd rajzoljunk egy tetszőleges háromszöget (*KLP*), ahol *K* az egyik szögszár, *L* pedig a másik szögszár egy pontja! A *KLP* háromszög kerülete egyenlő a *P′KLP″* törött vonal hosszával, hiszen $PK = P'K$ és $PL = P''L$! Az ilyen háromszögek közül tehát annak a kerülete lesz a legkisebb, amelyiknél az említett törött vonal hossza is a lehető legkisebb. Ez a törött vonal éppen a *P′P″* szakasz. Vagyis akkor kapjuk a feltételeknek megfelelő legkisebb kerületű háromszöget, ha a *P′P″* szakasznak a két szögszárral vett metszéspontját kötjük össze *P*-vel. A keresett háromszög az *ABP* háromszög.

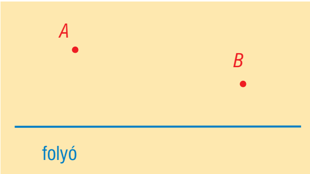
Oldjuk meg!

1. a) Szerkesszük meg a tompaszögű *ABC* háromszög *M* magasságpontját!
b) Szerkesszük meg az előbbi ábrán az *ABM* háromszög magasságpontját! Mit tapasztalunk? Észrevételünket igazoljuk!

2. Az *ABC* háromszög m_a magasságának talppontja (vagyis az *A*-tól különböző végpontja) legyen *K*, az m_b magasságának talppontja pedig legyen *L*! Határozzuk meg a $KML\measuredangle$ nagyságát, ha a háromszög *A*-nál lévő szöge 43°-os, a *B*-nél lévő szöge pedig 55°-os! (*M* a magasságpont.)
Oldjuk meg a feladatot általánosan is! (*A*-nál *α*, *B*-nél *β* szög van.)

3. Mutassuk meg, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai által alkotott négyszög egy paralelogramma!

4. Egy egyenes folyószakasz ugyanazon partján fekszik az Ambrus tanya és a Borostyán tanya (nem közvetlenül a vízparton). A lehető legrövidebb utat szeretnék megépíteni a két tanya lakói, amely az egyik tanyától a folyó érintésével a másik tanyához vezet. Tervezzük meg az út helyét!



13.15. ábra Tanyák a folyó mellett

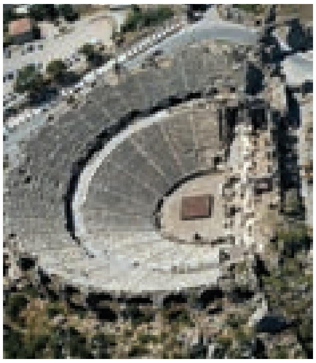
5. Mutassuk meg, hogy a háromszög bármely súlyvonala felezi a háromszög területét!

6. Mutassuk meg, hogy bármely háromszög súlyvonalaiból is szerkeszthető háromszög!

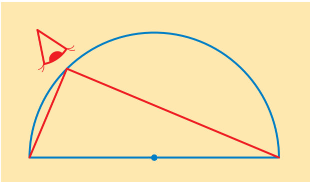
7. Egy hegyesszög két szára között adott a P és a Q pont. Szerkesszük meg a lehető legrövidebb $PABQ$ törött vonalat, ha A és B a szög egy-egy szárára illeszkedik!

14. Thalész tétele

1. példa A két és fél ezer éve virágzó görög kultúrában nagy szerepet kapott a színház is. A színházak kör vagy félkör alakúak voltak. (14.1. ábra) Ha a színpadot egészen a félkör egyik szélétől a másik széléig képzeljük, az első (félkör alakú!) sor ülőhelyeit végignézve honnan láthatjuk a legnagyobb szögben a színpadot? (Akkora szögben látjuk a színpadot, amekkora szöget bezár a színpad egyik széle felé néző tekintetünk vonala a színpad másik széle felé néző tekintetünk vonalával.)



14.1. ábra Ókori színház romjai



14.2. ábra Látószög

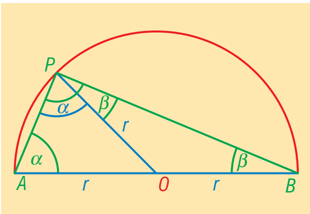
Megoldás:

A probléma matematikai modellje így fogalmazható meg: adott egy félkör az átmérőjével együtt. A félkör mely pontjából látszik a legnagyobb szögben az átmérő?

Vegyünk fel egy tetszőleges (P) pontot a körvonalon! Kössük össze P-t az átmérő két végpontjával (A-val és B-vel), majd a kör középpontjával (O-val) is! Az APB háromszög A csúcsnál lévő szögét jelölje α, a B csúcsnál lévő szögét pedig β!

Mivel $AO = OP = r$ (mindkét szakasz a kör sugara), ezért az AOP háromszög egyenlő szárú. Így az alapon fekvő szögei egyenlők (α).

Ugyanígy a BOP háromszög is egyenlő szárú, alapon fekvő szögei egyenlők (β). (14.3. ábra)



14.3. ábra $2\alpha + 2\beta = 180°$

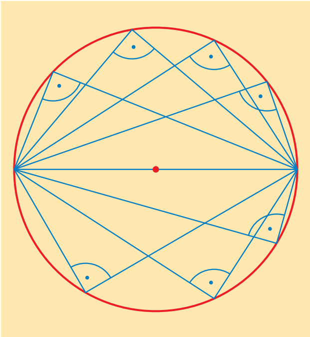
Az APB háromszög belső szögeinek összege pedig 180°, tehát

$$2\alpha + 2\beta = 180°,$$
$$2 \cdot (\alpha + \beta) = 180°,$$
$$\alpha + \beta = 90°.$$

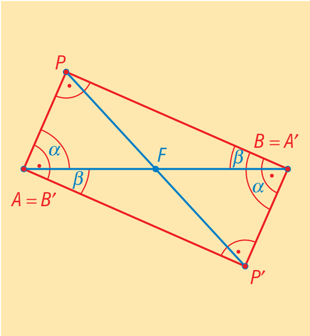
Ugyanakkor az $APB\measuredangle$ éppen $\alpha + \beta$-val egyenlő, vagyis

$$APB\measuredangle = \alpha + \beta = 90°.$$

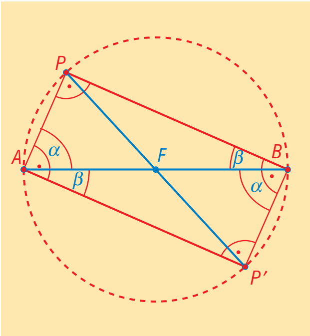
Vegyük észre, hogy a megoldás során sehol nem használtuk ki, hogy a körívnek a P melyik pontja! (Csak annyit, hogy nem esik egybe sem az A-val, sem a B-vel.) Tehát a félköríves első sor minden pontjából ugyanakkora szögben, derékszögben látszik az átmérőt képező színpad (kivéve az átmérő két végpontját).



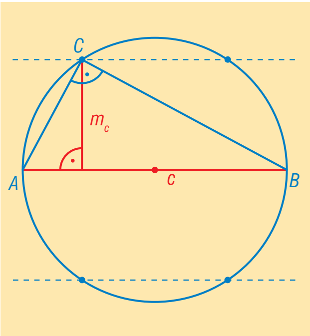
14.4. ábra Thalész-tétel



14.5. ábra $AF = PF = BF = P'F = r$



14.6. ábra Thalész-kör



14.7. ábra $C \in$ kör $\cap$ párhuzamos

Ezzel igazoltuk a **Thalész-tétel**t.

Tétel A kör átmérője a körvonal minden pontjából derékszögben látszik, kivéve az átmérő két végpontját.

Vizsgáljuk meg mindjárt, hogy teljesül-e a tétel megfordítása!
Ehhez célszerű „Ha…, akkor…” formába önteni előző tételünket.
Ha egy P pont rajta van az AB átmérőjű körön, akkor az $APB\measuredangle = 90°$.
Megfordítva:
Ha az $APB\measuredangle = 90°$, akkor a P pont rajta van az AB átmérőjű körön.

Ennek igazolásához vegyük föl az APB derékszögű háromszöget! Majd tükrözzük az átfogó felezőpontjára! Így az átfogó két végpontjánál egymás mellé kerül egy-egy α és β szög, amelyek egymás pótszögei, hiszen a derékszögű háromszög két hegyesszögéről van szó. Így tehát az $APBQ$ négyszögnek minden szöge derékszög, azaz téglalap.

A téglalap átlói pedig egyenlő hosszúak, és felezik egymást, így az AB szakasz F felezőpontja egyenlő távol van az $APBQ$ négyszög mind a négy csúcsától. Vagyis az F pont köré írt AF sugarú körre illeszkedik A, B és P is. A P pont tehát rajta van az AB átmérőjű körön.

Vegyük észre, hogy most éppen azt bizonyítottuk, amit korábban a szemlélet alapján elfogadtunk, hogy a derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja! Ez a tétel **a Thalész-tétel megfordítása**.

(Olykor az eredeti tételt és a megfordítását együtt szokták Thalész tételének nevezni.) A két tételt egyben a következőképpen is kimondhatjuk.

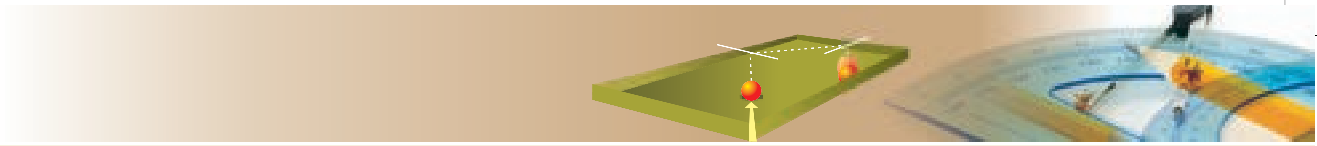
Tétel Egy pont akkor és csak akkor van rajta az AB átmérőjű körön, ha a pontból az átmérő derékszögben látszik. Vagy még másként: azon pontok halmaza a síkon, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik, az AB átmérőjű kör, az úgynevezett **Thalész-kör** (kivéve a szakasz két végpontját).

2. példa Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismert az átfogójának és az átfogóhoz tartozó magasságának hossza! Vizsgáljuk meg a szerkeszthetőség feltételét!

Megoldás:
Készítsünk vázlatrajzot!

Adott: $ACB\measuredangle = 90°$,
c átfogó,
m_c átfogóhoz tartozó magasság.

Ha az $AB = c$ szakasz felvételével kezdjük a szerkesztést, akkor utána már csak a C csúcs helyét kell meghatároznunk.

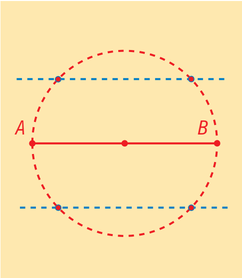


Egyrészt: az átfogótól m_c távolságban van, tehát illeszkedik az átfogó egyenesétől m_c távolságban lévő két párhuzamos valamelyikére.

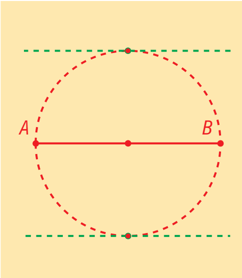
Másrészt: mivel az $ACB\measuredangle = 90°$, ezért a Thalész-tétel megfordítása szerint a C pont illeszkedik az AB átmérőjű körre.

Tehát a párhuzamosok és a Thalész-kör metszéspontjában helyezkedik el a C pont. (A vázlatrajzon csak egy háromszöget tüntettünk fel, de a rajz alapján az is látszik, hogy akár négy háromszöget is kaphatunk, bár ezek egymás tükörképei (egybevágók).)

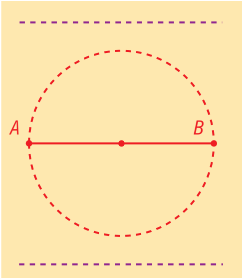
A megoldhatóság és ezzel együtt a megoldások száma azon múlik, hogy hány közös pontjuk van a párhuzamosoknak a Thalész-körrel.



14.8. ábra 4 megoldás



14.9. ábra 2 megoldás



14.10. ábra Nincs megoldás

- Az AB szakasz két oldalán két-két megoldás $m_c < \frac{c}{2}$. (14.8. ábra)
- Az AB szakasz két oldalán egy-egy megoldás $m_c = \frac{c}{2}$. (14.9. ábra)
- Nincs megoldás $m_c > \frac{c}{2}$. (14.10. ábra)

A Thalész-kör sugara itt $\frac{c}{2}$, a közös pontok száma pedig nyilván azon múlik, hogy az m_c milyen relációban áll a Thalész-kör sugarával.

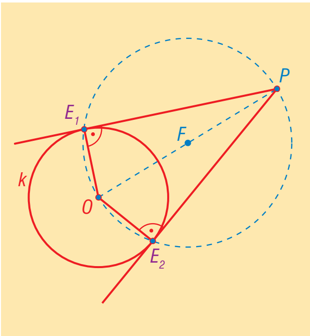
14.11. ábra A milétoszi Thalész alkotóhelyének romjai

3. példa a) Adott k körhöz szerkesszünk érintőt egy adott külső P ponton át!
b) Milyen hosszú érintőszakasz húzható a 10 cm sugarú körhöz a körvonaltól 16 cm távolságra lévő P pontból? (**Érintőszakasz**: a P ponttól az érintési pontig tartó szakasz.)

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Így az érintési pontnak rajta kell lennie az OP átmérőjű Thalész-körön is, és az adott k körön is. Minden esetben két metszéspont adódik, az ábrán: E_1 és E_2. Kössük össze ezeket a pontokat a P-vel, így kapjuk meg a k kör két érintő egyenesét.

b) Használjuk az a) rész ábráját! Ha P pont a körvonaltól 16 cm távolságban van, akkor a kör középpontjától (O-tól) 10 cm-rel (a kör sugarával) van távolabb, vagyis $OP = 26$ cm. Az OEP háromszög E-nél derékszögű. Befogói: $EO = 10$ cm, EP ismeretlen, átfogója $OP = 26$ cm. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az ismeretlen befogó meghatározására!



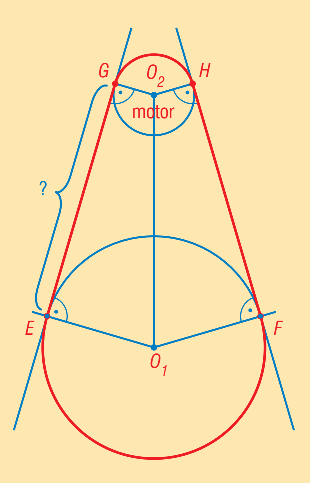
14.12. ábra Körhöz húzott érintő szerkesztése a Thalész-kör segítségével

$$EO^2 + EP^2 = OP^2$$
$$10^2 + EP^2 = 26^2$$
$$EP^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$$
$$EP = 24\ \text{(cm)}$$

Az érintőszakasz hossza tehát 24 cm.

Vegyük észre, hogy mindegy, melyik érintőszakaszt határoztuk meg, a szerkesztési eljárás miatt egyenlő hosszúaknak kell lenniük! A 14.12. ábra szimmetrikus az *OP* szakasz tartóegyenesére.

Tétel Külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok hossza egyenlő egymással.



14.13. ábra 4. példa

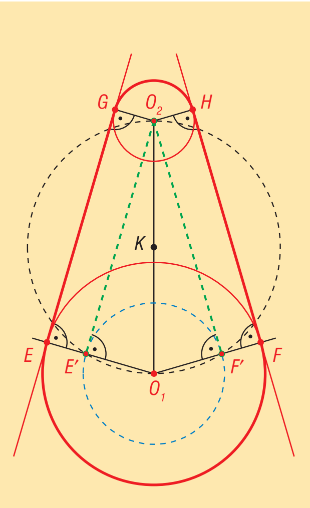
4. példa Egy motor tengelyéhez közvetlenül egy 2 cm sugarú meghajtó tárcsa csatlakozik, amely egy ékszíj segítségével 5,5 cm sugarú kereket hajt meg. A tárcsa és a kerék tengelyének távolsága 12,5 cm.
a) Szerkesszük meg az ékszíjjal összekötött szerkezet vázlatrajzát eredeti nagyságban!
b) Számítsuk ki, milyen hosszú az ékszíjnak a két kerék közé eső, szabadon futó szakasza!

Megoldás:
A szerkezet vázlatos rajzát tekinthetjük a szerkesztés vázlatának is. (14.13. ábra) A feladat matematikai modellje: a) Szerkesszünk két különböző sugarú körhöz közös (külső) érintőt! b) Számítsuk ki a közös (külső) érintőszakasz hosszát!

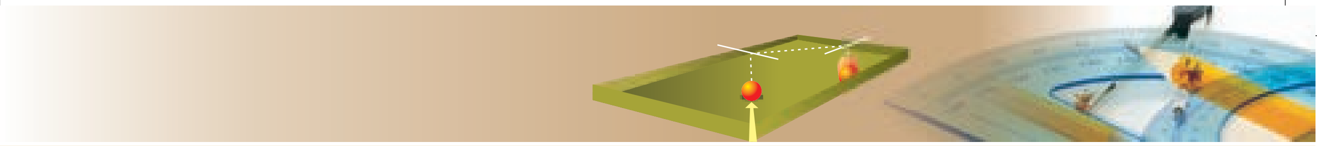
Először is megállapítható, hogy a két kör középpontjának távolsága nagyobb, mint a körök sugarának összege, így a két kör egymáson kívül helyezkedik el, közös pont nélkül. Az előző példával való rokonság rögtön érződik, de így sem könnyű rájönni a megoldás kulcsára.

Használjuk az ábra jelöléseit! Húzzunk párhuzamost a kisebb sugarú kör középpontján át a körök elképzelt közös külső érintőjével (az ékszíj szabadon futó részével)!

Mivel az *EG* érintő merőleges az érintési pontokhoz húzott sugarakra, ezért ezek a sugarak párhuzamosak egymással: $O_1E \parallel O_2G$ és ugyanezért $E'O_2 \perp O_1E$, vagyis az $EE'O_2G$ négyszög egy téglalap. Ezért $EE' = O_2G$. A cél tehát az *E'* pont megszerkesztése. *E'* egyrészt $r_1 - r_2 = 5{,}5\ \text{cm} - 2\ \text{cm} = 3{,}5\ \text{cm}$ távolságra van az O_1 ponttól, vagyis illeszkedik az O_1 középpontú, $r_1 - r_2 = 3{,}5\ \text{cm}$ sugarú körre. Másrészt mivel $O_1E'O_2\sphericalangle = 90°$, ezért *E'* illeszkedik az O_1O_2 átmérőjű Thalész-körre. Így az *E'* pont e két utóbbi körnek a metszéspontjaként adódik. (És ugyanúgy természetesen adódik egy másik metszéspont: a 14.14. ábrán *F'*-vel jelölt pont is, amely az *F* érintési pont megszerkesztését te-



14.14. ábra Két kör közös külső érintőjének szerkesztése



szi lehetővé.) Ezután vegyük az O_1E' félegyenesnek és az eredeti nagy körnek (k_1) a metszéspontját! Ez lesz az E pont. Az E pontban állítsunk merőlegest az O_1E' félegyenesre! Ez lesz a két kör közös külső érintője. (Ugyanígy járhatunk el a másik oldalon is: ez az FH érintő.)

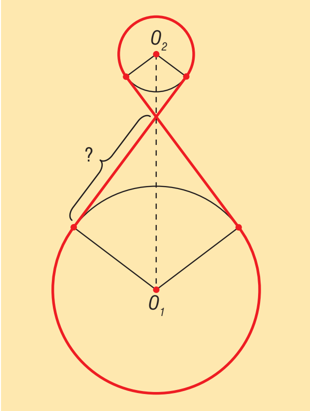
Vegyük észre, hogy a segédszakasz szerkesztése tulajdonképpen nem más, mint az O_2 pontból az O_1 középpontú, $r_1 - r_2$ sugarú körhöz húzott érintő szerkesztése!

b) A szerkesztés alapötletéből és menetéből világosan látszik, hogy az ékszíj szabadon futó részének (14.14. ábrán az EG szakasz) a hossza egyenlő a segédszakasz ($E'O_2$) hosszával. Azt pedig az előző példa alapján ki tudjuk számolni. Az $O_1E'O_2\triangle$ derékszögű, befogói: $O_1E' = 3{,}5$ cm és $E'O_2 = ?$, átfogója $O_1O_2 = 12{,}5$ cm. A Pitagorasz-tételt alkalmazva:

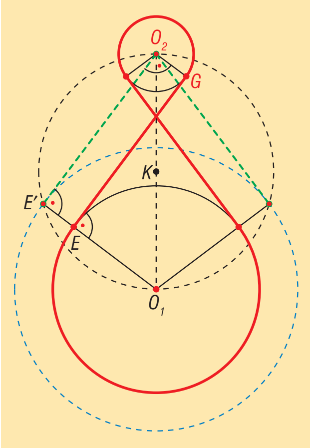
$$E'O_2^{\,2} = O_1O_2^{\,2} - O_1E'^2,$$

$$E'O_2^{\,2} = 12{,}5^2 - 3{,}5^2 = 156{,}25 - 12{,}25 = 144.$$

Tehát $E'O_2 = EG = 12$ cm. Az ékszíj szabadon futó része 12 cm hosszú (mindkét oldalon).



14.15. ábra Belső érintők



14.16. ábra Két kör közös belső érintőjének szerkesztése

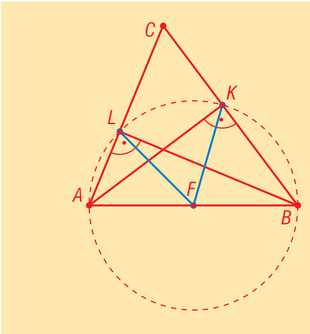
Az előbbi példában többször használtuk a két kör közös érintőjére a „külső” jelzőt. Hiszen ha az ékszíjak kereszteződnek a keréktárcsák között, akkor az úgynevezett „belső” érintőkkel lehet modellezni a helyzetet. Az ékszíj menetét ábrázoló rajzon (14.15. ábra) kívül csak egy szerkesztési ötletet tartalmazó vázlatrajzot közlünk, amely alapján az előző eset lépéseit szinte szóról szóra követve bárki elkészítheti a szerkesztés pontos tervét és magát a kivitelezést is. (Ezeket itt az olvasóra bízzuk. 14.16. ábra)

5. példa Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja egyenlő távol van az A csúcsból induló magasság és a B csúcsból induló magasság talppontjától! (Az A csúcsból induló magasság talppontja az m_a magasság és az a oldalegyenes közös pontja.)

Megoldás:

Mivel mindkét magasság talppontjából (K és L) derékszögben látszik az AB szakasz, ezért a Thalész-tétel megfordítása értelmében mindkét pont rajta van az AB átmérőjű körön. A Thalész-kör középpontja pedig az AB oldal F felezőpontja. Mivel a körvonal minden pontja egyenlő távolságra van a kör középpontjától, ezért $FK = FL$ is teljesül.

Az ábrán a hegyesszögű háromszög esetét mutatjuk be. Az olvasóra bízzuk a derékszögű és tompaszögű háromszögekhez tartozó ábrák elkészítését.

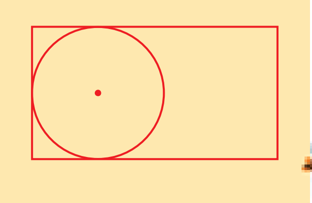


14.17. ábra 5. példa

6. példa Azt már láttuk, hogy minden háromszögnek létezik beírt köre. Igaz-e ez négyszögekre is?

Megoldás:
Gyorsan találunk ellenpéldát a négyszögek között. Pl. egy olyan téglalap, amely nem négyzet. (14.18. ábra)

De nagyon sok más ellenpéldát is mutathatnánk. Tehát a négyszögek esetében már nem természetes, hogy létezik a beírt kör.

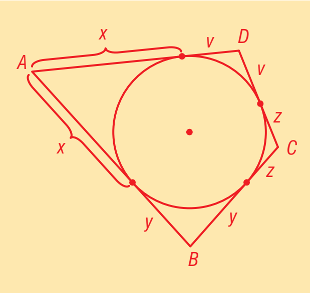


14.18. ábra Egy általános téglalapnak nincs beírt köre

Definíció **Érintőnégyszög**nek nevezzük azt a négyszöget, amelyhez található olyan kör, amely a négyszög mind a négy oldalát érinti.

Érintőnégyszögek tétele

Tétel Az érintőnégyszögek szemközti oldalainak összege egyenlő. Állítás: $AB + CD = BC + DA$.



14.19. ábra Érintőnégyszög

Bizonyítás:
Használjuk fel, hogy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő! A 14.19. ábrán egyformán jelölt szakaszok tehát egyenlő hosszúak. Így $AB + CD = x + y + z + v$ és $BC + DA = y + z + v + x$. Igaz az állítás.

Az érintőnégyszögek tételének megfordítása általában nem igaz (lásd „Oldjuk meg!” 7. feladat), csak egy további feltétellel kiegészítve. (Ezt itt bizonyítás nélkül fogadjuk el.)

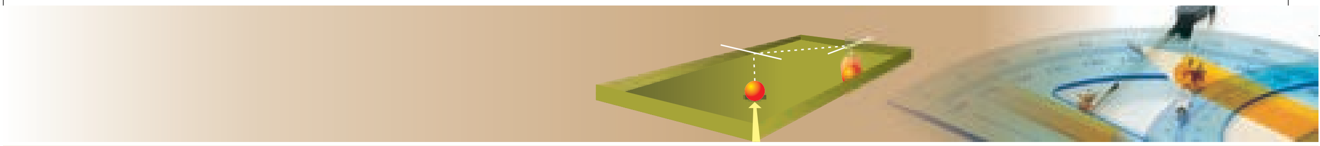
Tétel Ha egy konvex négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor az érintőnégyszög.

7. példa Bizonyítsuk be, hogy az érintőhatszög három-három nem szomszédos oldalának összege egyenlő! (Érintőhatszög: olyan hatszög, amelynek létezik beírt köre, vagyis egy olyan kör, amely a hatszög minden oldalát érinti.)

Megoldás:
Itt csak hivatkozunk az érintőnégyszögek tételének bizonyítási módszerére. Alkalmazzuk itt is ugyanazt a trükköt!

Oldjuk meg!

1. Szerkesszünk érintőt egy 3 cm sugarú körhöz a középpontjától 7 cm-re lévő pontból! Számítsuk ki, milyen hosszúak az érintőszakaszok!
2. Egy 2 m magas létra csúszik le egy fal mellett. (A létra teteje a falnak támaszkodik, az alja a talajon csúszik.) Mit ír le a létra felezőpontja a mozgás során? Először tippeljünk, aztán gondoljuk végig a feladatot!



3. Az egyenlő szárú háromszög egyik szára mint átmérő fölé írjunk kört! Bizonyítsuk be, hogy ez a kör felezi a háromszög alapját!

4. Mutassuk meg, hogy a négyzet oldalai mint átmérők fölé emelt körök mind egy ponton mennek át!

5. Két egymást kívülről érintő kör átmérője d_1 és d_2. Mutassuk meg, hogy közös külső érintőszakaszuk hossza $\sqrt{d_1 \cdot d_2}$, vagyis az átmérők úgynevezett mértani közepe!

6. Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* háromszög *A* és *B* csúcsából induló magasságainak talppontja, a *C* csúcs és a háromszög magasságpontja egy körre illeszkednek!

7. Keressünk példát olyan négyszögre, amelyben a szemközti oldalak hosszának összege egyenlő, mégsem érintőnégyszög!

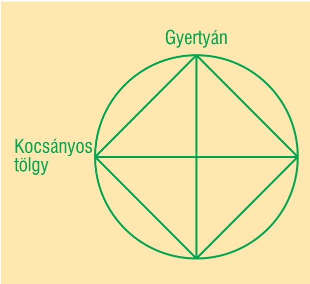
8. Mekkora lehet annak az érintőnégyszögnek a negyedik oldala, amelynek három oldala 4 cm, 6 cm és 7 cm hosszúságú? Hány eset van?

9. a) Szerkesszünk olyan tengelyesen szimmetrikus trapézt, amely érintőnégyszög is egyben!

b) Bizonyítsuk be, hogy szárainak hossza egyenlő az alapokkal párhuzamos középvonalának hosszával!

15. Körív hossza, körcikk területe, ívmérték

1. példa Egy botanikus kert egy kicsi részének alaprajza látható a képen. A kört alkotó sétaúthoz a kör középpontjából 260 méteres egyenes út vezet. A botanikus kert két gyönyörű fája, a gyertyán és a kocsányos tölgy között sétálhatunk a köríves út mentén és az egyenes út mentén is. (Persze választhatunk hosszabb, változatosabb utakat is, de most csak ezt a két utat hasonlítsuk össze!) Mennyivel hosszabb a köríven megtett út, mint az egyenes?



15.1. ábra A kert alaprajza

15.2. ábra Botanikus kert

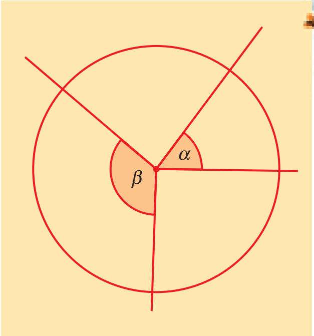
Megoldás:
A kocsányos tölgy (*K*) és a gyertyán (*G*) közötti egyenes út hosszát rögtön tudjuk a korábban tanultak alapján. (A kör középpontját jelölje *O*!) A $KOG_\triangle$ ugyanis egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek átfogója a befogók hosszának $\sqrt{2}$-szöröse. A keresett távolság: $KG = \sqrt{2} \cdot 260 \text{ m} \approx 361 \text{ m}$.

Ha a köríven megtett út hosszát számoljuk, vagyis az ív hosszát, akkor a következő jelölést használjuk: $\overset{\frown}{KG}$ (ez jelenti az ívet is, és annak hosszát is). Vegyük észre, hogy az ábra negyedrendű forgásszimmetriával rendelkezik, vagyis ha 90°-kal elforgatjuk a középpont körül, akkor önmagába megy át! Így a $\overset{\frown}{KG}$ hossza a kör kerületének negyedrészével egyenlő: $\overset{\frown}{KG} = \dfrac{\text{a kör kerülete}}{4} = \dfrac{2 \cdot 260 \text{ m} \cdot \pi}{4} \approx 408 \text{ m}$.

A köríven haladva körülbelül $408 \text{ m} - 361 \text{ m} = 47$ m-rel teszünk meg hosszabb utat, mint egyenesen haladva.

(A botanikus kertben mindkét utat érdemes bejárnunk, hiszen más-fajta növényeket mutatnak be az egyiken és a másikon.)

Az előző példában a *KG* szakasz (és a *KG* ív is) a kör *O* középpontjá-ból derékszögben látszik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a *KG* szakaszhoz (ívhez) tartozó középponti szög 90°.



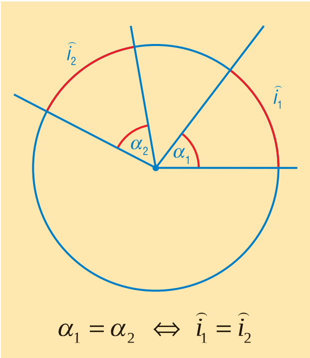
15.3. ábra Középponti szögek

Definíció Egy kör síkjában lévő szöget **középponti szög**nek nevezünk, ha a csúcsa a kör középpontja. (Szárai tehát tartalmazzák a kör egy-egy sugarát.)

A középponti szög nagysága 0°-tól 360°-ig bármekkora lehet.
A 15.3. ábrán az α egy hegyesszög, a β pedig egy tompaszög. De lehet akár egyenesszög, vagy konkáv szög is a középponti szög.

(A középponti szög fogalmának csak egy kör jelenlétekor van ér-telme, és egy másik körhöz viszonyítva már ugyanez a szög nem lesz középponti szög, ha a két kör középpontja nem esik egybe.)

Vegyük észre, hogy a fenti példában csak a következő nyil-vánvaló tételt használtuk ki!



15.4. ábra Az ívhossz és a közép-ponti szög kapcsolata

Tétel Adott körben az egyenlő középponti szögű kör-ívek a kör középpontja körül egymásba forgathatók, így hosszuk egyenlő.

A tétel megfordítása is igaz.

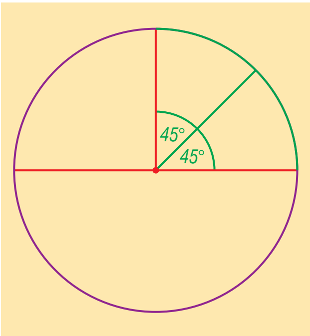
Tétel Adott körben az egyenlő hosszúságú ívekhez egyenlő nagyságú középponti szögek tartoznak.

2. példa Egy kör 90°-os középponti szögéhez 21 cm hosz-szúságú ív tartozik.

I. Számítsuk ki, mekkora ív tartozik ugyanebben a körben
a) a 45°-os; b) a 60°-os; c) a 217°-os középponti szöghöz!

II. Határozzuk meg a kör kerületét és sugarát!

III. Állapítsuk meg, mekkora középponti szög tartozik a kör 37 cm ívhosszúságú ívéhez!



15.5. ábra 2. a) példa

Megoldás:
I. a) A 90°-os középponti szöget a szögfelezőjével két egyenlő nagysá-gú szögre bonthatjuk. Így az ezekhez tartozó két ív hossza is egyenlő lesz, összesen pedig 21 cm. Egy 45°-os középponti szöghöz tartozó ív hossza tehát 10,5 cm.

b) A 90°-tól a 60°-ig egész számmal való szorzással vagy osztással már nem juthatunk el. De rájöhetünk, hogy a 30°-nak mindkét adott szög egész számú többszöröse. A 30°-os középponti szöghöz tartozó ív hossza harmada a 90°-os középponti szöghöz tartozó ívnek, mivel a 30° is harmada a 90°-nak. Ennek pedig kétszerese a 60°, így a 30°-os középponti szöghöz tartozó ív hosszát is meg kell dupláznunk.

$$90° \xrightarrow{:3} 30° \xrightarrow{\cdot 2} 60°$$

$$21\text{ cm} \xrightarrow{:3} 7\text{ cm} \xrightarrow{\cdot 2} 14\text{ cm}$$

A 60°-os középponti szöghöz tartozó körív hossza: 14 cm.

c) Az előző, b) rész ötletével ez is megoldható. Mivel a 90-nek és a 217-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója, ezért itt az 1°-hoz tartozó ívmérték segítségével számolhatunk. Előbbi jelölésünkkel:

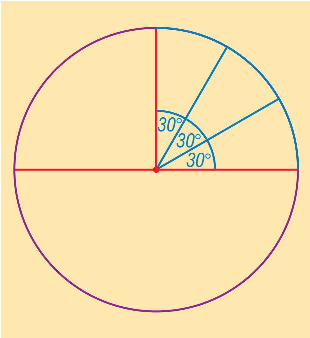
$$90° \xrightarrow{:90} 1° \xrightarrow{\cdot 217} 217°$$

$$21\text{ cm} \xrightarrow{:90} \frac{21}{90}\text{ cm} \xrightarrow{\cdot 217} \frac{21}{90}\cdot 217\text{ cm} = \frac{4557}{90}\text{ cm} \approx 50,63\text{ cm}$$

A 217°-os középponti szöghöz tartozó körív hossza: kb. 50, 63 cm.

II. A 360° 4-szerese a 90°-nak, ezért a kerület is 4-szer akkora lesz, mint a 90°-os középponti szöghöz tartozó ívhossz. Tehát a kör kerülete: $4 \cdot 21\text{ cm} = 84\text{ cm}$. A kör sugarát pedig ebből az értékből tudjuk kiszámolni: $K_{\text{kör}} = 2r\pi$, így $84\text{ cm} = 2r\pi$, ahonnan $r = \dfrac{84\text{ cm}}{2\pi} \approx 13,37\text{ cm}$.

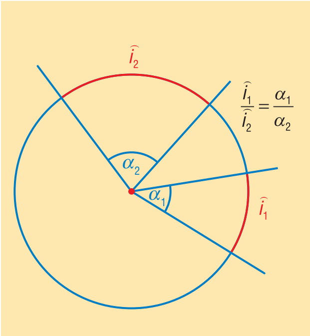
III. A 21 cm-es ívet feloszthatjuk 21 db 1 cm-es ívre. Ezek mindegyikéhez egyenlő nagyságú középponti szög tartozik $\left(\dfrac{90°}{21}\text{ nagyságú}\right)$. Majd ezekből 37 darabot véve megkapjuk a vizsgált ívet. Így a 37 cm hosszúságú ívhez tartozó középponti szög nagysága: $37 \cdot \dfrac{90°}{21} \approx 158,57°$.



15.6. ábra 2. b) példa

Az eddigiek alapján egyre világosabb, hogy egyenes arányosság áll fenn a kör egy ívének hossza és az ahhoz tartozó középponti szög között.

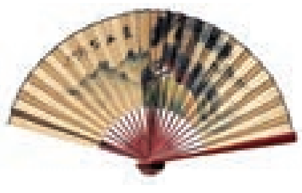
Tétel Egy adott körben a körív hossza egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szög nagyságával.



15.7. ábra Egyenes arányosság

A bizonyítás gondolatmenetét ismertük meg a bevezető példákban mindazon esetekre, amelyekben a két ívhossz (illetve a hozzájuk tartozó két középponti szög) aránya racionális szám. Ugyanakkor megjegyezzük, hogy az állítás irracionális arányok esetében is igaz.

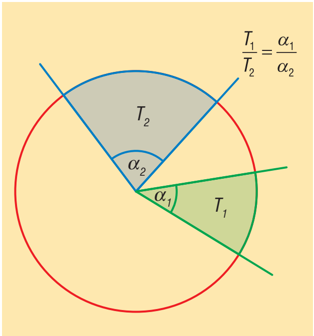
3. példa Egy legyező összecsukott állapotban 25 cm hosszú. 40 darab egymáshoz csatlakozó, 5°-os középponti szögű kis körcikkből áll. Mekkora lesz a teljesen kinyitott legyező – mint körcikk – középponti szöge és területe?


15.8. ábra Régi legyező

15.9. ábra „Ma is gyönyörű vagyok.”

Megoldás:
Ha teljesen kinyitjuk a legyezőt, akkor egymás mellé kerülnek az 5°-os középponti szögű körcikkek, így $40 \cdot 5° = 200°$ -os lesz a középponti szög. A körcikk területére vonatkozóan pedig ugyanolyan észrevételeket tehetünk, mint a körív hosszára. Az azonos középponti szöghöz tartozó körcikkek területe ugyanazon a körön belül nyilván egyenlő (a kör középpontja körüli elforgatással egymásba vihetők), így az egyenes arányosság ötletéig ugyanolyan lépésekben juthatunk el. Az 5°-os középponti szögű körcikk területe $\frac{5°}{360°} = \frac{1}{72}$ -szerese a teljes kör területének, azaz $T_{\text{kis körcikk}} = \frac{5}{360} \cdot r^2\pi = \frac{1}{72} \cdot 25^2\pi$. A szétnyitott legyező területe: $T_{\text{nagy körcikk}} = 40 \cdot \frac{1}{72} \cdot 25^2\pi \approx 1090{,}8\ (\text{cm}^2)$. Ezt tehát közvetlenül is megkaphattuk volna a 25 cm sugarú kör területéből: $T_{\text{körcikk}} = \frac{200°}{360°} \cdot r^2\pi.$

Tétel Egy adott körben a körcikk területe egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szög nagyságával.



15.10. ábra A körcikk területe és a hozzá tartozó középponti szög nagysága egyenesen arányos

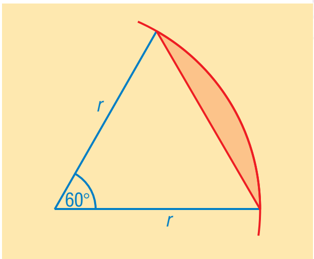
Megjegyzés:
A körív hossza és a hozzá tartozó körcikk területe között is egyenes arányosság áll fenn ugyanazon körben: $\frac{\widehat{i_1}}{\widehat{i_2}} = \frac{T_1}{T_2}$.

Így ha a teljes körhöz viszonyítjuk egy körív hosszát, illetve körcikk területét, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{K_{\text{kör}}}{\widehat{i}} = \frac{T_{\text{kör}}}{T_{\text{körcikk}}}.$$

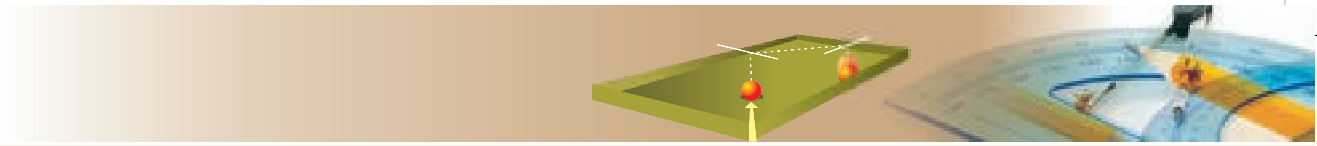
Rendezzük át: $\frac{T_{\text{körcikk}}}{\widehat{i}} = \frac{T_{\text{kör}}}{K_{\text{kör}}} = \frac{r^2\pi}{2r\pi} = \frac{r}{2}$. Ebből egy körcikk területe, a kör sugara és a körcikket határoló ív hossza közti összefüggést kapjuk: $T_{\text{körcikk}} = \frac{r}{2} \cdot \widehat{i}.$

4. példa Mekkora területű körszelet tartozik a 60°-os középponti szöghöz egy 8 cm sugarú körben?



15.11. ábra 4. példa

Megoldás:
A körszelet területét úgy kapjuk meg, ha az ugyanolyan középponti szögű körcikk területéből kivonjuk a háromszög területét, amelyet a körcikk két határoló sugara és a körszelet határoló húrja alkot. A körcikk területe: $T_{\text{körcikk}} = \frac{1}{6} \cdot r^2\pi = \frac{1}{6} \cdot 8^2\pi \approx 33{,}51\ (\text{cm}^2)$.

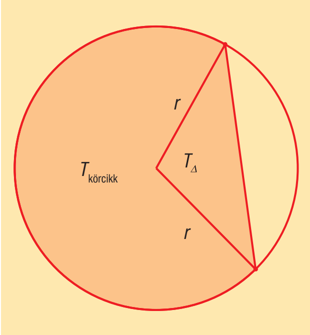


A háromszög egyenlő szárú, és szárszöge 60°, tehát egyenlő oldalú. Tudjuk, hogy bármelyik magassága az oldal $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szöröse, így a területe: $T_\triangle = \dfrac{r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 8^2 \approx 27{,}71\,(\mathrm{cm}^2)$.

A körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_\triangle \approx 33{,}51\,(\mathrm{cm}^2) - 27{,}71\,(\mathrm{cm}^2) = 5{,}8\,(\mathrm{cm}^2).$$

Vegyük észre, hogy konkáv középponti szöghöz tartozó körszelet esetében a kivonás helyett a két sugár és a húr által határolt háromszög területét hozzá kell adnunk az adott szöghöz tartozó körcikk területéhez!



15.12. ábra Konkáv középponti szöghöz tartozó körszelet

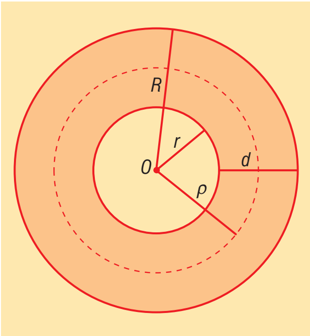
5. példa Számítsuk ki annak a 6 cm vastag körgyűrűnek a területét, amelynél a két határoló kör sugarának összhossza 15 cm!

Megoldás:

Ha külön-külön ismernénk a két sugár hosszát, akkor egyszerű dolgunk lenne: ki kellene vonnunk a nagy kör területéből a kis kör területét. Kezdjünk hozzá ezen a módon a terület kiszámításához a sugarak pontos ismerete nélkül is, majd hajtsunk végre algebrai átalakításokat!

$$T_{\text{körgyűrű}} = T_{\text{nagy kör}} - T_{\text{kis kör}} = R^2\pi - r^2\pi = \left(R^2 - r^2\right)\pi = (R+r)\cdot(R-r)\cdot\pi.$$

Itt $R - r = d$ a körgyűrű vastagsága, a $R + r$ pedig éppen a két kör sugarának összege. Így a körgyűrű területe: $T_{\text{körgyűrű}} = (R+r)\cdot(R-r)\cdot\pi =$ $= 15\ \mathrm{cm}\cdot 6\ \mathrm{cm}\cdot\pi = 90\ \mathrm{cm}^2\cdot\pi \approx 283\ \mathrm{cm}^2$.

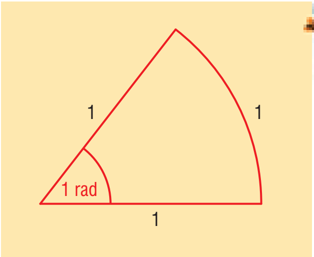


15.13. ábra Körgyűrű középkörrel

A körgyűrű területére vonatkozó összefüggés átírható a következő formában is:

$$T_{\text{körgyűrű}} = (R+r)\cdot(R-r)\cdot\pi = 2\cdot\frac{R+r}{2}\cdot(R-r)\cdot\pi = 2\rho d\pi,$$ ahol ρ a középkör sugara. (A középkör az a körgyűrűt határoló két körrel koncentrikus kör, amelynek sugara a két kör sugarának számtani közepe.)

Évek hosszú során a szöget eddig mindig fokokban mértük. A most tanult ívhossz–középponti szög egyenes arányosság alapján azonban módunk nyílik arra, hogy a szög nagyságát ívhosszal határozzuk meg. Ha a szögek csúcsa körül egység sugarú kört rajzolunk, akkor ugyanakkora középponti szögekhez ugyanakkora ívek fognak tartozni és megfordítva. Tehát elegendő ezen ív hosszát tudnunk. Hogy ne kelljen mindig a 360°-hoz viszonyítanunk, kényelmi szempontokból bevezetünk egy új mértékegységet: a radiánt.



15.14. ábra Ívmérték

Definíció Az 1 (egység) sugarú körben az 1 (egységnyi) hosszúságú körívhez tartozó középponti szög nagyságát nevezzük 1 **radiánnak**. (Röviden: rad.) A szögek radiánban kifejezett nagyságát nevezzük a szögek **ívmértékének**. (Gyakran még a rad-ot sem írjuk ki.)

A definíció alapján gyorsan látszik, hogy az 1 rad nagyságú szög egy kicsit kisebb, mint 60°, hiszen a 60°-os középponti szöghöz az 1 egység sugarú körben 1 egység hosszúságú húr tartozik, így annál egy kicsit hosszabb ív. Ennél az 1 egységnyi hosszúságú ív rövidebb, tehát az ahhoz tartozó középponti szög is kisebb 60°-nál.

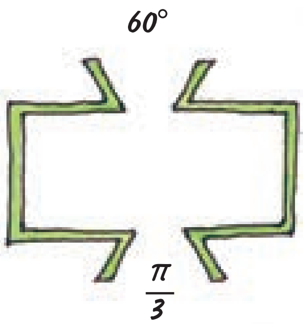
6. példa Határozzuk meg egy tizedesjegy pontossággal, hogy hány fokos az 1 rad nagyságú szög!

Megoldás:
Használjuk a körív és a hozzá tartozó középponti szög közötti egyenes arányosságot! A 180°-os középponti szöghöz (egyenesszög) tartozó körív hossza az egység sugarú körben: $\frac{2r\pi}{2} = r\pi = 1 \cdot \pi = \pi$. Ezért az 1 egység hosszúságú körívhez tartozó középponti szög: $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$.

Az egy tizedesjegy pontossághoz a $\frac{180°}{\pi}$ tizedes tört alakjában meg kellett néznünk a tizedesvessző után álló két jegyet, majd a számot a második jegy alapján a kerekítés szabályainak megfelelően egy tizedesjegyre kerekíteni. (Itt a π-nek akár a 3,14-os közelítő értékével számolunk, akár a számológépek által tárolt pontosabb – általában nyolc értékes jegyből álló – közelítő értékével, mindkét esetben ugyanez a kerekített érték adódik.)
Röviden a fennálló egyenes arányosság táblázatos megjelenítése:

$$180° \longrightarrow \pi \text{ rad}$$
$$? \,(°) \longrightarrow 1 \text{ rad}$$

Az átváltáskor tehát arra érdemes figyelni, hogy $180° = \pi$ rad.

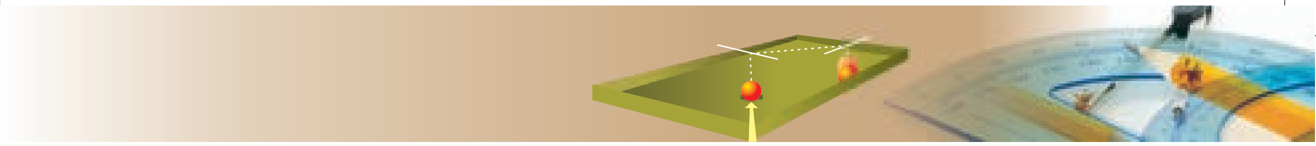


15.15. ábra Átváltás „géppel”

7. példa Váltsuk át a fokokban megadott szögeket radiánba és a radiánban megadott szögeket fokokba!

a) 360°; b) 60°; c) 210°; d) $\frac{3\pi}{4}$ rad; e) 5π rad; f) $\frac{11\pi}{6}$ rad.

Megoldás:
Használjuk itt is az egyenes arányosságot!
Az előző példában már megállapítottuk azt az összefüggést, amelyhez minden egyes fok–radián átváltáskor visszanyúlhatunk: $180° = \pi$ rad.



Ez alapján

a) $360° = 2\pi$ rad	
b) $60° \to$? rad $180° \to \pi$ rad	Innen $60° = \dfrac{60°}{180°} \cdot \pi$ rad $= \dfrac{\pi}{3}$ rad.
c) $210° \to$? rad $180° \to \pi$ rad	Innen $210° = \dfrac{210°}{180°}\pi$ rad $= \dfrac{7}{6}\pi$ rad.
d) $?° \to \dfrac{3\pi}{4}$ rad $180° \to \pi$ rad	Innen $\dfrac{3\pi}{4}$ rad $= \dfrac{3}{4} \cdot 180° = 135°$.
e) $?° \to 5\pi$ rad $180° \to \pi$ rad	Innen 5π rad $= 5 \cdot 180° = 900°$.
f) $?° \to \dfrac{11\pi}{6}$ rad $180° \to \pi$ rad	Innen $\dfrac{11\pi}{6}$ rad $= \dfrac{11 \cdot 180°}{6} = 330°$.

A szögek ívmértékére a felsőbb évfolyamokon gyakran lesz szükségünk.

$30° = \dfrac{\pi}{6}$ **rad**

$60° = \dfrac{\pi}{3}$ **rad**

$45° = \dfrac{\pi}{4}$ **rad**

$90° = \dfrac{\pi}{2}$ **rad**

15.16. ábra Jól jegyezzük meg!

Oldjuk meg!

1. Milyen hosszúságú ív tartozik egy 14 dm sugarú körben
a) a 60°-os; b) a 270°-os; c) a 38°-os középponti szöghöz?

2. Hány fokos középponti szög tartozik a 10 cm sugarú körben
a) a 15,7 cm; b) a 3 cm; c) a 10 cm; d) a 20 cm hosszúságú ívhez?

3. Ha egy körben a 100°-os középponti szöghöz 520 m hosszúságú ív tartozik, akkor ugyanebben a körben milyen hosszú ív tartozik a 35°-os középponti szöghöz? Mekkora ennek a körnek a sugara?

4. A Föld egyenlítői sugara kb. 6378 km. Számítsuk ki, mekkora utat tesz meg a szingapúri repülőtér irányítótornya 1 óra alatt a Föld tengelye körüli forgása során! Állapítsuk meg, mekkora állandó (kerületi) sebességgel mozog az irányítótorony! A számolt értéket hasonlítsuk össze a függvénytáblázatban található „irodalmi” értékkel!

5. Számítsuk ki fokokban is, és radiánban is, hogy egy tanítási óra alatt mekkora szöggel fordul el a Föld a tengelye körül!

6. Az 1. példában szereplő botanikus kert gyertyánfáját a kocsányos tölggyel összekötő két út között különleges liliomféléket termesztenek. Számítsuk ki, mekkora ez a terület!

7. A fokokban megadott szögeket váltsuk át radiánba:
a) 90°; b) 45°; c) 120°; d) 240°; e) 36°; f) 147°!

8. A radiánban megadott szögeket váltsuk át fokokba:
a) $\dfrac{\pi}{2}$ rad; b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad; c) $\dfrac{5\pi}{4}$ rad; d) $\dfrac{5\pi}{3}$ rad; e) $\dfrac{\pi}{12}$ rad; f) $\dfrac{7\pi}{12}$ rad!

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 241 2012.06.25. 14:47:12

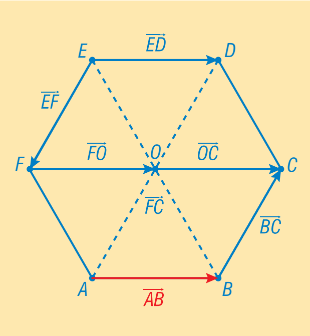
16. Vektorok, műveletek vektorokkal

Az eltolás értelmezésekor már definiáltuk a vektor fogalmát:

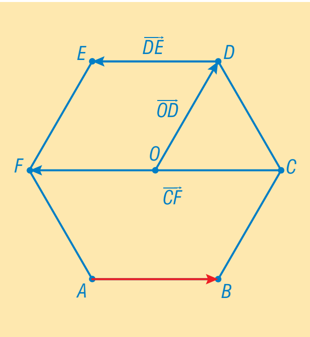
Definíció A **vektor** az egyenlő hosszúságú, irányú és irányítású irányított szakaszok halmaza.

1. példa Az *ABCDEF* szabályos hatszög középpontját jelölje *O*! (16.1. ábra) Keressünk olyan irányított szakaszt, amely az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasszal

a) párhuzamos (megegyezik az irányuk);
b) egyenlő hosszúságú és párhuzamos;
c) egyenlő hosszúságú, de nem párhuzamos;
d) megegyezik az irányuk és az irányításuk is;
e) egyenlő hosszúságú, megegyezik az irányuk és az irányításuk is!



16.1. ábra Egyenlő vektorok keresése



16.2. ábra Egyéb vektorok a szabályos hatszögben

Megoldás:
Két szabályos hatszöget is rajzolunk, hogy bizonyos irányított szakaszok jól megkülönböztethetők legyenek.

A szabályos hatszög szemközti csúcsait összekötő átlók átmennek a hatszög középpontján, és hat darab szabályos háromszögre bontják a hatszöget.

a) Az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasszal párhuzamos pl. az $\overrightarrow{ED}$, az $\overrightarrow{FO}$, az $\overrightarrow{OC}$, az $\overrightarrow{FC}$, a $\overrightarrow{DE}$ és a $\overrightarrow{CF}$ irányított szakasz.

b) Az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasszal párhuzamos és azzal egyenlő hosszúságú pl. az $\overrightarrow{ED}$, az $\overrightarrow{FO}$, az $\overrightarrow{OC}$ és a $\overrightarrow{DE}$.

c) Az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasszal egyenlő hosszúságú, de nem párhuzamos pl. a $\overrightarrow{BC}$, az $\overrightarrow{EF}$, az $\overrightarrow{OD}$.

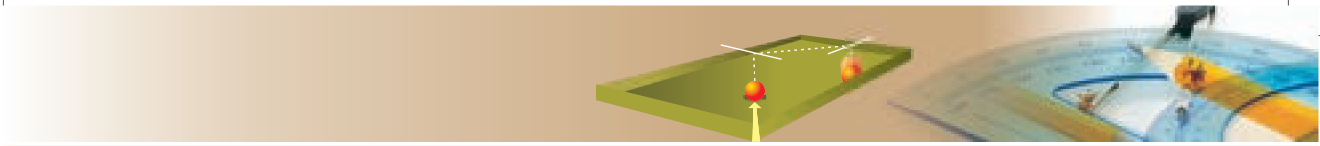
d) Ezek az a) pontban felsoroltak közül azok, amelyek azonos irányba mutatnak $\overrightarrow{AB}$-vel: az $\overrightarrow{ED}$, az $\overrightarrow{FO}$, az $\overrightarrow{OC}$ és az $\overrightarrow{CF}$ irányított szakasz.

e) Az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasszal egyenlő hosszúságú, megegyezik az irányuk és az irányításuk is: az $\overrightarrow{ED}$, az $\overrightarrow{FO}$ és az $\overrightarrow{OC}$ irányított szakasz.

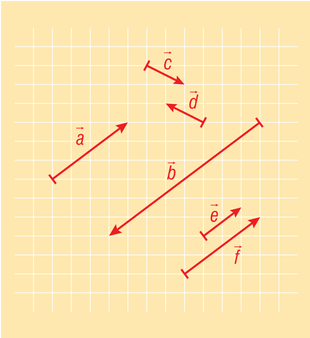
A vektor definíciója alapján tehát az $\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{ED}$, az $\overrightarrow{FO}$ és az $\overrightarrow{OC}$ irányított szakasz ugyanannak a vektornak egy-egy megjelenítése (reprezentációja). Nem precíz, de a következő szóhasználattal is szoktunk élni: az $\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{ED}$, az $\overrightarrow{FO}$ és az $\overrightarrow{OC}$ vektorok egyenlők.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC}$$

Innentől kezdve az irányított szakasz és a vektor fogalmát általában ugyanazon jelentésben használjuk. Ha ettől eltérünk, azt külön jelezni fogjuk.



2. példa A 16.3. ábrán szemléltettünk néhány vektort. Keressünk közöttük közös tulajdonságokkal rendelkező vektorpárokat! (A könnyebb összehasonlítás végett egy négyzetrácson ábrázoltuk a vektorokat.)



16.3. ábra Keressünk közös tulajdonságú vektorpárokat!

Megoldás:

Észrevehetjük, hogy az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ és $\vec{f}$ vektorok mind párhuzamosak egymással. Ezt ugyanúgy jelöljük a vektorok (és az irányított szakaszok) körében, mint az egyenesek körében: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{e}$, … , $\vec{e} \parallel \vec{f}$, vagy ha mindet egyszerre jelölni akarjuk: $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{e} \parallel \vec{f}$. De közülük csak az $\vec{a}$, az $\vec{e}$ és az $\vec{f}$ mutat ugyanabba az irányba. Ezekre azt mondjuk, **egyállású vektorok**. Jelölése: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{f}$, $\vec{e} \uparrow\uparrow \vec{f}$.

A $\vec{b}$ vektor párhuzamos az $\vec{a}$-val, de az ellenkező irányba mutat. Azt mondjuk, hogy $\vec{a}$ és $\vec{b}$ **ellentétes irányítású** vektorok. Jelölése: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Ugyanez igaz a $\vec{c}$ és a $\vec{d}$ vektorra is: $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$, ezeknek viszont még a hosszuk is egyenlő. Ilyenkor azt mondjuk: $\vec{c}$ és $\vec{d}$ egymás ellentett vektorai. Jele: $\vec{c} = -\vec{d}$.

Az egyállású $\vec{a}$ és $\vec{f}$ vektoroknak a hossza is egyenlő, tehát $\vec{a} = \vec{f}$. Ugyanakkor viszont pl. az $\vec{a}$ vektor nem párhuzamos a $\vec{c}$ vektorral. $\vec{a} \nparallel \vec{c}$.

Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy **két vektor egyenlő**, ha hosszuk is, irányuk is, irányításuk is egyenlő.

A $\vec{v}$ vektor hosszának jele: $|\vec{v}|$.

Ha $|\vec{v}| = 0$, akkor a $\vec{v}$ neve **nullvektor**: $\vec{0}$. Megállapodás szerint a nullvektor iránya tetszőleges.

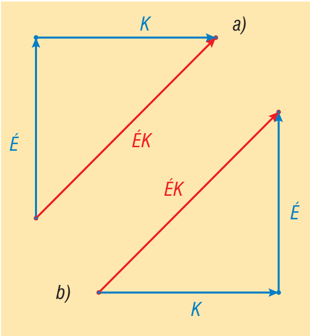
3. példa Írjuk le egyetlen vektorral annak a kocsinak az elmozdulását, amelyik

a) először észak felé megy 2 km-t, majd jobbra fordul, és kelet felé is megy 2 km-t;

b) először kelet felé megy 2 km-t, majd balra fordul, és észak felé is megy 2 km-t!

Megoldás:

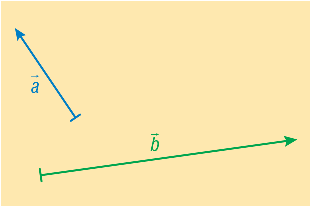
a) A kocsi a kiinduló helyétől végeredményben északkelet felé mozdult el $2 \cdot \sqrt{2}$ km-t, ami megközelítőleg 2 km és 830 m. Ehhez azt kellett csak észrevennünk, hogy a kocsi egy egyenlő szárú derékszögű háromszög két befogója mentén halad, így ennek az átfogóvektorával mozdul el. (16.4.ábra)



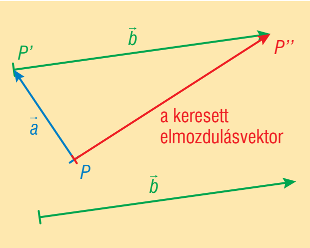
16.4. ábra 3. példa

A b) esetben a kétféle elmozdulás fölcserélődik ugyan, de nyilván ugyanazt a végső elmozdulást eredményezik, így a két elmozdulásvektor egyenlő.

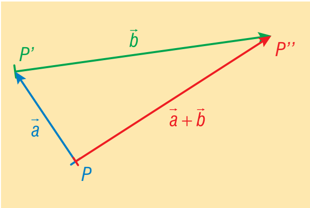
4. példa A 16.5. ábrán megadott két vektor egy-egy eltolás vektora. Mi lesz a két eltolás egymásutánjának a vektora? Szerkesszük meg!



16.5. ábra Adott két vektor



16.6. ábra Szerkesztés



16.7. ábra Összegvektor

Megoldás:
A feladat nem adja meg az eltolások sorrendjét, így nekünk kell megvizsgálnunk, mit kapunk a két lehetséges sorrend esetén. Gyorsan látszik, hogy az előző példához hasonlóan itt is ugyanaz a végeredmény, akármelyik vektorral kezdjük is az eltolást.

Mivel egy eltolás során a sík minden pontját ugyanazzal a vektorral toljuk el, így a vektort akármelyik pontból indítjuk is, ugyanazt az eltolást jellemzi. Vagyis célszerű az egyik vektor kezdőpontját a másik vektor végpontjában fölvennünk. Így egy pont (a 16.6. ábrán a P pont) képeit nyomon követhetjük. A többi ponttal pedig ugyanez történik.

A szerkesztés tehát: az egyik vektor végpontján át (P') húzzunk párhuzamost a másik vektorral! Erre az egyenesre az első vektor végpontjától (P'-től) mérjük fel a megfelelő irányban a második vektor hosszát! Az első vektor kezdőpontjából (P) az így eltolt második vektor végpontjába (P'') húzott vektor lesz a két eltolás egymásutánjaként kapott eltolás vektora: $\overline{PP''}$.

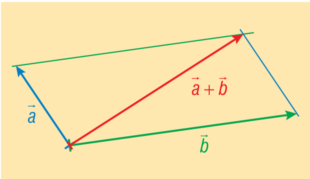
A két utóbbi példa alapján értelmezhetjük **két vektor összegét**, amely szintén vektor. (16.7. ábra)

Vegyük észre, hogy két vektor összege általában nem párhuzamos egyik összeadandó vektorral sem, továbbá az összeadandó vektorok hosszának összege általában nem egyenlő az összegvektor hosszával!

A háromszög-egyenlőtlenség alapján a hosszakról többet is mondhatunk: $|\vec{a}|+|\vec{b}| \geq |\vec{a}+\vec{b}|$, és az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

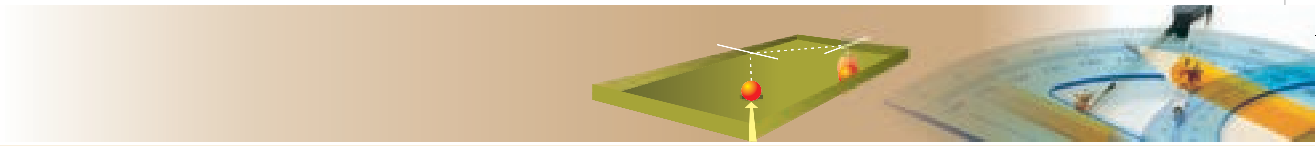
A vektorok összeadásának ezt a módszerét **összefűzéses módszernek** vagy **háromszögszabálynak** is emlegetik.

A másik közismert módszer a **paralelogrammaszabály** alapján való összeadás. Közös kezdőpontból felvesszük a két összeadandó vektort, majd végpontjukon keresztül párhuzamost húzunk a másik vektorral. Így egy paralelogramma keletkezik (ha a vektorok eredetileg nem voltak párhuzamosak egymással). A paralelogrammának a vektorok közös kezdőpontjából kiinduló átlóvektora az összegvektor. (16.8. ábra)



16.8. ábra Paralelogrammaszabály

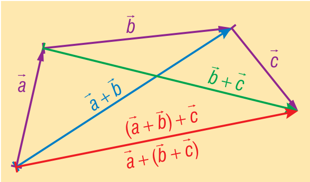
MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 244 2012.06.25. 14:47:37



Könnyen belátható, hogy a kétféle módszer ugyanazt a végeredményt szolgáltatja.

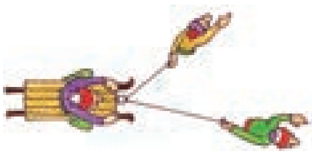
A paralelogrammamódszer alapján rögtön látható, hogy **a vektorok összeadása kommutatív művelet**, azaz a tagok bármely két vektor esetében fölcserélhetők: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Az összefűzéses módszer segítségével pedig könnyű belátni, hogy **a vektorok összeadása asszociatív művelet is**, azaz a tagok bármely három vektor esetében tetszőlegesen csoportosíthatók: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.



16.9. ábra Több vektor összeadása

5. példa Egy szánkót két gyerek húz egy-egy kötél segítségével a 16.10. ábrán látható módon. Megrajzoltuk a gyerekek által kifejtett erők vektorait. Rajzoljuk meg annak az eredő erőnek a vektorát, amelynek a hatására gyorsul a szánkó! (A súrlódástól most eltekintünk.)



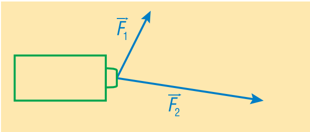
16.10. ábra Szánkózzunk!

Megoldás:

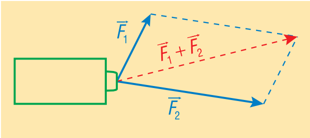
Az eredő erő a két erővektornak az összege. Mivel egy pontból kiinduló két vektorunk van, így az összeadást a paralelogrammamódszerrel érdemes végrehajtani.

Megjegyzés:

A megoldás során a fizikában használatos jelöléseket használtuk: az erő jele *F*, fölötte pedig „félnyíl” jelzi a vektor voltát.



16.11. ábra Húzóerők



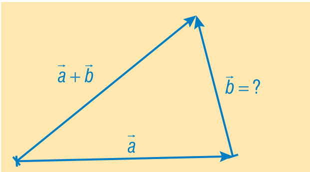
16.12. ábra Eredő erő

6. példa Adott két vektor közül az egyik, és a két vektor összegvektora. Szerkesszük meg a másik vektort!

Megoldás:

Jelöljük a két vektort $\vec{a}$ -val és $\vec{b}$ -vel! Készítsünk ábrát az összefűzéses vektorösszeadással!

Vegyük fel közös kezdőpontból az $\vec{a}+\vec{b}$ és az $\vec{a}$ vektort! Az $\vec{a}$ végpontja felől az összegvektor végpontja felé mutató vektor lesz a keresett $\vec{b}$ vektor.

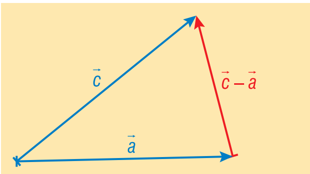


16.13. ábra 6. példa

Vegyük észre, hogy itt éppen két vektor különbségvektorát állítottuk elő! Ha az $\vec{a}+\vec{b}$-t $\vec{c}$-vel jelöljük, akkor $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$.

A vektorok kivonása a vektorösszeadás inverz művelete. Vegyük föl közös kezdőpontból a két vektort, majd kössük össze végpontjaikat! A különbségvektor annak a vektornak a végpontja felé mutat, amelyikből kivontuk a másikat. (16.14. ábra)

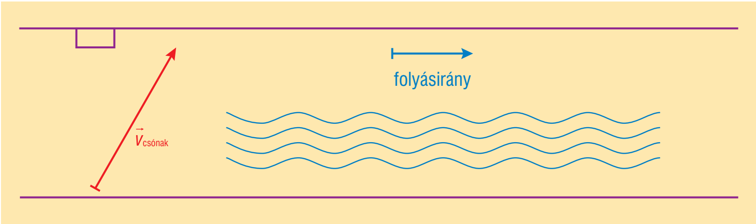
A vektorok kivonása éppen ezért nem kommutatív művelet: általában $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{b}-\vec{a}$, hiszen ellenkező az irányuk. De az bármely két vektor esetében igaz, hogy $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})$.



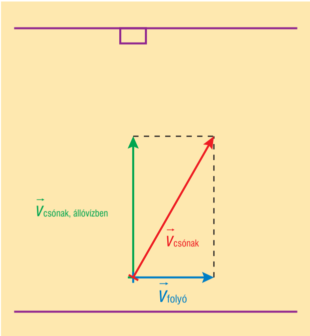
16.14. ábra Különbségvektor

16.15. ábra Vízitúra

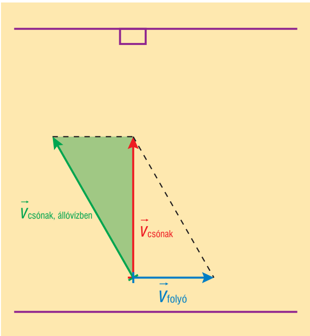
7. példa Egy csónakban ülő ember a Tisza egy egyenes szakaszán folyamatosan a partra merőlegesen evez, de így jóval lejjebb éri el a túlsó partot, mint a szemközti stég. A 16.16. ábrán megrajzoltuk a csónak parthoz viszonyított mozgásának sebességvektorát.
a) A csónaknak a folyóvízhez viszonyított sebességvektora ugyanakkora, mint az állóvízhez viszonyított sebességvektora lenne ugyanilyen intenzitású evezés mellett. Szerkesszük meg ezt a vektort!
b) Ugyanekkora sebességgel haladva milyen irányba kellene törekednie a csónaknak a folyásirányhoz képest, hogy éppen a szemközti stéghez érkezzen?



16.16. ábra 7. példa



16.17. ábra 7. a) példa



16.18. ábra 7. b) példa

Megoldás:

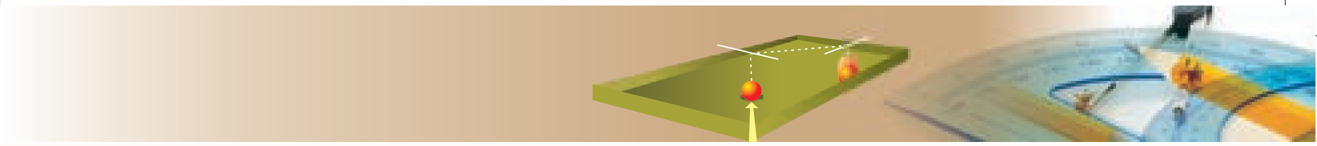
a) Ismerjük a folyósodrás sebességvektorának irányát és a csónak állóvízi sebességvektorának irányát is. Tudjuk, hogy e két vektor összeadódva adja meg a csónaknak a parthoz viszonyított sebességvektorát. Tehát olyan paralelogrammát kell szerkesztenünk, amelynek egyik oldala a parttal párhuzamos, másik oldala a partra merőleges, átlóvektora pedig az adott vektor.

Ehhez húzzunk párhuzamost az adott vektor kezdő- és végpontján át is a keresett sebességvektorok irányával. Így kialakul a keresett paralelogramma (itt téglalap). Ennek az a két oldalvektora lesz a két keresett vektor, amelyek a megadott vektorral közös kezdőpontból indulnak ki.

b) Az a) részben megszerkesztettük a csónak állóvízi sebességvektorának nagyságát.

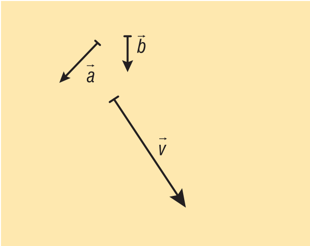
Itt az egyik vektort ismerjük minden tulajdonságával (a folyó sodrásának sebességvektorát), a másik vektornak (a csónak állóvízi sebessége) a nagyságát, az összegvektornak pedig az irányát ismerjük. Mivel tudjuk, hogy az összegvektornak merőlegesnek kell lennie a folyósodrás sebességvektorára, ezért egy olyan derékszögű háromszög szerkesztése a feladat, amelynek átfogója a csónak állóvízi sebességvektorának nagysága, egyik befogója pedig a folyó sebességvektorának nagysága. Ennek a háromszögnek a másik befogója lesz a tényleges haladás sebességének nagysága.

Vegyük észre, hogy a példa a) részében egy adott vektort felbontottunk adott irányú összetevőkre (komponensekre), és ezt a felbontást akkor is el tudjuk végezni, ha az összetevők nem merőlegesek egymásra!

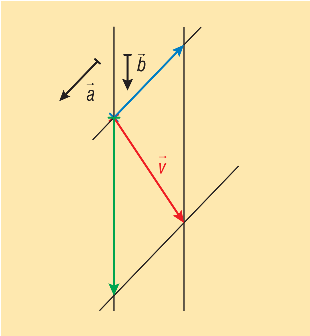


8. példa Bontsuk fel a $\vec{v}$ vektort egy $\vec{a}$ vektorral és egy $\vec{b}$ vektorral párhuzamos összetevőre!

Megoldás:
Húzzunk párhuzamost a $\vec{v}$ vektor kezdő- és végpontján át az adott $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorral. Az ábrán látható a két komponens. Mint látjuk, az összetevőknek nem kell feltétlenül egyállásúaknak lenniük a megadott vektorokkal.



16.19. ábra 8. példa



16.20. ábra Vektor felbontása adott irányú összetevőkre

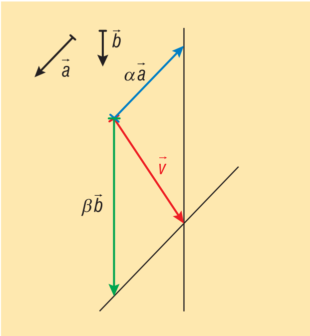
A lecke második példájában vizsgáltuk a vektorok tulajdonságait. Azt vettük észre, hogy a $\vec{b}$ vektor párhuzamos az $\vec{a}$ vektorral, de nem egyállásúak. Ugyanakkor az is megfigyelhető, hogy a $\vec{b}$ vektor hossza kétszerese az $\vec{a}$ vektor hosszának. Mindezekért azt is mondhatjuk, hogy a $\vec{b}$ vektor –2-szerese az $\vec{a}$ vektornak: $\vec{b} = -2 \cdot \vec{a}$.
A vektor számmal való szorzását így értelmezzük:

Definíció Adott az $\vec{a}$ vektor és a λ valós szám. $\lambda \cdot \vec{a}$ azt a vektort jelenti, amelyik párhuzamos az $\vec{a}$-ral, hossza az $\vec{a}$ vektor hosszának $|\lambda|$-szerese, irányítása pedig megegyezik az $\vec{a}$ irányításával, ha $\lambda > 0$, és ellentétes, ha $\lambda < 0$.
Jelekkel: $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ és ha $\lambda > 0$, akkor $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$,
ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.
(Ha $\lambda = 0$, akkor $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.)

Ennek a segítségével a legutóbbi példában azt is írhatnánk, hogy $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, ahol α és β valamilyen valós szám. (A konkrét példában $\alpha < 0$ és $\beta > 0$.) Mivel a két összetevő meghatározása a módszerből adódóan egyértelmű, így az α és a β számok is egyértelműen léteznek, ha az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektor nem párhuzamos egymással (és nem is nullvektorok). Azt is mondjuk, hogy a $\vec{v}$ (α és β együtthatókkal vett) lineáris kombinációja az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektornak.
A vektor számmal való szorzásának tulajdonságai:

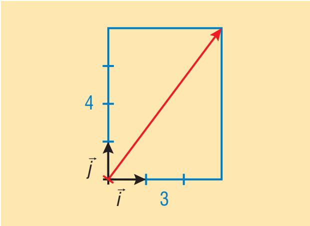
$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a} = (\alpha + \beta) \cdot \vec{a},$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a},$$
$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b},$$

ahol α és β tetszőleges valós számok, az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ pedig tetszőleges vektorok.



16.21. ábra Komponensek nagyságának meghatározása

9. példa Legyen $\vec{i}$ és $\vec{j}$ két egységnyi hosszúságú vektor (röviden egységvektor), amelyek merőlegesek egymásra. Fejezzük ki az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ vektor segítségével az $\vec{a}+\vec{b}$; az $\vec{a}-\vec{b}$ és a $2\vec{a}+5\vec{b}$ vektorokat, ha $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$ és $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$!
Számítsuk ki, milyen hosszú az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektor!



16.22. ábra 9. példa

Megoldás:
Használjuk a megismert tulajdonságokat!

$$\vec{a}+\vec{b}=(3\vec{i}+4\vec{j})+(2\vec{i}-3\vec{j})=3\vec{i}+2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{j}=5\vec{i}+\vec{j}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(3\vec{i}+4\vec{j})-(2\vec{i}-3\vec{j})=3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}+3\vec{j}=\vec{i}+7\vec{j}$$

$$2\vec{a}+5\vec{b}=2\cdot(3\vec{i}+4\vec{j})+5\cdot(2\vec{i}-3\vec{j})=6\vec{i}+8\vec{j}+10\vec{i}-15\vec{j}=16\vec{i}-7\vec{j}$$

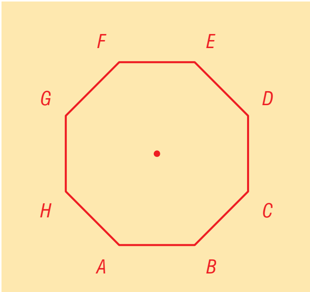
A vektorok hosszát azért tudjuk kiszámolni, mert az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ két egymásra merőleges vektor, amelyek hossza egységnyi. Így az $\vec{a}$ hossza egy 3 és 4 egység oldalhosszúságú téglalap átlójának hossza. Vagyis $|\vec{a}|^2=3^2+4^2$. $|\vec{a}|=5$.

Ugyanígy $|\vec{b}|^2=2^2+3^2=13$, $|\vec{b}|=\sqrt{13}$.

Oldjuk meg!

1. Az $ABCD$ paralelogramma $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ oldalvektora legyen rendre $\vec{a}$ és $\vec{b}$!
Fejezzük ki $\vec{a}$ és $\vec{b}$ segítségével a $\overrightarrow{BC}$, a $\overrightarrow{CD}$, az $\overrightarrow{AC}$, a $\overrightarrow{BD}$, az $\overrightarrow{AK}$ és a $\overrightarrow{KD}$ vektort, ha K a paralelogramma középpontja!

2. Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög oldalvektorainak irányítását adjuk meg úgy, hogy
a) a szemközti oldalvektorok egyenlők legyenek;
b) az összes oldalvektor összege nullvektor legyen!
Keressünk több megoldást mindkét esetben!
Hajtsuk végre a feladat b) részét szabályos ötszög esetén is!



16.23. ábra Szabályos nyolcszög

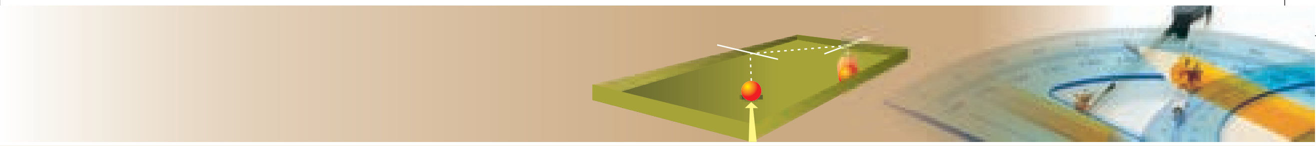
3. Irányítsuk úgy az ABC háromszög oldalvektorait ($\vec{a}$-t, $\vec{b}$-t és $\vec{c}$-t), hogy $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ teljesüljön!

4. A sík pontjain három eltolást hajtunk végre egymás után. Először az $\vec{a}$-ral, aztán a $\vec{b}$-ral, végül a $\vec{c}$-ral. Helyettesítsük egyetlen eltolással ezt a transzformációt! Adjuk meg ennek az eltolásnak a vektorát! (Vegyük föl tetszőlegesen az $\vec{a}$, a $\vec{b}$ és a $\vec{c}$ vektort!)

5. 12 km-t szeretnénk haladni délkeleti irányban. De az adott helyszínen csak keleti és délnyugati irányba tudunk elmozdulni. Rajzoljunk meg egy lehetséges utat, amely során csak egyszer kell irányt változtatnunk! Milyen hosszan kell délnyugati irányba mennünk, és milyen hosszan keleti irányba?

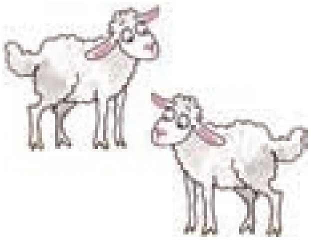
6. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a súlypontból a csúcsokhoz mutató vektorok összege nullvektor!

7. Legyen az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ két egymásra merőleges egységvektor! Fejezzük ki az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ vektor segítségével a $-\vec{a}$; a $-\vec{b}$; az $\vec{a}+\vec{b}$; a $2\vec{a}-\vec{b}$ és a $\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ vektorokat, ha $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}$ és $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{j}$!



17. Síkidomok egybevágósága

Az előző leckékben távolságtartó (más néven egybevágósági) transzformációktól indulva szereztünk újabb ismereteket. Egy síkidom egybevágósági transzformációval kapott képe alakját, méreteit, szögeit tekintve ugyanolyan, mint az eredeti síkidom. Azt mondjuk: **egybevágók**.



17.1. ábra Egybevágók?

Definíció Két síkidomot **egybevágó**nak nevezünk, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amelyik egyik síkidomot a másikba viszi át.

Az S_1 és az S_2 síkidomok egybevágóságának jele: $S_1 \cong S_2$.
Könnyen beláthatók a definíció alapján az egybevágóság (mint reláció) tulajdonságai:

- $S_1 \cong S_1$ minden síkidom egybevágó önmagával;
- ha $S_1 \cong S_2$, akkor $S_2 \cong S_1$;
- ha $S_1 \cong S_2$ és $S_2 \cong S_3$, akkor $S_1 \cong S_3$.

(A két utóbbi tulajdonság szavakba öntését az olvasóra bízzuk.)
Az egybevágósági transzformációk tulajdonságainak következménye, hogy ha két ponthalmaz egybevágó, akkor megfelelő szakaszaik hossza egyenlő, és megfelelő szögeik nagysága is egyenlő.

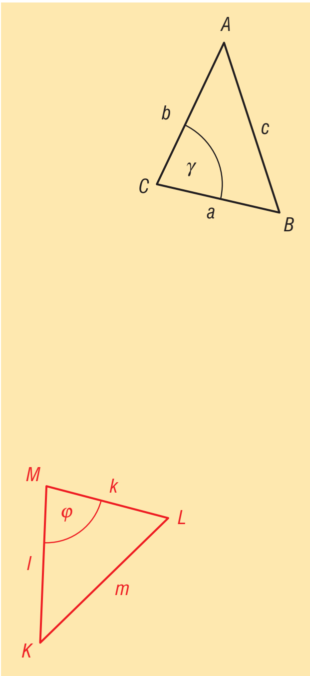
1. példa Bizonyítsuk be, hogy bármely két egyenlő sugarú kör egybevágó!

Megoldás:
A k_1 kör középpontja legyen O_1, a k_2 kör középpontja pedig O_2. Toljuk el a k_1 kört az $\overrightarrow{O_1O_2}$ vektorral. Ez az O_1 pontot az O_2-be viszi át, és mivel az eltolás távolságtartó transzformáció, ezért a k_1 kör képe is kör lesz, méghozzá ugyanolyan sugárral. Tehát a k_1 kör képe éppen a k_2 kör.

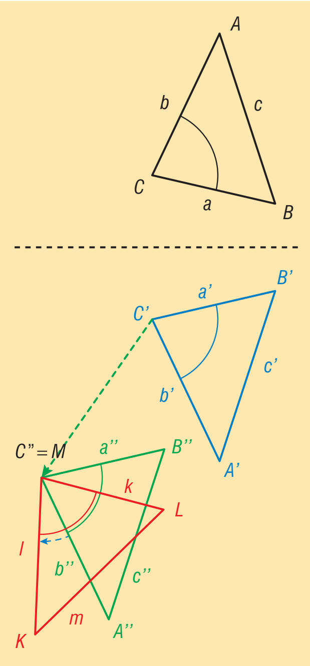
Természetesen itt bármelyik másik egybevágósági transzformációt is választhattuk volna.

2. példa Bizonyítsuk be, hogy két háromszög egybevágó, ha két-két oldaluk páronként egyenlő, és az ezek által közbezárt szögek is egyenlők!

Megoldás:
Az egyik háromszög oldalai a, b, c, a másiké k, l, m. Tudjuk, hogy $a = k$, $b = l$ és $\gamma = \varphi$. (17.2. ábra)



17.2. ábra 2. példa



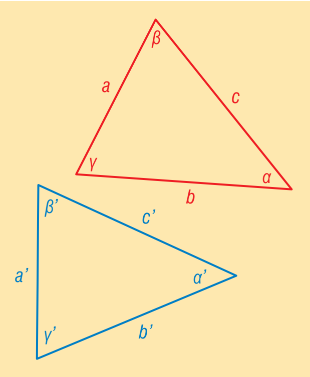
17.3. ábra Egybevágósági transzformációk

Ha a két háromszögben nem egyezik meg a körüljárási irány, akkor először hajtsunk végre egy tengelyes tükrözést az *ABC* háromszögön! (A tengelyt tetszőlegesen választhatjuk, csak az a lényeg, hogy a körüljárási irány megforduljon.) Így kapjuk az *A'B'C'* háromszöget. Ezt toljuk el a $\overrightarrow{C'M}$ vektorral: $A''B''C''\triangle$! Itt már $C''=M$.

Majd az $A''B''C''\triangle$ -et forgassuk el az *M* pont körül $A''MK\measuredangle$ -gel! Ez a forgatás az *M* pontot helyben hagyja, tehát $C'''=M$ is teljesül, ugyanakkor az A'' képe is *K* lesz, mivel a transzformációk távolságtartása miatt $b''=b$, a feltétel szerint pedig $b=l$, így $b''=l$. Ekkor $\gamma=\varphi$ miatt az a'' egyenesének a képe a *k* egyenesébe megy át. Ezeken az egyeneseken viszont egyenlő távolságra van *M*-től a B'' és az *L*, hiszen $a''=a=k$. Így $B'''=L$.

Ezzel tehát megadtunk egy olyan egybevágósági transzformációt (a tengelyes tükrözés, az eltolás és az *M* pont körüli elforgatás egymásutánját), amely az *ABC* háromszöget a *KLM* háromszögbe viszi át. A definíció értelmében tehát a két háromszög egybevágó.

Hasonlóan lehet bebizonyítani a háromszögek egybevágóságának a többi alapesetét is.



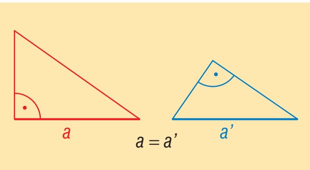
17.4. ábra Használjuk az ábra jelöléseit!

Tétel Két háromszög egybevágó (lásd 17.4. ábra), ha

- oldalaik páronként egyenlők $(a=a',\ b=b',\ c=c')$;
- két-két oldaluk páronként egyenlő, és az ezek által közbezárt szög is egyenlő $(a=a',\ b=b',\ \gamma=\gamma')$;
- két-két oldaluk páronként egyenlő, és ezek közül a hosszabbakkal (nem rövidebbikkel) szemközti szögek egyenlők $(a=a'>b=b',\ \alpha=\alpha')$;
- ha egy-egy oldaluk egyenlő, és az ezen fekvő szögek páronként egyenlők $(a=a',\ \beta=\beta',\ \gamma=\gamma')$.

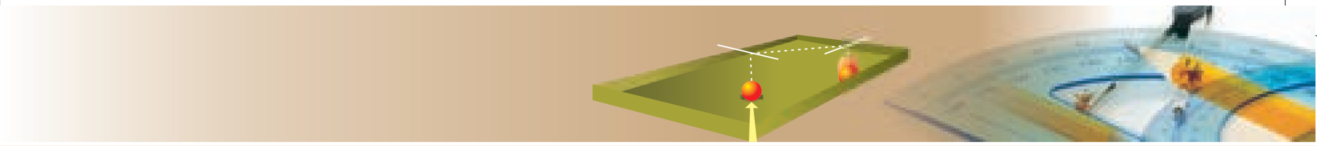
Ezen állítások mindegyike megfordítható, tehát ha két háromszög egybevágó, akkor a felsorolt adatokban megyegyeznek.

3. példa Igaz-e, hogy két háromszög egybevágó, ha egyenlő egy-egy oldaluk és két-két szögük?



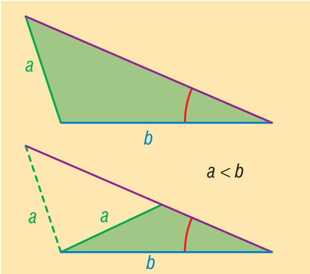
17.5. ábra 3. példa

Megoldás:
Mivel a feltételek között nem szerepel, hogy „megfelelő” szögeik egyenlők, ezért könnyen találhatunk ellenpéldát (17.5. ábra). Pl. ha az egyik szögük 90°, egy másik szögük pedig 40°, akkor lehet, hogy az egyenlő oldalak közül az egyik befogó, a másik (a másik háromszögben) pedig átfogó. A válasz tehát nemleges.



4. példa Mutassuk meg, miért van szükség az alapesetek közül (a felsorolás sorrendjében) a harmadikban arra, hogy a hosszabb oldalakkal szemközti szögek legyenek egyenlők!

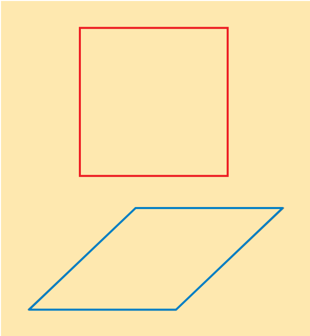
Megoldás:
Azt gyaníthatjuk, hogy található ellenpélda, ha ezt a feltételt nem teszszük bele a szövegbe. Valóban: ld. 17.6. ábra.



17.6. ábra 4. példa

5. példa Igaz-e, hogy két négyszög egybevágóságához is elegendő, hogy megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő?

Megoldás:
Nem. Vegyünk például egy négyzetet és egy ugyanilyen oldalhosszúságú rombuszt (amelynek nem 90°-osak a szögei). Ezek nyilván nem egybevágók. (17.7. ábra)

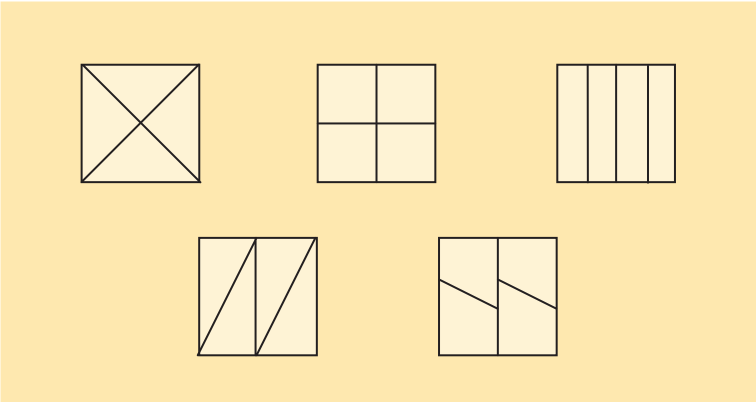


17.7. ábra 5. példa

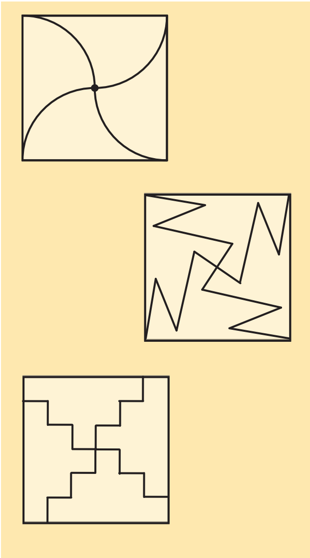
Négyszögek és általában sokszögek egybevágóságához tehát már nem elegendő, ha csak annyit tudunk, hogy oldalaik hossza páronként egyenlő.
Az viszont már igaz, hogy két sokszög egybevágó, ha
- megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő, és megfelelő szögeik is egyenlők, vagy
- megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő, és megfelelő átlóik hossza is egyenlő.

6. példa Daraboljunk fel egy négyzetet négy egybevágó ponthalmazra! Keressünk több lehetőséget!

Megoldás:



17.8. ábra Egyszerűbb megoldások



17.9. ábra Bonyolultabb megoldások

Hasonló ötleten alapul az a titkosírás is, amelyről például Jules Verne Sándor Mátyás című regényében ír. A regényben Torontál Simon emberei egy postagalambot fognak el, amelyik a következő üzenetet tartalmazza. (17.10. ábra)

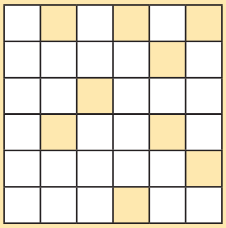
R	H	G	A	A	Z
Ü	Y	G	G	R	É
A	F	X	S	G	M
N	T	L	Á	R	E
E	Z	L	F	T	É
S	E	R	É	O	G

L	K	A	E	E	N
N	J	E	Ő	L	M
S	N	E	Ő	O	L
T	K	E	Z	K	Y
G	A	G	E	A	E
E	N	R	G	É	L

S	L	Ő	Ő	É	Z
Z	K	B	N	E	T
E	A	K	Z	L	D
S	R	N	L	É	E
I	Á	I	M	R	L
N	T	E	Ő	Z	N

17.10. ábra A levél

„Hogy honnan jött a levél, és mi a rendeltetési helye, arra semmi utalás."
A galamb útját követve megtalálják azt a szobát, ahová az üzenetet vitte a madár. Itt az után kezdenek kutatni, találnak-e valamit, ami a levélke megfejtéséhez vezetne. Egy antik szekrény fiókjában a képen látható rostélyra bukkannak. (17.11. ábra)



17.11. ábra Rostély

Vajon hogyan használják fel a rostélyt a titkosírás megfejtésére? Gondolkozzunk, próbálkozzunk!
Ha végképp nem sikerül kitalálnunk, akkor keressük meg a megfejtést a regényben!
A rostély titkának felfedése után magunk is próbálkozhatunk másfajta rostélyok és titkosírások létrehozásával!

Oldjuk meg!

1. Igaz-e, hogy két háromszög egybevágó, ha
a) mindkét háromszög derékszögű, és befogóik páronként egyenlők;
b) mindkét háromszög derékszögű, és átfogóik egyenlők, valamint egyik befogójuk hossza is egyenlő;
c) mindkét háromszög szabályos;
d) mindkét háromszög egyenlő szárú, száraik hossza egyenlő, és egyenlő egy szögük;
e) mindkét háromszög egyenlő szárú, száraik hossza egyenlő, és egyenlő a szárszögük;
f) egyenlő egy-egy oldaluk, az ezen fekvő egyik szögük és az oldallal szemközti szögük?

2. Bizonyítsuk be, hogy két négyzet egybevágó, ha átlóik hossza egyenlő!

3. Két négyszöget az egyik átlójuk két-két olyan háromszögre bont, amelyek páronként egybevágók egymással. Igaz-e, hogy a két négyszög is egybevágó?

V. fejezet

Egyenletek, egyenlőtlenségek

$$3(x-5)(x+2)=0$$

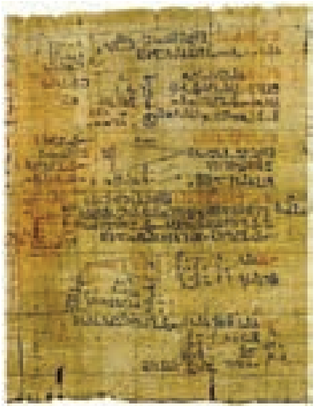
$$x=?$$

Egyenlő vagy sem?

Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Az egyenlet fogalma

1.1. ábra Egyenletekkel könnyen megválaszolható egy ilyen találós kérdés



1.2. ábra Már az ókorban is megpróbálták a problémákat megfogalmazni az algebra nyelvén. Erre példa ez a Rhind-papiruszrészlet

Számos tudományban, a technikában, a gazdasági életben nagyon sok olyan problémával kerülünk szembe, amelyeknek a megoldásában jó eszköznek bizonyul a probléma egyenletre fordítása, a matematikai modell megalkotása. De mit is értünk egyenlet alatt? Lássunk néhány egyszerű példát!

1. példa Gondoltam egy számot. Ha a szám kétszereséhez ötöt adok, akkor a szám ellentettjénél néggyel kisebb számot kapok eredményül. Melyik számra gondoltam?

Megoldás:
A találós kérdés szövegének elolvasása, megértése után, még a legegyszerűbb feladatok esetén is érdemes feltenni a „Mi is a feladat?”, „Mit is keresünk a megoldás során?”, „Mi az, ami adott a feladat szövege szerint?” kérdéseket, mert ezek és az ezekhez hasonló kérdések megválaszolásával ellenőrizhetjük, hogy valóban megértettük-e a feladatot. Most fordítsuk le a feladatot a matematika nyelvére!

Szavakkal kifejezve:	Az algebra nyelvén:
gondoltam egy számot (ezt keressük)	x (az ismeretlen)
a szám kétszereséhez ötöt adok	$2x+5$
a szám ellentettjénél néggyel kisebb számot	$-x-4$
kapok eredményül	$2x+5=-x-4$

A feladat a $2x+5=-x-4$ egyenlethez vezetett. Ebben az egyenletben egy ismeretlen (x) szerepel, és az ismeretlen előforduló legnagyobb hatványkitevője (fokszáma) egy, ilyenkor azt mondjuk, hogy ez az egyenlet **egyismeretlenes** és **elsőfokú egyenlet**.

Általában a feladat szövegéből vagy az egyenlet megadásakor kiderül, hogy az ismeretlent milyen számhalmazon keressük.

Definíció Azt a halmazt, amelyen az egyenlet megoldását keressük, az egyenlet **alaphalmazának** nevezzük.

Az 1. példa szövege nem tesz említést arról, hogy milyen halmazon keressük a megoldást, ilyenkor a valós számok halmaza az alaphalmaz.

Definíció Az alaphalmaz azon legbővebb részhalmazát, amelyen az egyenletben szereplő kifejezések értelmezhetőek, az **egyenlet értelmezési tartományának** nevezzük.

Mivel a $2x+5$ és a $-x-4$ kifejezéseknek bármilyen valós szám esetén van értelmük, ezért az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Magára az egyenletre kétféle szemlélettel tekinthetünk:
I. Az egyenlet fogalmának **egyik értelmezése** a függvényekre támaszkodik.

A **függvényekről** tanultak alapján a $2x+5=-x-4$ **egyenletet felfoghatjuk úgy is, hogy az egyenlőség jobb és bal oldalán egy-egy valós függvény hozzárendelési szabálya áll**: $f(x)=-x-4$, illetve $g(x)=2x+5$.

Így **az egyismeretlenes egyenletek** $\boldsymbol{f(x)=g(x)}$ **alakba írhatóak, amelyeknek a megoldásakor keressük a változó azon értékeit (*x*-eket), amely értékeknél az *f* és a *g* függvények helyettesítési értéke egyenlő**. Nyilvánvaló, hogy ezek az *x*-ek az *f* és a *g* függvények értelmezési tartományának közös részében lehetnek, és csak akkor **megoldásai** az egyenletnek, ha az egyenlet értelmezési tartományához is hozzátartoznak.

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az *f* és a *g* függvények grafikonjait, és olvassuk le a grafikonok közös pontjainak *x* koordinátáit! (1.3. ábra)

Az *f* és a *g* függvények képei egyenesek, egyetlen közös pontjuk van, az $M(-3;-1)$. Tehát a $2x+5=-x-4$ egyenletnek csak az $x=-3$ tehet eleget. Az $x=-3$-at a $2x+5=-x-4$ egyenletbe helyettesítve a $2(-3)+5=-(-3)-4$ egyenlőség fennáll. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $x=-3$ az **egyenlet megoldása, vagy gyöke.**

Definíció Az egyismeretlenes egyenlet **megoldásának** nevezzük azt a számot, amely eleme az egyenlet értelmezési tartományának, és az egyenletbe helyettesítve az egyenlőség fennáll.

II. A másik felfogás a matematikai logika segítségével adja meg az egyenlet fogalmát.

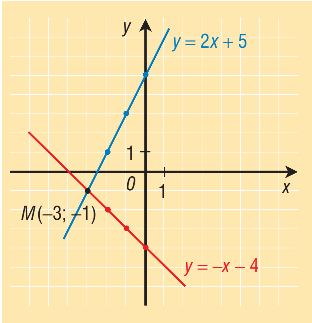
A könnyebb megértés érdekében néhány egyszerű fogalmat tisztáznunk kell, mielőtt rátérnénk e szemlélet bemutatására.

Definíció Azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy igazak vagy hamisak, **állításoknak** (ítéleteknek, kijelentéseknek) nevezzük. Az állítások logikai értéke vagy igaz, vagy hamis.

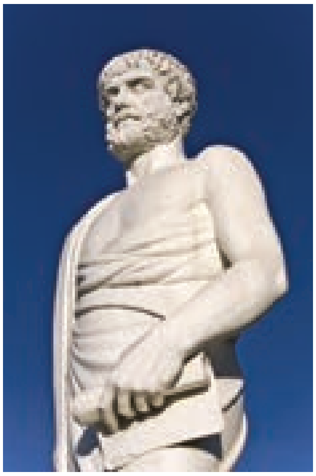
Például:

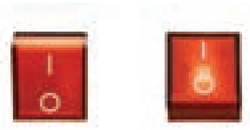
Minden téglalap paralelogramma. Ez egy kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis, tehát állítás. Logikai értéke igaz.

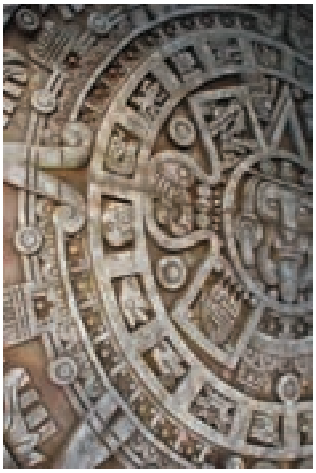
Kata a legszebb lány az iskolában. Ez egy kijelentő mondat, amelyről nem dönthető el egyértelműen, hogy igaz vagy hamis, tehát nem állítás.



1.3. ábra Grafikus megoldás

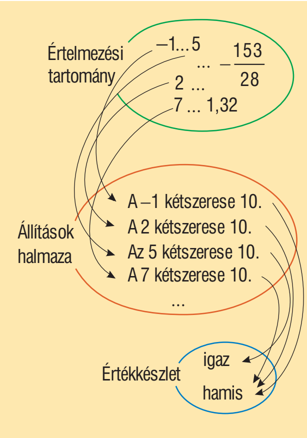

1.4. ábra Arisztotelész
(Kr. e. 384–322)
A görög filozófia nagy alakját tartjuk a logika megteremtőjének


1.5. ábra Hamis – Igaz



1.6. ábra Azték naptár

1.7. ábra Zinedine Zidane, a franciák ünnepelt labdarúgója



1.8. ábra Egy lehetséges szemléltetés

Ma augusztus 19-e van? Ez egy kérdő mondat, tehát nem állítás.

Zinedine Zidane, a középpályás futballista, pályafutásának ideje alatt bajnoki meccsein több mint 90 gólt rúgott. Ez egy kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis, tehát állítás. Logikai értéke igaz. (Pontosan 95 gólt rúgott a bajnoki mérkőzésein.)

Hétnek a kétszerese tíz. Ez egy kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis, tehát állítás. Logikai értéke hamis.

Egy *x* valós számnak a kétszerese tíz. Ez egy kijelentő mondat, amelyről nem dönthető el egyértelműen, hogy igaz vagy hamis, tehát nem állítás.

Ha az x helyére például kettőt írunk, akkor viszont olyan állítást kapunk, amelynek logikai értéke hamis. Ha ötöt helyettesítünk, akkor a kapott állítás logikai értéke igaz.

Az „Egy x valós számnak a kétszerese tíz.” kijelentő mondatot az algebra nyelvén a $2x=10$ egyenlettel fogalmazhatjuk meg. Így a $2x=10$ egyenlet egy olyan hiányos állításnak tekinthető, amelynek logikai értéke attól függ, hogy az x (a változó) helyére mit helyettesítünk. Ekkor egy **ún. logikai függvényt** adunk meg, ugyanis a változó (x) lehetséges értékeihez hozzárendeljük az igaz, hamis logikai értékeket. A logikai függvényeket is szemléltethetjük nyíldiagram segítségével. (1.8. ábra)

Összefoglalva, **az egyenlet egy logikai függvénynek tekinthető. A megoldás során a változó olyan értékeit keressük, amelyre a függvény az igaz logikai értéket veszi fel.** Ennél a szemléletmódnál az egyenlet megoldáshalmaza elnevezés helyett az **egyenlet igazsághalmaza használatos.**

Az 1. példában a $2x+5=-x-4$ egyenlet állítása $x=-3$-nál az igaz, $x\neq-3$-nál a hamis logikai értéket veszi fel. Az egyenlet igazsághalmaza: $\{-3\}$.

2. példa Melyik az a természetes szám, amelynek kétszereséből kettőt kivonva, az így kapott számot megfelezve a számnál eggyel kisebb számot kapunk eredményül?

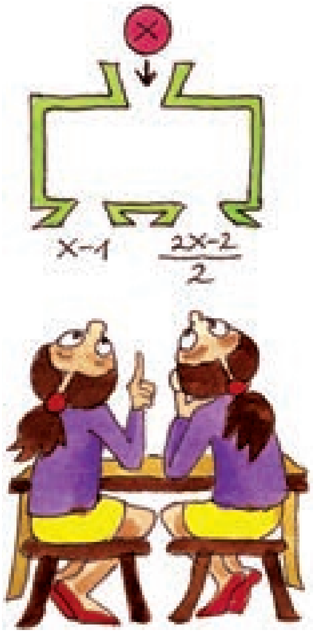
Megoldás:

„Fordítsuk le” a problémát az algebra nyelvére!

Szavakkal kifejezve:	**Az algebra nyelvén:**
a keresett szám	x
a szám kétszereséből kettőt kivonva	$2x-2$
a kapott számot megfelezve	$\frac{2x-2}{2}$
a keresett számnál eggyel kisebb számot	$x-1$
kapok eredményül	$\frac{2x-2}{2}=x-1$

A $\dfrac{2x-2}{2}=x-1$ egyenlet alaphalmaza, értelmezési tartománya a természetes számok halmaza $(\mathbb{N})$. Az egyenlet jobb oldalán álló tört kettővel történő egyszerűsítése után az $x-1=x-1$ egyenlethez jutunk, amelynek jobb és bal oldalán ugyanaz a kifejezés van. Most már azokat a számokat keressük, amelyek egyenlők önmagukkal. Mivel bármelyik szám egyenlő önmagával, ezért az egyenletnek bármely értelmezési tartománybeli elem megoldása. Az ilyen egyenleteket **azonosságnak** nevezzük, ekkor az egyenlet megoldáshalmaza az egyenlet értelmezési tartományával egyenlő.

A $\dfrac{2x-2}{2}=x-1$ egyenlet megoldáshalmaza tehát a természetes számok halmaza.



1.9. ábra A matematika ikrei

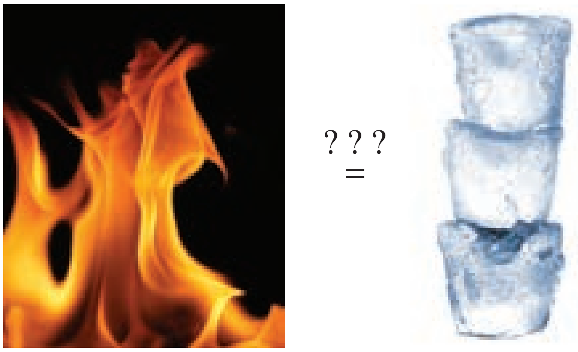
3. példa Melyik az a valós szám, amelynek ellentettje egyenlő a számnál öttel nagyobb szám ellentettjével?

Megoldás:

Szavakkal kifejezve:	**Az algebra nyelvén:**
a keresett szám	x
a szám ellentettje	$-x$
a számnál öttel nagyobb szám ellentettje	$-(x+5)$
a szám ellentettje egyenlő a számnál öttel nagyobb szám ellentettjével	$-x=-(x+5)$

Az egyenlet alaphalmaza, értelmezési tartománya a valós számok halmaza $(\mathbb{R})$. Az egyenlet bal oldalán levő zárójel felbontása után a $-x=-x-5$ egyenletet kapjuk. Ott tartunk, hogy keressük azt a valós számot, amely egyenlő a nála öttel kisebb számmal. Ilyen szám nyilvánvalóan nem létezik. Ekkor azt mondjuk, hogy **ellentmondás**hoz jutottunk, az egyenletnek nincs megoldása (gyöke). Az egyenlet megoldáshalmaza az üres halmaz $(\varnothing)$.

1.10. ábra Az ogrék gyakran keverednek ellentmondásba



1.11. ábra Ellentmondás

Egyenletek, egyenlőtlenségek

Oldjuk meg!

1. Az alábbi egyenletek alaphalmaza a valós számok halmaza, adjuk meg az egyenletek értelmezési tartományait!

a) $3x-5=-\frac{1}{2}x+2$ b) $\frac{6}{x+3}=\sqrt{x+4}$ c) $x^2-3=\frac{1}{|x-3|}$

d) $x^2+10x+25=-|x+5|$ e) $3\sqrt{2-x}-2=|x|$ f) $\left[\frac{2}{3}x\right]=x-5$

g) $2x^2-x=\sqrt{2x-1}$ h) $\sqrt{2x-14}=\sqrt{6-x}$

2. Az alábbi egyenletek alaphalmaza a racionális számok halmaza. Döntsük el, hogy az $x=-\frac{6}{5}$, az $x=0,\dot{1}$, az $x=5$ gyöke-e az egyenleteknek!

a) $9x=1$ b) $x^2-1=\left|x+\sqrt{2}\right|+1$ c) $x^2-25=\sqrt{x-5}$

d) $x^2+x+6=\frac{24}{5}x$ e) $3x-2=\sqrt{4x-5}$ f) $[x]=\sqrt{x}$

3. Döntsük el az alábbi mondatokról, hogy állítások-e, és adjuk meg az állítások logikai értékét!
a) Az 1 a legkisebb prímszám.
b) A téglalap átlói felezik egymást.
c) Párizs a világ legszebb városa.
d) Ha egy szám osztható néggyel és hattal, akkor osztható huszonnéggyel is.
e) A háromszög súlyvonalai felezik a háromszög területét.
f) A páratlan számok négyzeténél eggyel kisebb szám osztható nyolccal.
g) Ha egy háromszög oldalai 10 cm, 24 cm, 26 cm, akkor a háromszög köré írt kör sugara 13 cm.
h) A fogorvos sokba kerül.

4. Milyen logikai értéket vesznek fel az alábbi logikai függvények az $x=1$, $x=-2$ és az $x=\frac{2}{3}$ esetén? Mely x esetén veszik fel az alábbi logikai függvények az igaz logikai értéket?
a) Ha az x 2-szereséből egyet elveszünk, akkor 3-at kapunk eredményül.
b) Ha az x-et négyzetre emeljük, akkor 4-et kapunk eredményül.
c) Ha az x reciprokát vesszük, akkor $-\frac{3}{2}$-et kapunk eredményül.
d) Ha az x-nél 2-vel kisebb számból gyököt vonunk, akkor -1-et kapunk eredményül.
e) Ha egy szám kisebb 6-nál, akkor kisebb x-nél is.
f) Ha egy szám osztható 45-tel, akkor osztható x-szel is.

5. Mely x esetén veszik fel az alábbi logikai függvények az igaz logikai értéket?
a) Az x négyszög olyan, amelynek átlói felezik egymást.
b) Az x háromszög olyan, amelyben a belső szögek aránya $1:2:3$.
c) Az x négyszög olyan, amelynek van két párhuzamos oldala.
d) Az x háromszög olyan, amelynél a beírt és a köré írt kör középpontja egybeesik.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 258 2012.06.25. 14:49:49

2. Az egyenletek megoldása grafikus úton

Az egyenlet azon értelmezéséből, miszerint az egyenlet jobb és bal oldalán egy-egy függvény hozzárendelési szabálya áll, és az egyenlet megoldásakor keressük a változó azon értékeit, amely értékeknél a két függvény helyettesítési értéke egyenlő, kézenfekvőnek tűnik a megoldás grafikus úton történő keresése.

A **grafikus módszer lényege** az, hogy közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk a két függvény grafikonját. Az egyenlet megoldásai az értelmezési tartomány olyan elemei, amelyeknél a két függvény helyettesítési értéke egyenlő.

Szemléletesen: a két grafikon közös pontjainak x koordinátái (abszcisszái) az egyenlet megoldásai, feltéve, hogy ezen x-ek elemei az egyenlet értelmezési tartományának.

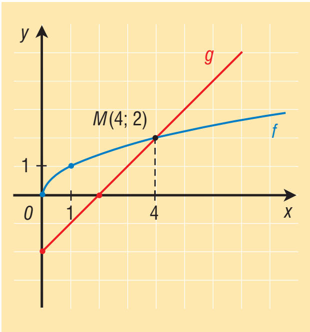
2.1. ábra Az ábrázolás segít

1. példa Oldjuk meg grafikusan a $\sqrt{x} = x - 2$ egyenletet!

Megoldás:
Mivel a feladat nem adja meg az egyenlet alaphalmazát, ezért az alaphalmaz a valós számok halmaza. Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmaza, amelyen a $\sqrt{x}$ és az $x-2$ kifejezések értelmezhetőek. A négyzetgyök definíciója miatt a $\sqrt{x}$ kifejezésnek $x \geq 0$ esetén, az $x-2$ kifejezésnek pedig bármely valós szám esetén van értelme, így az egyenlet értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza $\left(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-\right)$. Ábrázoljuk az egyenlet két oldalának megfelelő $f\left(x\right) = \sqrt{x}$ és $g\left(x\right) = x - 2$ valós függvényeket! (2.2. ábra).

A két grafikonnak egy közös pontja van, az $M(4;2)$, tehát a két függvény helyettesítési értéke $x = 4$-nél egyenlő.

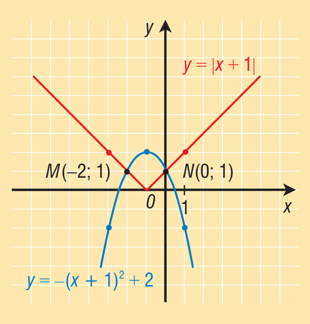
Az ábrázolás és a közös pont x koordinátájának leolvasása pontatlan is lehet, ezért ellenőrzéssel meggyőződünk arról, hogy az $x = 4$-nél a függvényértékek valóban egyenlők-e: $f\left(4\right) = \sqrt{4} = 2$ és $g\left(4\right) = 4 - 2 = 2$. Tehát $f\left(4\right) = g\left(4\right)$, így az egyenletnek $x = 4$ a megoldása.



2.2. ábra Az 1. példa grafikus megoldása

2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán a $-x^2 - 2x + 1 = |x+1|$ egyenletet!

Megoldás:
A feladat szövege szerint az egyenlet megoldását a valós számok halmazán keressük, tehát az egyenlet alaphalmaza a valós számok halmaza. Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.



2.3. ábra A 2. példa grafikus megoldása

Ábrázoljuk az egyenlet jobb és bal oldalának megfelelő $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ és $g(x) = |x+1|$ valós függvényeket!

A g függvény grafikonját megkaphatjuk úgy, hogy az $x \mapsto |x|$ alapfüggvény grafikonját az x tengely mentén negatív irányba eltoljuk 1 egységgel.

Az f függvény másodfokú, grafikonja negatív irányba nyíló parabola. Az f függvény hozzárendelési szabályát a szokásos módon átalakítjuk: $f(x) = -\left[x^2 + 2x - 1\right] = -\left[\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2\right] = -(x+1)^2 + 2.$

Most már vázolni tudjuk az f függvény képét az $x \mapsto x^2$ alapfüggvényből kiindulva, a tanult függvénytranszformációk segítségével. A két grafikonnak két közös pontja van (M, N), így az egyenletnek két megoldása van, az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 0$. Ellenőrizzük le a kapott megoldásokat!

$x = -2$ ellenőrzése:

$$\left.\begin{aligned} f(-2) &= -(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 1 = 1 \\ g(-2) &= |-2+1| = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-2) = g(-2)$$

$x = 0$ ellenőrzése:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -(0)^2 - 2\cdot(0) + 1 = 1 \\ g(0) &= |0+1| = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(0) = g(0)$$

Tehát az egyenlet megoldásai $x_1 = -2$ és $x_2 = 0$.

3. példa Melyik az a valós szám, amelynek –3-szorosánál öttel nagyobb szám egyenlő a számnál kettővel kisebb szám reciprokával?

2.4. ábra Egyenlő mennyiségek, egyforma labdák

Megoldás:

„Fordítsuk le” a problémát az algebra nyelvére!

Szavakkal kifejezve:	**Az algebra nyelvén:**
a keresett szám	x
–3-szorosánál öttel nagyobb szám	$-3x + 5$
a számnál kettővel kisebb szám reciproka	$\dfrac{1}{x-2}$
–3-szorosánál öttel nagyobb szám egyenlő a számnál kettővel kisebb szám reciprokával	$-3x + 5 = \dfrac{1}{x-2}$

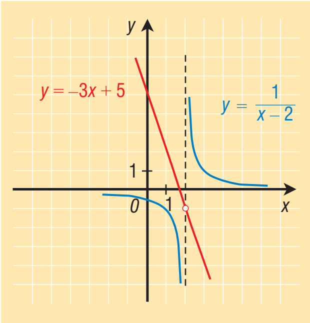
Az egyenlet alaphalmaza a valós számok halmaza. Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmaza, amelyen a $-3x + 5$ és az $\dfrac{1}{x-2}$ kifejezések értelmezhetőek. Mivel a nullával való osztás értelmetlen, ezért $x - 2 \neq 0$, így az egyenlet értelmezési tartománya a $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ábrázoljuk az egyenlet jobb és bal oldalának megfelelő $f(x)=-3x+5$ és a $g(x)=\frac{1}{x-2}$ valós függvényeket!

Az f függvény elsőfokú, grafikonja olyan egyenes, amely az y tengelyt a $(0;5)$ pontban metszi és a meredeksége –3.

A g függvény elsőfokú törtfüggvény, grafikonja hiperbola. A g függvény képét megkaphatjuk úgy, hogy az $x \mapsto \frac{1}{x}$ alapfüggvény grafikonját eltoljuk az x tengely mentén pozitív irányba kettő egységgel.

A két grafikonnak nincs közös pontja, az egyenletnek **nincs valós megoldása.**

Tehát nincsen olyan valós szám, amelynek –3-szorosánál öttel nagyobb szám egyenlő a számnál kettővel kisebb szám reciprokával



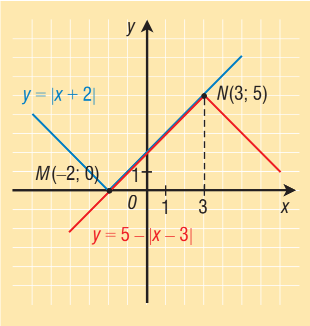
2.5. ábra A 3. példa grafikus megoldása

4. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az $|x+2|=5-|x-3|$ egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet mindkét oldalán egy-egy abszolútérték-függvény hozzárendelési szabálya áll. Ezen függvények grafikonjait az $x \mapsto |x|$ alapfüggvényből kiindulva, transzformációk segítségével pontosan megkaphatjuk.

A két grafikonnak végtelen sok közös pontja van, az MN szakasz pontjai. Tehát az egyenletnek végtelen sok megoldása van, az egyenlet megoldáshalmaza a $[-2;3]$ intervallum.



2.6. ábra A 4. példa grafikus megoldása

Vegyük észre, hogy behelyettesítéssel most nem tudunk meggyőződni arról, hogy a $[-2;3]$ intervallum minden eleme hozzátartozik a megoldáshalmazhoz, ilyenkor másfajta (később ismertetett) okoskodásra is szükségünk lesz!

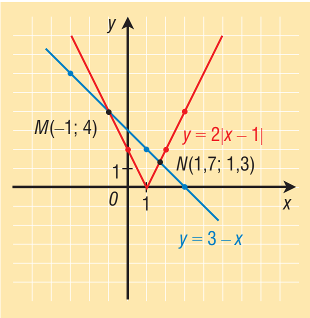
5. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán a $2|x-1|=3-x$ egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet két oldalának megfelelő $f(x)=2|x-1|$, $g(x)=3-x$ valós függvények grafikonjainak két közös pontja van: $M(-1;4)$, illetve $N(1,7;1,3)$. A grafikonok megrajzolásához felhasznált rácspontok alapján tudjuk, hogy az M pont illeszkedik mindkét grafikonra, koordinátáit pontosan meg tudjuk határozni, az N pont koordinátáit azonban csak közelítőleg állapíthatjuk meg. A közös pontok leolvasott x koordinátái: $x=-1$, $x=1,7$.

Ellenőrizzük le a kapott értékeket!

$$x_1=-1 \text{ ellenőrzése: } \left.\begin{aligned} f(-1)&=2|-1-1|=4 \\ g(-1)&=3-(-1)=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-1)=g(-1)$$



2.7. ábra Az 5. példa grafikus megoldása

$x_2 = 1,7$ ellenőrzése: $\left.\begin{aligned} f(1,7) &= 2|1,7-1| = 1,4 \\ g(1,7) &= 3-1,7 = 1,3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(1,7) \approx g(1,7)$

Az $x = 1,7$ esetén az f és a g függvények helyettesítési értékei nem egyenlők, csak megközelítőleg, ilyenkor azt mondjuk, hogy az egyenlet egyik megoldása -1, a másik gyök közelítő értéke 1,7.

2.8. ábra Az éles látás fontos az ábrázolásnál

Olykor a grafikus módszer alkalmazása a feladatmegoldótól sasszemet, és nagyon pontos ábrázolást kíván. A módszer legnagyobb hátránya az ábrázolásból és a megoldások leolvasásából adódó pontatlanság. (Például az előző feladatnál a megoldások pontos értéke: -1 és $\frac{5}{3}$.) De mielőtt elvetnénk ezt a módszert, vegyük észre, hogy az első három példa olyan volt, amelyek más úton való megoldása meghaladja jelenlegi ismereteinket, illetve a feladatmegoldótól jóval több „eszköz” ismeretét igényli. A grafikus módszer előnye többek között az, hogy szemléletes, az egyismeretlenes egyenletek többségének megoldását egyszerűvé teszi, könnyedén nyújt információt az egyenletek megoldásainak számáról is. Lássunk az utóbbira néhány példát!

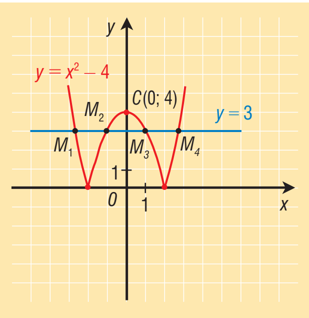
6. példa Hány megoldása van a $\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = 3$ egyenletnek a valós számok halmazán?

Megoldás:

A feladat szövege szerint **nem a konkrét *x* értékeket** keressük, hanem csak a megoldások számát. Grafikus módszer alkalmazása esetén ez azt jelenti, hogy az egyenlet két oldalának megfelelő grafikonok **közös pontjainak számát** kell csak meghatározni.

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldalán a négyzetgyök alatti $x^4 - 8x^2 + 16$ kifejezés egy teljes négyzet, mégpedig $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$! A gyökvonást el tudjuk végezni, ezért az egyenlet bal oldalának megfelelő valós függvény az $f(x) = |x^2 - 4|$. Így az egyenlet értelmezési tartományáról is rögtön lehet tudni, hogy az a valós számok halmaza.

Az f függvény képét az $x \mapsto x^2 - 4$ másodfokú függvény grafikonjából kaphatjuk meg úgy, hogy az $x \mapsto x^2 - 4$ grafikonjának (pozitív irányba nyíló parabolának) az *x* tengely alatti részét tükrözzük az *x* tengelyre. Az egyenlet jobb oldalának megfelelő valós függvény az ún. konstans függvény, a $g(x) = 3$, amelynek grafikonja egy *x* tengellyel párhuzamos egyenes. (2.9. ábra).



2.9. ábra A 6. példa grafikus megoldása

A két grafikonnak négy közös pontja van, tehát az egyenletnek négy megoldása van a valós számok halmazán.

7. példa Jelöljön p egy tetszőleges, adottnak tekintett, nullától különböző valós számot! Mutassuk meg, hogy az $|x+2p|=\frac{p}{x}$ egyenletnek bármilyen p érték esetén egyetlenegy megoldása van a valós számok halmazán!

Megoldás:

Mielőtt bármilyen megállapításokat tennénk, érdemes megfejteni, a grafikus szemléletünkkel lefordítani, hogy mi is a feladat. Az egyetlenegy megoldás azt jelenti, hogy a jobb és a bal oldalnak megfelelő függvények grafikonjainak egy közös pontja van. A feladat állítása az, hogy egy közös pont van bármilyen p érték $(p \neq 0)$ esetén.

Az egyenlet alaphalmaza a valós számok halmaza, értelmezési tartománya a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, mert a nevezőben nem állhat nulla.

A jobb oldalnak megfelelő függvény egy abszolútérték-függvény, amelynek grafikonját az $x \mapsto |x|$ alapfüggvény képének az x tengely mentén történő eltolásával kaphatjuk meg: $p>0$ esetén $2p$ egységgel az x tengely mentén negatív irányba (2.10. a) ábra), $p<0$ esetén $-2p$ egységgel a pozitív irányba való eltolással (2.10. b) ábra).

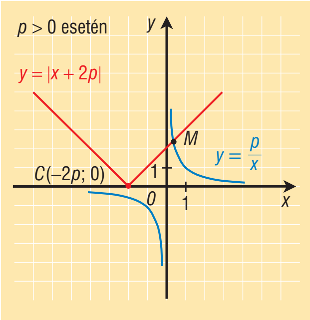
A bal oldalnak megfelelő függvény egy elsőfokú törtfüggvény, grafikonját az $x \mapsto \frac{1}{x}$ alapfüggvény transzformációjából kaphatjuk meg. $p>0$ esetén p-szeresére nyújtjuk az y tengely mentén (2.10. a) ábra), $p<0$ esetén $-p$-szeresére nyújtjuk az y tengely mentén, majd az így kapott grafikont tükrözzük az x tengelyre (2.10. b) ábra).

Vegyük észre, hogy az egyenlet két oldalának megfelelő függvények képének ábrázolásához két esetet kellett megkülönböztetni $(p>0$ és $p<0$ eseteket), mert csak ezen feltételezések mellett sikerült felvázolni a grafikonokat. Mindkét esetben $(p>0$ és $p<0)$ az ábrák szerint egy közös pont van, az előző példa azonban rámutatott arra, hogy a szemléltetés mellett a megoldás folyamán fel kell használnunk a függvényekről tanult ismereteinket is.

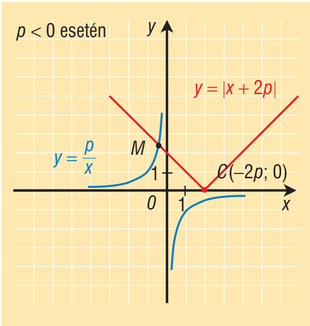
$p>0$ esetén (2.10. a) ábra) a $]-\infty;0[$-on nem lehet a két grafikonnak közös pontja, hiszen ezen az intervallumon az f függvény csak nemnegatív, a g függvény csak negatív értékeket vesz fel. A $]0;\infty[$-on az f függvény szigorúan monoton nő, értékkészlete a $]2p;\infty[$, a g függvény ezen az intervallumon szigorúan monoton csökken, értékkészlete a $]0;\infty[$, így a két függvény grafikonjának a $]0;\infty[$-on pontosan egy közös pontja van.

$p<0$ esetén (2.10. b) ábra) a $]0;\infty[$-on nem lehet a két grafikonnak közös pontja, hiszen ezen az intervallumon az f függvény csak nemnegatív, a g függvény csak negatív értékeket vesz fel. A $]-\infty;0[$-on az f függvény szigorúan monoton csökken, értékkészlete a $]-2p;\infty[$, a g függvény ezen az intervallumon szigorúan monoton nő, értékkészlete a $]0;\infty[$, így a két függvény grafikonjának a $]-\infty;0[$-on pontosan egy közös pontja van.

Tehát beláttuk, hogy bármely nullától különböző valós p esetén egyetlenegy megoldása van az egyenletnek.



2.10. a) ábra A 7. példa grafikus megoldása $p>0$ esetén



2.10. b) ábra A 7. példa grafikus megoldása $p<0$ esetén

Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg grafikus módszerrel az alábbi egyenleteket!

a) $2x-4=-3x+6$ b) $(x-2)^2=x$ c) $\frac{3}{2}x-4=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ d) $\frac{2}{x+1}=x+2$ e) $-|x+2|=-x^2-4x+2$

2. Fordítsuk át az alábbi problémákat egyenletekre, majd grafikus módszerrel oldjuk is meg a felírt egyenleteket!

a) Melyek azok a valós számok, amelyek kettővel kisebbek a négyzetüknél?

b) Melyek azok az egész számok, amelyeknek a felénél eggyel nagyobb szám egyenlő a szám abszolút értékénél eggyel kisebb számmal?

c) Melyek azok a valós számok, amelyeknek négyzetét egyből kivonva a szám reciprokának abszolút értékét kapjuk meg?

d) Melyek azok a racionális számok, amelyek négyzetgyökének az ellentettje egyenlő a számnál kettővel kisebb számmal?

e) Melyek azok a valós számok, amelyek reciprokánál eggyel nagyobb szám egyenlő a számnál eggyel nagyobb szám négyzetének a felével?

3. Jelöljön p egy tetszőleges, adottnak tekintett valós számot (ún. paramétert). Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek a valós számok halmazán?

a) $|x^2-2x-3|=p+1$ b) $\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}=px$ c) $\frac{1}{x-3}-1=x+p$

3. Az egyenletek megoldása algebrai úton

3.1. ábra A cél többféle úton is elérhető

Mielőtt rátérnénk az algebrai utak ismertetésére, érdemes tisztázni, hogy nem létezik olyan módszer, amelynek alkalmazásával bármely egyenlet gépiesen megoldható lenne. Az alábbiakban néhány olyan ötletet, gondolatot vetünk fel csupán, amelyek ismerete a középiskolai tanulmányaink során előforduló egyenletek megoldásában segít majd.

A megoldást többféle úton is kereshetjük:

- leggyakrabban az ismeretlen kifejezésével, egyenletrendezéssel (ha az egyenlet egyváltozós, egyismeretlenes);
- az egyenlet értelmezési tartományának vizsgálatával;
- az egyenlet értékkészletének vizsgálatával;
- az egyenlet értelmezési tartományának és értékkészletének vizsgálatával;
- szorzattá alakítással;
- az algebrai és a grafikus megoldási módok együttes alkalmazásával.

3. 1. Az ismeretlen kifejezése egyenletrendezéssel

Az egyenletek megoldásakor általában át kell rendeznünk az egyenleteket, ezen átalakítások során figyelnünk kell (kellene) arra, hogy a kapott új egyenletek értelmezési tartománya hogyan viszonyul az eredeti egyenlet értelmezési tartományához. Az értelmezési tartomány szűkülése, bővülése ugyanis a megoldáshalmaz szűküléséhez, bővüléséhez vezethet.

Korábbi tanulmányainkból már tudjuk, hogy ha

- **az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk, vagy mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a valós számot, vagy**
- **az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző valós számmal,**
- **akkor az új egyenlet értelmezési tartománya, megoldáshalmaza egyenlő az eredeti egyenletével. Ekkor az ún. mérlegelv szerint járunk el**.

De hogyan változhat az egyenlet értelmezési tartománya, megoldáshalmaza akkor, ha az egyenlet mindkét oldalához ismeretlent tartalmazó kifejezést adunk hozzá, vagy az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk egy ismeretlent tartalmazó kifejezéssel?

3.2. ábra Ismételjünk!

1. példa Melyik az a szám, amelynek kétszereséhez hármat adva ötöt kapunk eredményül?

Megoldás:

Szavakkal kifejezve:	**Az algebra nyelvén:**
a keresett szám	x
a szám kétszereséhez hármat adva	$2x+3$
ötöt kapok eredményül	$2x+3=5$

A kapott egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Oldjuk meg!

(1) $2x+3=5$ $/-3$ Az egyenlet mindkét oldalából kivonunk hármat.
(2) $2x=2$ $/:2$ Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk kettővel.
(3) $x=1$

Az egyenlet megoldása során a mérleg-elv szerint jártunk el, tehát az eredeti egyenlet megoldása $x=1$.

2. példa Oldjuk meg a $3(x-2)-\frac{1}{2}(4x+6)=5(x-7)+4$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenlet alaphalmaza és az értelmezési tartománya is a valós számok halmaza. Mielőtt elkezdhetnénk az egyenlet rendezését,

fel kell bontanunk a zárójeleket, el kell végeznünk a kijelölt műveleteket, } (1) $3x-6-2x-3=5x-35+4$

össze kell vonnunk, ha lehet. (2) $x-9=5x-31$

3.3. ábra Mérlegeljünk pontosan!

3.4. ábra Mindkét oldalt tisztán kell látnunk

3.5. ábra Az ellenőrzés fontos

Most már kezdődhet az egyenlet rendezése, mivel az egyenlet elsőfokú, ezért célunk az, hogy az ismeretlent az egyenlet egyik oldalára, a számokat az egyenlet másik oldalára rendezzük.

(3) $x-9=5x-31 \quad / -x$ Az egyenlet mindkét oldalából elveszünk egy x-et.

(4) $-9=4x-31 \quad / +31$ Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk 31-et.

(5) $22=4x \quad / :4$ Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 4-gyel.

(6) $x=\dfrac{11}{2}$

Vegyük észre, hogy a megoldás során az egyenlet mindkét oldalából kivontunk egy ismeretlent tartalmazó kifejezést, a (3) számú egyenletből így kaptuk meg a (4) számú egyenletet! Mindkét egyenlet értelmezési tartománya megegyezik az eredeti egyenlet értelmezési tartományával. A (4) számú egyenlet megoldáshalmaza ugyanaz, mint az eredeti egyenleté, tehát a feladat megoldása az $x=\dfrac{11}{2}$.

Ilyenkor nem kellene ellenőriznünk a kapott megoldást, azonban előfordulhat, hogy a több lépésből álló rendezés során számolási hibát követünk el, emiatt célszerű a kapott szám helyességéről ellenőrzéssel meggyőződni. Ellenőrzés:

A bal oldal helyettesítési értéke: $3\left(\dfrac{11}{2}-2\right)-\dfrac{1}{2}\left(4\cdot\dfrac{11}{2}+6\right)=$

$=\dfrac{21}{2}-\dfrac{28}{2}=-\dfrac{7}{2}$.

A jobb oldal helyettesítési értéke: $5\left(\dfrac{11}{2}-7\right)+4=-\dfrac{15}{2}+\dfrac{8}{2}=-\dfrac{7}{2}$.

A jobb és bal oldal helyettesítési értéke egyenlő, tehát az $x=\dfrac{11}{2}$ megoldása az egyenletnek.

3. példa Oldjuk meg a

$3|x|-\dfrac{1}{x-3}=9-\dfrac{1}{x-3}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:
Az egyenlet alaphalmaza a $\mathbb{R}$, mivel a nevezőben levő kifejezés nem lehet nullával egyenlő, ezért az egyenlet értelmezési tartománya a $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

$$(1)\quad 3|x|-\frac{1}{x-3}=9-\frac{1}{x-3}\qquad /+\frac{1}{x-3}$$

Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk az $\frac{1}{x-3}$-at.

$$(2)\quad 3|x|=9\qquad /:3$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 3-mal.

$$(3)\quad |x|=3$$

$$(4)\quad x=\pm 3$$

A megoldás során az egyenlet mindkét oldalához hozzáadtunk egy ismeretlent tartalmazó kifejezést, az eredeti egyenletből így kaptuk meg a (2) alatti egyenletet. Az eredeti egyenlet értelmezési tartománya a $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, a (2) alatti egyenleté pedig $\mathbb{R}$, tehát ez a művelet bővítette az értelmezési tartományt. Az $x=3$ megoldása a $3|x|=9$ egyenletnek, de az eredeti egyenlet értelmezési tartományának nem eleme, így annak megoldása sem lehet. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $x=3$ **hamis megoldás.** Az eredeti egyenlet megoldása $x=-3$, amelyről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

3.6. ábra Bővebb lett

4. példa Feleléskor Gyökvesztő Bendegúz az 3.7. ábrán látható sorokat írta a táblára az $x^2-2x=3x$ egyenlet megoldása során. Ötöst kapott-e a feleletére? (Ötöst csak akkor kaphat, ha hibátlan a megoldása.)

(1) $x(x-2)=3x$ $\quad /:x$
(2) $x-2=3$ $\quad /+2$
(3) $x=5$

***Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza:* {5}**

3.7. ábra Bendegúz megoldása

Megoldás:
Bendegúz megoldását (3.7. ábra) lépésről lépésre elemezve, el tudjuk majd dönteni a feltett kérdést. Az (1) számú egyenlet az eredeti egyenlettel azonos, az egyenlet bal oldalán Bendegúz kiemelte az x-et, ez a lépése helyes volt. A (2) számú egyenlethez az (1) számú egyenlet mindkét oldalának x-szel való elosztásával jutott. Osztani azonban kizárólag nullától különböző számmal lehet, így Bendegúz ezzel a lépésével hallgatólagosan kizárta az $x=0$-t az értelmezési tartományból **(leszűkítette azt),** és a megoldáshalmazból is. Mivel az $x=0$ megoldása az eredeti egyenletnek, ezzel az átalakítással **elvesztette** az $x=0$ megoldást. A (3) számú egyenletet a mérlegelv szerint kapta, ez a lépése helyes.

A feltett kérdésre a válasz: **Sajnos Bendegúz nem kapott ötöst a feleletére.**

Ha Bendegúz az ismeretleneket az egyenlet egyik oldalára rendezte volna, például úgy, hogy az egyenlet mindkét oldalából elvesz $3x$-et, akkor a $(2)\ x(x-2)-3x=0$ egyenlet bal oldalán ki tudta volna emelni az x-et (x-szel való osztás helyett). A kapott $(3)\ x(x-5)=0$ egyenlet és a (2) számú egyenlet értelmezési tartománya, megoldáshalmaza az eredeti egyenlet értelmezési tartományával, megoldáshalmazával egyenlő. A megoldandó $x(x-5)=0$ egyenlet bal oldalán egy szorzat áll, a jobb oldalán pedig nulla. A kérdés most már az, hogy egy szorzat mikor egyenlő nullával? Egy szorzat akkor és csakis akkor nulla, ha va-

3.8. ábra Bendegúz ötöse kútba esett lamelyik tényezője nulla. Azaz a mi esetünkben $x=0$ vagy $x-5=0$, ahonnan az egyenlet megoldáshalmaza $\{0;5\}$.

Vegyük észre, hogy az a tényező, amellyel az egyenlet mindkét oldalát el tudnánk osztani, az ki is emelhető az egyenlet mindegyik tagjából! Kiemeléskor nem változik meg az egyenlet értelmezési tartománya, megoldáshalmaza, ismeretlent tartalmazó kifejezéssel való osztáskor azonban megoldást veszíthetünk, ezért ezt a műveletet ne alkalmazzuk!

3.9. ábra C-vitamin szempontjából ekvivalens mennyiségek

Az egyenleteknek az ismeretlent tartalmazó kifejezésekkel való átalakításainak egy része olyan volt, amely nem változtatta meg az eredeti egyenlet megoldáshalmazát, másik része pedig olyan, amely bővítette (3. példa) illetve szűkítette (4. példa) azt.

Azokat az átalakításokat, amelyek során az eredeti egyenletnek nem veszítjük el egy megoldását sem, és nem kapunk olyan megoldásokat sem, amelyek az eredeti egyenletnek nem megoldásai, ekvivalens átalakításoknak nevezzük.

Az ekvivalens átalakításkor kapott egyenleteket **ekvivalens egyenleteknek** mondjuk. (ekvivalens = azonos, egyenértékű)

5. példa Oldjuk meg az $(x-1)(x+1)(x+2)-2(x+3)(x-4)=x(x-5)(x+5)+9$ egyenletet a racionális számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenletnek mind az alaphalmaza, mind az értelmezési tartománya a $\mathbb{Q}$.

Az egyenlet rendezése előtt végezzük el a kijelölt műveleteket. Az egyenlet bal oldalán álló mindkét tag, és a jobb oldal első tagja egy-egy háromtényezős szorzat. Célszerű a kijelölt szorzást úgy végezni, hogy két-két tényezőt összeszorzunk (1), majd a kapott kifejezéseket megszorozzuk a harmadik tényezővel (2):

(1) $(x^2-1)(x+2)-2(x^2+3x-4x-12)=x(x^2-25)+9,$

(2) $x^3+2x^2-x-2-2x^2-6x+8x+24=x^3-25x+9.$

Összevonjuk az egynemű kifejezéseket:

(3) $x^3+x+22=x^3-25x+9$ $\quad /-x^3$ az egyenlet mindkét oldalából kivonjuk az x^3-t,

(4) $x+22=-25x+9$ $\quad /+25x$ az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk $25x$-et,

(5) $26x+22=9$ $\quad /-22$ az egyenlet mindkét oldából kivonunk 22-t,

(6) $26x=-13$ $\quad /:26$ az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 26-tal.

(7) $x=-\dfrac{1}{2}$

Vegyük észre, hogy a rendezés során nem hajtottunk végre olyan átalakítást, amelynek következtében megváltozott volna az egyenlet értelmezési tartománya, megoldáshalmaza, tehát mindegyik átalakítás ekvivalens átalakítás volt! A $-\frac{1}{2}$ racionális szám, így eleme az értelmezési tartománynak, tehát az egyenlet megoldása az $x=-\frac{1}{2}$.

A kapott értéket ellenőrizzük! A bal oldal helyettesítési értéke:

$$\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right)-2\left(-\frac{1}{2}+3\right)\left(-\frac{1}{2}-4\right)=-\frac{9}{8}+\frac{45}{2}=\frac{171}{8}.$$

A jobboldal helyettesítési értéke:

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-5\right)\left(-\frac{1}{2}+5\right)+9=\frac{99}{8}+9=\frac{171}{8}.$$

A jobb és bal oldal helyettesítési értéke egyenlő, tehát az $x=-\frac{1}{2}$ megoldása az egyenletnek.

6. példa Oldjuk meg az

$$\frac{5x+3}{6}-\frac{3-7x}{4}=5x-\frac{9x-5}{8}-\frac{17x+6}{12}$$ egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet alaphalmaza és az értelmezési tartománya is a valós számok halmaza.

Mivel törtek helyett egész kifejezésekkel könnyebb dolgozni, ezért először „eltüntetjük” a nevezőket, az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a nevezők (a 4, a 6, a 8 és a 12) legkisebb közös többszörösével, 24-gyel:

(1) $4(5x+3)-6(3-7x)=120x-3(9x-5)-2(17x+6)$.

Felbontjuk a zárójeleket:

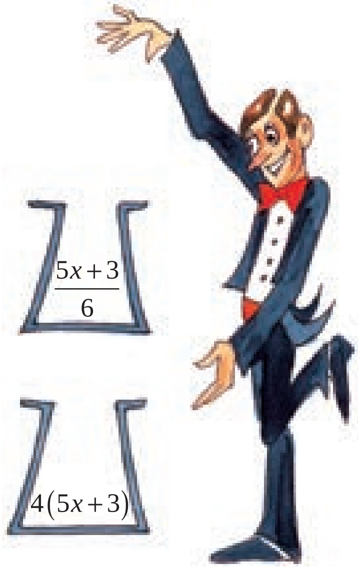
(2) $20x+12-18+42x=120x-27x+15-34x-12$.

Összevonjuk az egynemű kifejezéseket mindkét oldalon:

(3) $62x-6=59x+3$.

Az egyenlet elsőfokú, ezért az ismeretlent az egyenlet egyik oldalára, a számokat az egyenlet másik oldalára rendezzük. Az egyenlet mindkét oldalából kivonunk $59x$-et:

(4)	$3x-6=3$	$/+6$	Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk hatot.
(5)	$3x=9$	$/:3$	Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk hárommal.
(6)	$x=3$		



3.10. ábra A nevező eltüntetése

3.11. ábra Kipipálva

Az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, tehát az egyenlet megoldása $x=3$. Ellenőrzés:

A baloldal helyettesítési értéke: $\frac{18}{6}-\frac{-18}{4}=\frac{15}{2}$.

A jobboldal helyettesítési értéke: $15-\frac{22}{8}-\frac{57}{12}=\frac{15}{2}$.

A jobb- és baloldal helyettesítési értéke egyenlő, tehát az $x=3$ megoldása az egyenletnek.

7. példa Oldjuk meg a

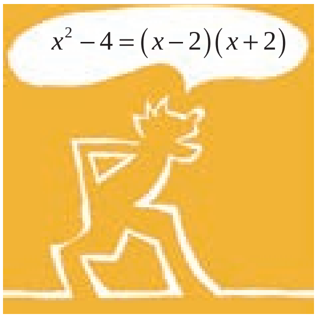
$\frac{2x-1}{x+2}-\frac{4-7x}{x^2-4}=\frac{6x-5}{3x-6}$ egyenletet az egész számok halmazán!

Megoldás:

Ez egy törtes egyenlet, mert a nevezőben ismeretlent tartalmazó kifejezés van. Az egyenlet alaphalmaza $\mathbb{Z}$. A nevezők szorzattá alakítása után, könnyen megállapíthatjuk az egyenlet értelmezési tartományát és az egyenletben szereplő törtek közös nevezőjét is. Az $x+2\neq 0$, az $x^2-4=(x-2)(x+2)\neq 0$ és a $3x-6=3(x-2)\neq 0$ feltételek miatt az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{Z}\setminus\{-2;2\}$, a közös nevező (a nevezők legkisebb közös többszöröse) pedig $3(x-2)(x+2)$.

Hozzunk közös nevezőre, ügyeljünk a bővítésre:

$$(1)\quad \frac{3(x-2)(2x-1)-3(4-7x)}{3(x-2)(x+2)}=\frac{(x+2)(6x-5)}{3(x-2)(x+2)}\qquad /\cdot 3(x-2)(x+2).$$



3.12. ábra Sose felejtsük el, amit algebrából tanultunk!

Bontsuk fel a zárójeleket:

$$(2)\quad 3\left(2x^2-4x-x+2\right)-12+21x=6x^2+12x-5x-10$$

$$(3)\quad 6x^2-12x-3x+6-12+21x=6x^2+7x-10$$

Vonjuk össze az egynemű tagokat:

$$(4)\quad 6x^2+6x-6=6x^2+7x-10\qquad /-6x^2$$

Rendezzük az egyenletet:

$$(5)\quad 6x-6=7x-10\qquad /-6x$$

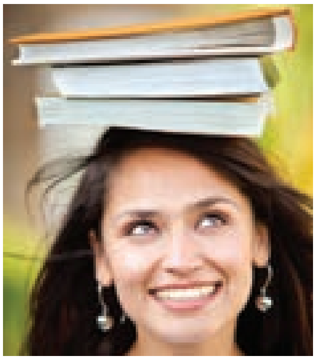
$$(6)\quad -6=x-10\qquad /+10$$

$$(7)\quad x=4$$

Az $x=4$ megoldása az eredeti egyenletnek, erről ellenőrzéssel meggyőződhetünk. $\left(\text{Ellenőrzés: } \frac{7}{6}-\frac{-24}{12}=\frac{19}{6};\ \frac{19}{6}=\frac{19}{6}.\right)$

Összegezve a fentieket, az egyenletek megoldása során általában arra törekszünk, hogy kifejezzük az ismeretlent, és ezt az egyenletek rendezésével érjük el. A rendezéses módszernél célszerű az alábbi lépéseket követni:

- az értelmezési tartomány meghatározása,
- a tört kifejezések eltüntetése (közös nevezővel történő beszorzás),
- a kijelölt műveletek elvégzése,
- az egynemű tagok összevonása az egyenlet mindkét oldalán, rendezés,
- a kapott egyenlet megoldása,
- a kapott eredmény értelmezése, ellenőrzése (ha lehet),
- az egyenlet megoldáshalmazának megadása.



3.13. ábra Tartsuk fejben!

3. 2. Az egyenlet értelmezési tartományának, értékkészletének szerepe a megoldásban

Az értelmezési tartomány vizsgálata

Az egyenletek megoldásakor általában célszerű az értelmezési tartományt megállapítani, többek között azért, mert vannak olyan műveletek, amelyek nem végezhetők el bármely számon (például a négyzetgyökvonás). Emiatt előfordulhat, hogy az egyenlet értelmezési tartománya véges sok számot fog tartalmazni. Ekkor behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy az értelmezési tartomány elemei megoldásai-e az egyenletnek, és az egyenlet megoldáshalmaza ezek után könnyen megadható lesz.

8. példa Oldjuk meg a $\sqrt{x-7}+\sqrt{6-x}=2$ egyenletet!

Megoldás:

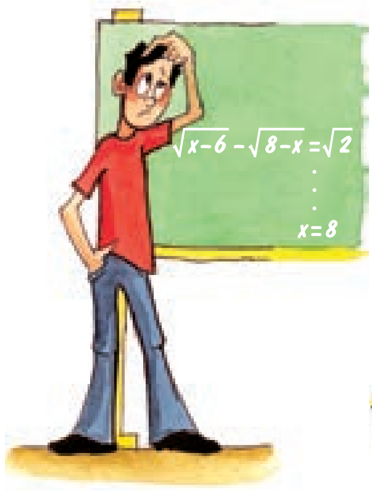
Az egyenlet alaphalmaza $\mathbb{R}$. A négyzetgyökvonás definíciója miatt az $x-7\geq 0$ és a $6-x\geq 0$ feltételeknek kell teljesülni, ahonnan $x\geq 7$ és $x\leq 6$ adódik; ezeknek a feltételeknek eleget tevő valós szám nem létezik. Az egyenlet értelmezési tartománya tehát üres halmaz, amelynek következtében az egyenlet megoldáshalmaza is az üres halmaz. Vegyük észre, hogy az értelmezési tartomány „főszerepet” játszott az egyenlet megoldásában.

3.14. ábra Milyen szám állhat alatta?

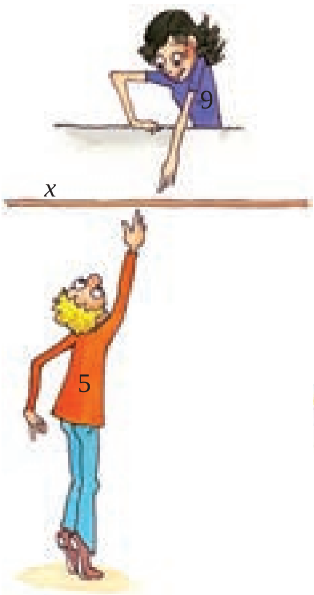
9. példa Oldjuk meg a $\sqrt{x-6}-\sqrt{8-x}=\sqrt{2}$ egyenletet az egész számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenlet alaphalmaza $\mathbb{Z}$. A négyzetgyökvonás definíciója miatt az $x-6\geq 0$ és a $8-x\geq 0$ feltételekből az $x\geq 6$ és az $x\leq 8$ adódik, amelynek csak a $6\leq x\leq 8$ tesz eleget. Mivel a megoldást az egész számok halmazán keressük, ezért az egyenlet értelmezési tartománya $\{6;7;8\}$. Mivel az értelmezési tartomány három elemből áll, ezért be-



3.15. ábra Még szerencse, hogy $\mathbb{Z}$ az alaphalmaz!



3.16. ábra $5 \le x \le 9$

helyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy ezek a számok megoldásai-e az egyenletnek:

$$x=6 \text{ esetén: } \sqrt{6-6}-\sqrt{8-6} \ne \sqrt{2},$$
$$x=7 \text{ esetén: } \sqrt{7-6}-\sqrt{8-7} \ne \sqrt{2},$$
$$x=8 \text{ esetén: } \sqrt{8-6}-\sqrt{8-8} = \sqrt{2}.$$

Az egyenlet megoldása tehát $x=8$.

Vegyük észre, hogy ennek az egyenletnek a megoldásában az egyenlet alaphalmaza is jelentős szerephez jutott! Ha ugyanis az alaphalmaz a valós számok halmaza lett volna, akkor pusztán az értelmezési tartomány vizsgálatával nem jutottunk volna közelebb a megoldáshoz, mert az végtelen sok számot tartalmazott volna.

Az értékkészlet vizsgálata

10. példa Oldjuk meg a $\sqrt{2x-6}+(y-x-1)^2=0$ egyenletet!

Megoldás:
Ez egy kétismeretlenes egyenlet. A négyzetgyökvonás definíciója miatt a $2x-6 \ge 0$ feltételből az $x \ge 3$ adódik, így az egyenlet értelmezési tartományában végtelen sok $(x;y)$ számpár van, ezért annak vizsgálata most nem vezetett eredményre. Észrevehető azonban, hogy az egyenlet bal oldalán kijelölt műveletek (négyzetgyökvonás, négyzetre emelés) eredménye nem akármilyen szám lehet. Ezek a műveletek csak nemnegatív számokat eredményeznek, érdemes tehát megvizsgálnunk az egyenlet jobb és bal oldalának értékkészletét. A bal oldalon két nemnegatív szám összege áll, a jobb oldalon pedig 0. Mivel nemnegatív számok összege akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha a számok külön-külön nullával egyenlők, ezért a bal oldal mindkét tagja nulla, azaz

$$\sqrt{2x-6}=0 \quad \text{és} \quad (y-x-1)^2=0$$
$$2x-6=0 \quad \text{és} \quad y-x-1=0$$
$$x=3 \quad \text{és} \quad y=x+1$$

Az egyenlet megoldása: $x=3$, $y=4$.

Az értelmezési tartomány és az értékkészlet vizsgálata

11. példa Oldjuk meg a $\sqrt{x-5}=2+\sqrt{9-x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:
Az egyenlet alaphalmaza $\mathbb{R}$. A négyzetgyökvonás definíciója miatt az $x-5 \ge 0$ és a $9-x \ge 0$ feltételekből az $x \ge 5$ és az $x \le 9$ adódik, ahonnan az egyenlet értelmezési tartománya az (1) $5 \le x \le 9$ számok halmaza. Vizsgáljuk meg a jobb és a bal oldal értékkészletét! A bal oldal

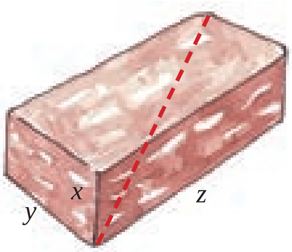
értékkészlete (1) miatt a $[0;2]$, a jobb oldalé pedig $[2;4]$, így az egyenlőség csak akkor lehetséges, ha mindkét oldal 2-vel egyenlő, azaz

$$\left.\begin{array}{lcr} \sqrt{x-5}=2 & \text{és} & 2+\sqrt{9-x}=2 \\ x=9 & \text{és} & x=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ az egyenlet megoldása } x=9.$$

12. példa Melyik az a három pozitív egész szám, amelynek négyzetösszege harminccal egyenlő?

Megoldás:

Szavakkal kifejezve:	**Az algebra nyelvén:**
három pozitív egész szám	x, y, z
négyzetösszegük	$x^2+y^2+z^2$
harminccal egyenlő	$x^2+y^2+z^2=30$



3.17. ábra A testátló négyzete 30. Járjunk utána!

A probléma az $x^2+y^2+z^2=30$ egyenlethez vezet, amelynek értelmezési tartománya olyan végtelen sok $(x;y;z)$ számhármasból áll, amelyben $x,y,z \in \mathbb{Z}^+$.

Mivel $x,y,z \in \mathbb{Z}^+$ és a jobb oldal értékkészlete $\{30\}$, ezért az $x^2, y^2, z^2 \in \{\text{30-nál nem nagyobb négyzetszámok}\} = \{1;4;9;16;25\}$. A 30-at csak egyféleképpen lehet felbontani három négyzetszám összegére: $1+4+25=30$, így a keresett pozitív egészek: $1, 2, 5$.

13. példa Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek a belső szögeinek összegéhez hozzáadva az egyik külső szögét 4691°-ot kapunk eredményül?

Megoldás:

Szavakkal kifejezve:	**Az algebra nyelvén:**
a konvex sokszög oldalainak száma	n
a belső szögeinek összege	$(n-2)\cdot 180°$
hozzáadva egyik külső szögét	$(n-2)\cdot 180°+\alpha_{\text{külső}}$
4691°-ot kapunk eredményül	$(n-2)\cdot 180°+\alpha_{\text{külső}}=4691°$


3.18. ábra Konvex sokszög

A kapott egyenlet olyan kétismeretlenes egyenlet, amely bármely 3-nál nem kisebb pozitív egész n-re, és bármely $0° < \alpha_{\text{külső}} < 180°$ szögre értelmezve van.

A bal oldalon álló kifejezés nagyobb, mint $(n-2)\cdot 180°$, hiszen a külső szög pozitív, és kisebb, mint $(n-1)\cdot 180°$, mert a külső szög 180°-nál kisebb, tehát a bal oldal értékkészlete az $](n-2)\cdot 180°; (n-1)\cdot 180°[$. Emiatt a jobb oldalon álló 4691° a 180° két egymást követő többszöröse közé esik, innen adódik, hogy $n-2=\left[\frac{4691°}{180°}\right]=26,$ ahonnan $n=28,$ és a külső szög $11°$.

Tehát a sokszög 28 oldalú.

3. 3. Megoldás keresése szorzattá alakítással

14. példa Oldjuk meg az $(x+3)\cdot(2x-5)\cdot(x-2)=0$ egyenletet a valós számok halmazán!

3.19. ábra Mikor is egyenlő?

Megoldás:
Az egyenlet alaphalmaza, értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Észrevehető, hogy az egyenlet bal oldalán egy háromtényezős szorzat, jobb oldalán pedig a 0 áll. Ilyenkor azt a kérdést kell feltennünk, hogy egy szorzat mikor egyenlő 0-val. A válasz: egy szorzat akkor és csakis akkor 0, ha valamelyik tényezője 0-val egyenlő. A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy $x+3=0,$ vagy $2x-5=0,$ vagy $x-2=0.$ Így az egyenlet megoldáshalmaza $\left\{-3; 2; \frac{5}{2}\right\}$.

15. példa Oldjuk meg az $(x-1)^3=4x-4$ egyenletet az egész számok halmazán!

3.20. ábra Ha a geometriára gondolok…

Megoldás:
Az egyenlet alaphalmaza, értelmezési tartománya az egész számok halmaza. Ha elvégeznénk a kijelölt műveleteket, akkor egy harmadfokú egyenlethez jutnánk, amelynek megoldása általában meghaladja ismereteinket. Az egyenlet bal oldalán egy szám köbe, jobb oldalán a szám 4-szerese áll. Először emeljük ki a jobb oldalon a 4-et.

$$(1)\ (x-1)^3=4(x-1).$$

Az egyenlet mindkét oldalán olyan tag áll, amelynek egyik tényezője $(x-1)$, ilyenkor az összes tagot az egyenlet egyik oldalára rendezzük. Az egyenlet másik oldalára ekkor 0 kerül, az egyenletet 0-ra rendezzük:

$$(2)\ (x-1)^3-4(x-1)=0.$$

Az ilyen rendezést az egyenlet **0-ra redukálásának** nevezzük.

A kapott egyenlet bal oldalán kiemeljük a közös tényezőt, az $(x-1)$-et.

$$(3)\ (x-1)\left[(x-1)^2-4\right]=0.$$

A második tényező egy különbség, mégpedig két négyzet különbsége, így a két tag négyzetének a különbségére vonatkozó azonosság alapján az $(x-1)^2-4=((x-1)-2)((x-1)+2)=(x-3)(x+1)$.

Az egyenlet (4) $(x-1)(x-3)(x+1)=0$ alakba írható, ismét ott tartunk, hogy az egyenlet egyik oldalán egy szorzat, másik oldalán a nulla áll. Mivel egy szorzat akkor és csakis akkor 0, ha valamelyik tényezője 0-val egyenlő, ezért $x-1=0$, vagy $x-3=0$, vagy $x+1=0$. Az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, így az egyenlet megoldáshalmaza $\{1;3;-1\}$.

3.21. ábra Redukáljunk!

16. példa Oldjuk meg a $3(x^3-27)=(x^2-6x+9)(3x+4)-(3x-5)(x^2-9)$ egyenletet a racionális számok halmazán!

Megoldás:
Az egyenlet alaphalmaza, értelmezési tartománya a racionális számok halmaza. Az egyenlet harmadfokú. Észrevehető azonban, hogy az egyenlet mindkét oldalán nevezetes azonosságok egyik oldalai szerepelnek. Próbáljuk meg segítségükkel a zárójelben levő kifejezéseket tényezőkre bontani! Az egyenlet bal oldalán a két tag köbének a különbségére, az egyenlet jobb oldalán a két tag különbségének a négyzetére, illetve a két tag négyzetének a különbségére vonatkozó azonosságokat használhatjuk fel, azaz $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$, $x^2-6x+9=(x-3)^2$ és $x^2-9=(x-3)(x+3)$.

Az egyenlet átírható a

(1) $3(x-3)(x^2+3x+9)=(x-3)^2(3x+4)-(x-3)(x+3)(3x-5)$

alakba.

Az egyenletben olyan tagok szerepelnek, amelyeknek az egyik tényezője $(x-3)$, célravezető az egyenletet 0-ra redukálása:

(2) $3(x-3)(x^2+3x+9)-(x-3)^2(3x+4)+(x-3)(x+3)(3x-5)=0.$

Az egyenlet bal oldalán kiemeljük a közös tényezőt, az $(x-3)$-at:

(3) $(x-3)\left[3(x^2+3x+9)-(x-3)(3x+4)+(x+3)(3x-5)\right]=0.$

A második tényező egy háromtagú kifejezés. Ahhoz, hogy tisztán lássuk, hogy mi is valójában, bontsuk fel a benne szereplő zárójeleket, végezzük el a lehetséges összevonásokat.

(4) $(x-3)(3x^2+18x+24)=0$ /Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 3-mal.

(5) $(x-3)\left[x^2+6x+8\right]=0$

3.22. ábra Fontos a „tisztánlátás”!

A második tényező egy másodfokú kifejezés, szorzattá alakíthatjuk a teljes négyzetté alakítás segítségével:

$$x^2+6x+8=x^2+6x+9-1=(x+3)^2-1^2=(x+2)(x+4),$$

illetve a tagok csoportosításával:

$$x^2+6x+8=x^2+2x+4x+8=x(x+2)+4(x+2)=(x+2)(x+4).$$

Az egyenlet $(x-3)(x+2)(x+4)=0$ alakba írható, ahonnan az előzőek alapján $x_1=3,\ x_2=-2,\ x_3=-4$ adódik. Mivel az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, az egyenlet megoldásai: $x_1=3,\ x_2=-2,\ x_3=-4$.

Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $9x-\{8x-[7x-(3x-2)\cdot 2-5x]-4x\}=3x-[2x+3\cdot(x-8)]$

b) $x-\frac{5}{6}\left\{\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}(x-100)+250\right\}=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{6}(x+180)-45\right]$

c) $(2x+3)^2(x-1)-4(x+3)(x-3)=(x-2)^2(4x-1)+(7x+2)(3x-1)$

d) $(x+2)^3-(x-4)(x+1)(x-2)=5(x+4)(2x-3)+(x-15)(x+15)$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{3x-4}{2}-\frac{5x+3}{15}+2x=3-\frac{2x-1}{6}+\frac{4x+3}{10}$

b) $x-\frac{3(x-5)}{28}+\frac{3-7x}{21}=\frac{(x-3)5}{12}-\frac{7-8x}{14}+\frac{3}{2}$

c) $\frac{3x-11}{12}-\frac{5x+12}{20}+x=\frac{7x-8}{6}-\frac{16-17x}{15}$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{x^2-8x+16}{6x-30}\cdot\frac{3x-15}{x^2-16}=\frac{1}{2}$ b) $\frac{3x^2-12}{6x^2-18x}:\frac{x^2+2x}{2x^2-18}=1$ c) $\frac{3}{4z}+\frac{5z+2}{3z^2}-\frac{7}{6z}=\frac{5}{8z^2}$

d) $\frac{2}{z^2-9}-\frac{1}{z-3}+\frac{z-4}{z^2+3z}=\frac{3}{z^2-3z}$ e) $\left(\frac{y+2}{1-y}+\frac{2}{y^2-1}\right):\frac{y+3}{y^2-1}=-2$

f) $\frac{y(2y-1)}{y^3+1}+\frac{2-y}{(y-1)^2+y}-\frac{1}{y+1}=\frac{y-1}{2y^3+2}$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-4}$ b) $\sqrt{x-1}-2\sqrt{-2-x}=3$ c) $\sqrt{x+3}+(2x-y)^{2000}+|z+3y|=0$

d) $\sqrt{x^2-6x+9}+(y+2)^2+(z-5)^4=0$ e) $|x-5|=-\left(y+\frac{1}{2}x-3\right)^6$

f) $x^4-2x^2+2=-z^2+4z-3$ g) $\sqrt{x-9}=9-x$ h) $\sqrt{3-x}=2+\sqrt{x+1}$

5. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek az átlóinak száma
a) 35, b) 54, c) 350, d) 11 475?

6. Két egész szám négyzetösszege ötven. Melyek ezek az egészek?

7. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenleteknek egyetlen egy megoldása legyen!

a) $\sqrt{12-x}=\sqrt{x-p}$ b) $\sqrt{x+4}=p-x$ c) $(x-2p)^2+(2x+9-5p)^{212}=0$

d) $\sqrt{8p^2-x}+\sqrt{x}=4p$

8. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $(x+2)^2(x-5)^{13}(2x-9)^5=0$

b) $(x+4)(x-5)(2x+3)-(x-5)(x+1)(x+4)=(13-2x)(x-5)(x+2)$

c) $(x-5)(2x+3)(x+11)+(x-5)(2x+3)=(2x-7)(x-5)(2x+3)$

d) $x^3+8=(x^2+4x+4)(2x+3)-(x+1)(x^2-4)$

e) $(x^3+3x^2+3x+1)+3x^2+6x+3=(x^3+1)+x(x^2-1)+15x+15$

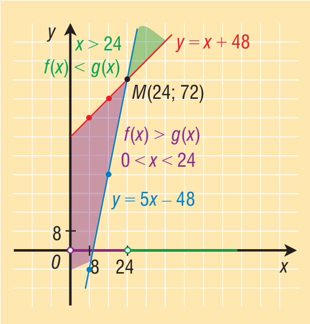
4. Egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek

1. példa Egy kis vállalkozás teljes költsége a kibocsátott áru mennyiségének 1000-szeresénél 48 000 forinttal több, teljes bevétele a kibocsátott áru mennyiségének 5000-szeresénél 48 000 forinttal kevesebb. Mekkora árumennyiségek mellett lesz a vállalkozás nyereséges?

Megoldás:
A felvetett probléma megoldásakor először érdemes azon eltűnődni, hogy egy vállalkozást mikor tartunk nyereségesnek. Saját tapasztalataink, józan eszünk alapján mondhatjuk, hogy nyereséges akkor lesz a vállalkozás, ha a bevétele nagyobb a költségeinél. A feladat szövege szerint mind a felmerülő költség, mind a bevétel az árumennyiséggel van kapcsolatban, és valamilyen árumennyiséget keresünk. Jelöljük tehát az árumennyiséget x-szel, nyilvánvaló, hogy $x \geq 0$. Fordítsuk le a problémát az algebra nyelvére!

4.1. ábra Költségvetés

Szavakkal kifejezve:	Az algebra nyelvén:
a kibocsátott áru mennyisége	x
a vállalkozás **teljes költsége** a kibocsátott áru mennyiségének 1000-szeresénél 48 000 forinttal több	$1000x+48\,000$
ezer forintban megadva	$x+48$
teljes bevétele a kibocsátott áru mennyiségének 5000-szeresénél 48 000 forinttal kevesebb	$5000x-48\,000$
ezer forintban megadva	$5x-48$
a vállalkozás nyereséges, ha	$5x-48>x+48$



4.2. ábra Grafikus megoldás

A probléma az $5x-48>x+48$ egyenlőtlenséghez vezetett, amelynek értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza. Az egyenlőtlenséget az egyenlethez hasonlóan értelmezhetjük. **Felfoghatjuk úgy is, hogy az egyenlőtlenség jobb-, és bal oldalán egy-egy valós függvény hozzárendelési szabálya áll:** $f(x)=x+48$, illetve $g(x)=5x-48$. **Az egyismeretlenes egyenlőtlenségek $g(x)>f(x)$ alakba írhatóak, amelyeknek a megoldásakor keressük a változó azon értékeit (*x*-eket), amely értékeknél az *f* függvény helyettesítési értéke kisebb, mint a *g* függvény helyettesítési értéke.** Nyilvánvaló, hogy ezek az *x*-ek az *f* és a *g* függvények értelmezési tartományának közös részében lehetnek, és csak akkor **megoldásai** az egyenlőtlenségnek, ha az egyenlőtlenség értelmezési tartományához is hozzátartoznak.

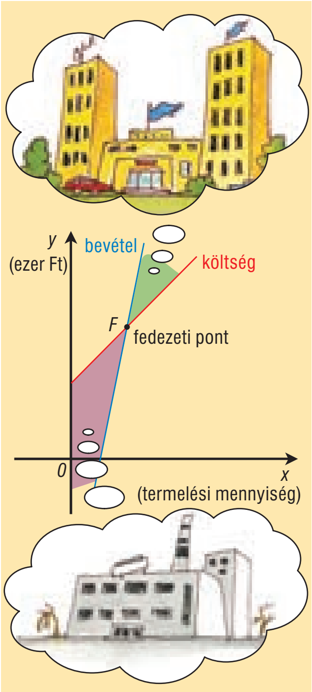
Az egyenlőtlenségeket éppúgy, mint ahogyan az egyenleteket, megoldhatjuk grafikus és algebrai úton is.

A grafikus megoldáshoz ábrázoljuk a függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben, meghatározzuk a közös pontok *x* koordinátáit, és leolvassuk a **két függvény függvényértéke közötti relációnak megfelelő változó értékeket (*x*-eket).**

Az $f(x)=x+48$ és a $g(x)=5x-48$ valós függvények képei egyenesek, egyetlen közös pontjuk van. az $M(24;72)$. A közös pont meghatározásának pontosságáról ellenőrzéssel meg is győződhetünk. Ellenőrzés: $f(24)=24+48=72$, $g(24)=5\cdot 24-48=72$. A két függvény helyettesítési értéke tehát $x=24$-nél egyenlő.

A 4.2. ábráról leolvasható, hogy ha 24-nél kisebb értékeket írunk az *x* helyébe, akkor az *f* függvény grafikonja a *g* függvény grafikonjától pozitív irányban van, azaz a 24-nél kisebb *x* értékek esetén az $f(x)>g(x)$, a költség meghaladja a bevételt. Ha viszont 24-nél nagyobb értékeket írunk az *x* helyébe, akkor a *g* függvény grafikonja halad az *f* függvény grafikonjától pozitív irányban, azaz a 24-nél nagyobb *x* értékek esetén a $g(x)>f(x)$, a bevétel meghaladja a költséget. Így az egyenlőtlenség megoldása: $x>24$, az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $]24;\infty[$ intervallum.

A feladat megoldása: 24-nél nagyobb árumennyiségek mellett lesz a vállalkozás nyereséges.



4.3. ábra Cél a nyereség elérése

Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenségnek – általában – végtelen sok megoldása van, így a megoldások ellenőrzése behelyettesítéssel lehetetlen! Az egyenletek – kivéve a nagyon sok megoldással rendelkező egyenletek – megoldásakor a kapott eredmények ellenőrzésével el tudtuk kerülni az átalakítások ekvivalenciájának állandó vizsgálatát, az egyenlőtlenségeknél azonban ez a lehetőség nem adatik meg, az egyenlőtlenségek megoldása során minden átalakítást körültekintően kell elvégeznünk.

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy **az egyenlőtlenségek megoldásakor a következő átalakításokat végezhetjük el:**

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 278 2012.06.25. 14:53:08

- az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk, vagy mindkét oldalából kivonhatjuk ugyanazt a valós számot, vagy
- az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozhatjuk vagy eloszthatjuk ugyanazzal a pozitív valós számmal, ekkor az egyenlőtlenség iránya nem változik meg, vagy
- az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozhatjuk vagy eloszthatjuk ugyanazzal a negatív valós számmal, ekkor az egyenlőtlenség iránya megfordul, vagy
- az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk, vagy mindkét oldalából kivonhatjuk ugyanazt az ismeretlent tartalmazó kifejezést, ha az nem változtatja meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.

4.4. ábra Idézzük fel!

2. példa Oldjuk meg algebrai úton a
$3\left(x-1\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}(6x+6)\geq 5\left(x-\frac{7}{5}\right)+4$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:
Az egyenlőtlenség alaphalmaza, értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Ez az egyenlőtlenség elsőfokú. Célszerű a kijelölt műveletek elvégzése után az ismeretlent az egyenlőtlenség egyik oldalára, a számokat a másik oldalára rendezni (mint az elsőfokú egyenletnél).

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x-4-3x-3\geq 5x-7+4 \\ (2) & -7\geq 5x-3 \\ (3) & -4\geq 5x \\ (4) & -\frac{4}{5}\geq x \end{array}$$

Mivel a megoldás során ekvivalens átalakításokat végeztünk, az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $\left]-\infty;-\frac{4}{5}\right]$.

4.5. ábra „Egyenlőtlenség”

3. példa Oldjuk meg az
$(x+3)(3x+4)-(x+2)(x+3)<(x+4)(x+3)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás:
Az egyenlőtlenség alaphalmaza, értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Az egyenlőtlenségben olyan tagok szerepelnek, amelyeknek az egyik tényezője $x+3$. Az egyenlőtlenséget 0-ra redukáljuk, és kiemeljük az azonos tényezőt a tagokból (éppúgy, mint az egyenleteknél).

$$(1)\quad (x+3)\left[(3x+4)-(x+2)-(x+4)\right]<0$$

A második tényezőben felbontjuk a zárójeleket, összevonunk.

$$(2)\quad (x+3)(x-2)<0$$

4.6. ábra Gondolkodjunk!

1. módszer:
Most ott tartunk, hogy az egyenlőtlenség egyik oldalán egy kéttényezős szorzat, a másik oldalán a nulla áll, és a szorzat kisebb nullánál, azaz negatív. Mikor negatív egy kéttényezős szorzat? Egy kéttényezős szorzat akkor és csakis akkor negatív, ha tényezői különböző előjelűek. Ez úgy lehetséges, hogy az egyik tényező pozitív és a másik negatív, vagy fordítva, tehát két esetet kell megvizsgálnunk:

$$\text{I. } x+3<0 \text{ és } x-2>0 \text{ vagy}$$
$$\text{II. } x+3>0 \text{ és } x-2<0$$

Az egyenlőtlenség két-két újabb egyenlőtlenséghez, két ún. egyenlőtlenség-rendszerhez (I., II.) vezetett.

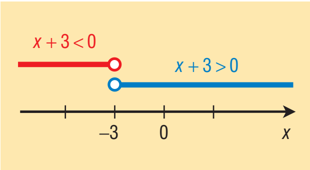
Az egyenlőtlenség-rendszereket külön-külön megoldjuk:

$$\text{I. } x+3<0 \quad /-3 \quad \text{és} \quad x-2>0 \quad /+2$$
$$x<-3 \qquad \text{és} \qquad x>2$$
$$\text{I. megoldása: } \varnothing$$

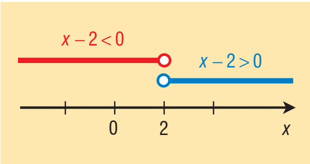
$$\text{II. } x+3>0 \quad /-3 \quad \text{és} \quad x-2<0 \quad /+2$$
$$x>-3 \qquad \text{és} \qquad x<2$$
$$\text{II. megoldása: } -3<x<2$$

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza az I. és II. egyenlőtlenség-rendszerek megoldáshalmazainak uniója: $]-3;2[\cup\varnothing=]-3;2[$.

2. módszer:
A (2) számú egyenlőtlenség megoldásakor gondolhatunk arra is, hogy a bal oldalon álló szorzat előjelét a benne szereplő elsőfokú tényezők $(x+3,\ x-2)$ előjele határozza meg. Az $x+3$ polinom gyöke: $x=-3$, a polinom helyettesítési értékei $x\in\ ]-\infty;-3[$ esetén negatívak, $x\in\ ]-3;\infty[$ esetén pozitívak. Az $x+3$ kifejezés $x=-3$-nál vált előjelet.
Hasonlóan adódik, hogy az $x-2$ kifejezés $x=2$-nél vált előjelet.



4.7. ábra $x+3$ előjele



4.8. ábra $x-2$ előjele

Mivel ugyanazon x érték mellett kell mindkét tényező előjelét ismernünk a szorzat előjelének megállapításához, ezért a 2. és 3. ábra helyett célszerű egy előjeltáblázatba összefoglalni a tényezők előjeléről, gyökéről megszerzett ismereteinket:

x	$x\in\ ]-\infty;-3[$	$x=-3$	$x\in\ ]-3;2[$	$x=2$	$x\in\ ]2;\infty[$
$x+3$ előjele	–	0	+	+	+
$x-2$ előjele	–	–	–	0	+
szorzat előjele	+	0	–	0	+

A táblázat utolsó sorából kiderül, hogy a szorzat negatív előjelű, ha $x\in\ ]-3;2[$, tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $]-3;2[$.

3. módszer:
Vegyük észre, hogy az $(x+3)(x-2)$ szorzatban az egyik tényezőt úgy kapjuk meg, hogy egy számhoz 3-at hozzáadunk $(x+3)$, a másik tényezőt pedig úgy, hogy ugyanabból a számból 2-t kivonunk $(x-2)$. Nyilvánvaló, hogy $x+3$ bármely x esetén nagyobb $x-2$-nél, így ha különböző előjelűeknek kell lenniük, akkor az csak úgy lehetséges, hogy az $x+3$ pozitív, és az $x-2$ negatív előjelű. (Ugyanis ha az $x+3$ negatív, ebből már következik, hogy a nála kisebb $x-2$ is negatív.)

Innen a (3) egyenlőtlenségrendszer megoldásából az egyenlőtlenség megoldása: $-3 < x < 2$.

4.9. ábra Tartsuk fejben!

4. példa Oldjuk meg az $\frac{x+5}{x-4}+\frac{x-3}{x+1}\geq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás:
1. módszer:
Az egyenlőtlenség alaphalmaza $\mathbb{R}$, értelmezési tartománya a $\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$. A törtes egyenleteknél mindig közös nevezőre hoztunk, és beszoroztunk a közös nevezővel. Egyenlőtlenségeknél azonban mindig tudnunk kell, hogy milyen előjelű számmal, kifejezéssel szorzunk, ezért ilyen lépéseket csak nagyon megfontoltan érdemes megtenni. A közös nevezővel való beszorzás helyett az egyenlőtlenséget 0-ra redukáljuk, majd az ismeretleneket tartalmazó oldalt közös nevezőre hozzuk:

$$\frac{(x+5)(x+1)+(x-4)(x-3)-2(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+1)}\geq 0.$$

A számlálóban elvégezzük a kijelölt műveleteket, és összevonunk:

$$(1)\quad \frac{5(x+5)}{(x-4)(x+1)}\geq 0.$$

Keressük tehát azokat az x értékeket, amelyekre a tört nemnegatív.

Az előző feladat 2. megoldása alapján először meghatározzuk az $x+5$, $x-4$, $x+1$ polinomok gyökeit.
Készítsük el az előjeltáblázatot:

x	$x\in\ ]-\infty;-5[$	$x=-5$	$x\in\ ]-5;-1[$	$x=-1$	$x\in\ ]-1;4[$	$x=4$	$x\in\ ]4;\infty[$
$x+5$ előjele	–	0	+	+	+	+	+
$x+1$ előjele	–	–	–	0	+	+	+
$x-4$ előjele	–	–	–	–	–	0	+
tört előjele	–	0	+	**nincs értelme**	–	**nincs értelme**	+

4.10. ábra Nem felső, nem alsó

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása $-5 \leq x < -1$ vagy $x > 4$, másképpen az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $[-5;-1[\cup]4;\infty[$.

4.11. ábra Így is lehet?!

2. módszer:
Az (1) bal oldalán álló törtben a tényezőket nagyság szerint sorba lehet rendezni: $(2)\ x-4<x+1<x+5$ bármely valós x-re. Most azt kell megvizsgálnunk, hogy hogyan lehet a tört pozitív vagy nulla. **Egy tört vagy egy szorzat akkor és csakis akkor pozitív, ha bennük páros számú negatív előjelű tényező van.** Három tényező esetén ez azt jelenti, hogy mindhárom tényező pozitív, vagy két tényező negatív és egy tényező pozitív. A tényezők (2) alatti kapcsolata miatt ahhoz, hogy mindhárom tényező pozitív legyen, az $x-4>0$ feltételnek kell teljesülni, ahonnan $x>4$ adódik. Ahhoz, hogy a tényezők közül kettő negatív, egy pozitív előjelű legyen, a (2) miatt $x+1<0$ és $x+5>0$ feltételeknek kell fennállnia, ahonnan $-5<x<-1$. Tehát a tört pozitív akkor, ha $x>4$ vagy $-5<x<-1$. Mivel a tört értéke nulla is lehet, ezért $x+5=0$ (a számláló egyenlő nulla) esetet is vizsgálnunk kell, innen az $x=-5$ megoldást kapjuk. Az eredeti egyenlőtlenség megoldása tehát $x>4$ vagy $-5\le x<-1$.

A 4. példa 2. megoldása alapján észrevehető, hogy egy tört vagy szorzat előjelét a benne szereplő negatív előjelű tényezők száma határozza meg.

- Egy tört vagy egy szorzat akkor és csakis akkor pozitív, ha bennük páros számú negatív előjelű tényező van és egyik tényezője sem 0.
- Egy tört vagy egy szorzat akkor és csakis akkor negatív, ha bennük páratlan számú negatív előjelű tényező van és egyik tényezője sem 0.

Oldjuk meg!

1. Egy vállalkozás költségét a $C(x)=120x+400$ függvény, a bevételét pedig az $R(x)=-4x^2+360x-400$ függvény írja le, ahol x a kibocsátás nagyságát jelöli $(x\in\mathbb{N})$. $C(x), R(x)$ értéke ezer forintban értendő. Mekkora kibocsátás esetén lesz a termelés nyereséges?

2. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $-2|x-3|+4\ge 1-x$ b) $x^2+2x-3<-2+\dfrac{2}{x}$ c) $2\sqrt{x+1}-3\le\sqrt{4-x}$ d) $\dfrac{1}{|x+4|}\ge 2-|x+4|$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket az egész számok halmazán!

a) $3x-\dfrac{3}{4}\left\{\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{2}(x-10)+2\right\}\le\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{2}(x-18)-4\right]$ b) $\dfrac{4x-13}{12}-\dfrac{x+15}{20}+3x>\dfrac{5x-4}{6}-\dfrac{6-7x}{15}$

c) $(2x-3)(x+21)-2(x+5)(x-5)\le(2x+3)^2-(2x+1)(2x-5)$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2+3x}{x-5}>0$ b) $\dfrac{4-x}{2x+6}\ge 0$ c) $(x-3)(x+7)<0$ d) $(x-5)(x+6)(4-2x)\ge 0$ e) $\dfrac{2x+7}{x-1}\le 1$

f) $\dfrac{x-6}{2x+1} > \dfrac{2}{3}$ g) $(x+3)(x-2)(x+1)-(x-3)(x-2)(x-1) \ge x(x-2)(3x+11)$

h) $\dfrac{3x+2}{x+1} - \dfrac{x+2}{x-4} \le 2$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $|x| + \dfrac{1}{|x|} \ge 2$ b) $x^2 - 10x + 25 + \dfrac{1}{x^2 - 10x + 25} \le 2$

c) $\dfrac{x^4}{16} + \dfrac{16}{x^4} \le 1 + 2y - y^2$ d) $\dfrac{\sqrt{x-4}}{3} + x < 6 - \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

5. Abszolút értéket tartalmazó egyenletek és egyenlőtlenségek

Az abszolút értéket tartalmazó egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása előtt elevenítsük fel az abszolút érték definícióját! Nemnegatív valós szám abszolút értéke egyenlő magával a számmal, negatív valós szám abszolút értéke pedig egyenlő a szám ellentettjével.

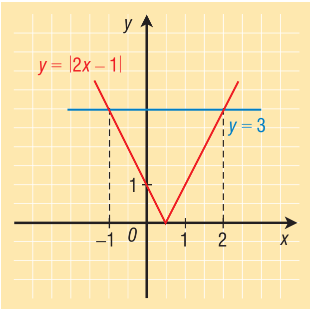
5.1. ábra Karl Weierstrass (1815–1897)
Német matematikus, ő vezette be az abszolútérték jelet. Nevéhez fűződik az analízis szabatos felépítése, őt tekintik a modern analízis „atyjának”

Vegyük észre, hogy a definíció megadja az abszolút érték „ellenszerét”! Ha ugyanis azt tudom, vagy feltételezem, hogy **az abszolútérték jelen belül álló kifejezés nemnegatív, akkor a kifejezés abszolút értéke helyett magát a kifejezést írhatjuk, ha viszont az abszolútérték jelen belül álló kifejezés negatív, akkor a kifejezés abszolút értéke helyett a kifejezés ellentettjét helyettesíthetjük az abszolút értékes kifejezés helyére.**

1. példa Oldjuk meg a $|2x-1| = 3$ egyenletet!

Megoldás:
1. módszer:
Az egyenlet jobb oldalán egy kifejezés abszolút értéke, a bal oldalán pedig a 3 áll. A kérdés tehát az, hogy melyik az a valós szám, amelynek az abszolút értéke 3-mal egyenlő? Az abszolút érték definíciója szerint ez a szám 3 vagy –3, azaz $2x-1=3$ vagy $2x-1=-3$. Innen az eredeti egyenlet megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$.

2. módszer:
A megadott egyenletet megoldhatjuk grafikusan úton is. Ábrázoljuk az egyenlet két oldalának megfelelő $f(x) = |2x-1|$ és $g(x) = 3$ valós függvények grafikonjait! (5.2. ábra) A két grafikonnak két közös pontja van. Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$, amelyekről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.



5.2. ábra Az 1. példa grafikus megoldása

5.3. ábra Két esetem van

2. példa Oldjuk meg az

$$\left|x+1\right|-3=-\frac{3}{2}x-2 \text{ egyenletet!}$$

Megoldás:

1. módszer:

Az egyenlet jobb oldalán egy abszolút értékes kifejezés, a bal oldalán pedig egy másik kifejezés áll. Ilyenkor célunk az, hogy az abszolútérték jelet „eltüntessük”. Mit kell ahhoz tudnunk, hogy elhagyhassuk az abszolútérték jelet egy kifejezésről? Ehhez az abszolút érték definíciója szerint az abszolútérték jelen belül álló kifejezés előjelét kell ismernünk. Az $\left|x+1\right|$ helyére $x+1$-et írhatunk, ha azt tudjuk, hogy $x+1$ nemnegatív (azaz $x \geq -1$ esetén), és $-x-1$-et, ha $x+1$-ről tudjuk, hogy negatív (azaz $x < -1$ esetén). Összefoglalva:

$$\left|x+1\right|=\begin{cases} x+1, \text{ ha } x \geq -1 \\ -x-1, \text{ ha } x < -1 \end{cases}$$

A fentiek miatt a megoldást két esetre kell bontanunk. Egyik esetben az egyenlet megoldását a -1-nél nem kisebb valós számok között, a másik esetben a -1-nél kisebb valós számok között keressük.

I. eset: ha $x \geq -1$, akkor az egyenlet (1) $x+1-3=-\frac{3}{2}x-2$ alakba írható. Az egyenlet megoldására $x=0$ adódik, ami eleget tesz az $x \geq -1$ feltételnek, azaz $x=0$ a vizsgált tartományba esik. Mivel az (1) számú egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az $x=0$ az eredeti egyenletnek is megoldása.

II. eset: ha $x < -1$, akkor az egyenlet (1) $-x-1-3=-\frac{3}{2}x$ alakba írható. Az egyenlet megoldására $x=4$ adódik, ami nem tesz eleget az $x < -1$ feltételnek, azaz $x=4$ nem a vizsgált tartományba esik, ezért az $x=4$ az eredeti egyenletnek nem megoldása.

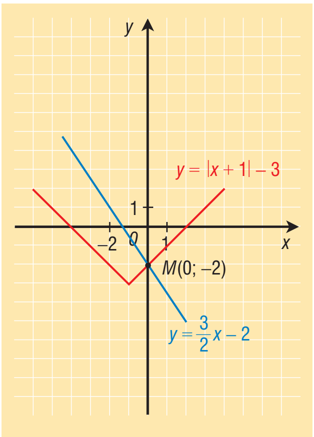
Az I. és a II. eset miatt az eredeti egyenlet megoldása $x=0$.

2. módszer:

Oldjuk meg az egyenletet grafikus úton!

Ábrázoljuk az egyenlet két oldalának megfelelő $f(x)=\left|x+1\right|-3$ és $g(x)=-\frac{3}{2}x-2$ valós függvények grafikonjait! (5.4. ábra)

A két grafikonnak egy közös pontja van, az $M(0;-2)$. Az egyenlet megoldása $x=0$, amelyről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.



5.4. ábra A 2. példa grafikus megoldása

3. példa Oldjuk meg a $\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenlet alaphalmaza a $\mathbb{R}$, értelmezési tartománya pedig mindazon valós számok halmaza, amelyekre a négyzetgyökvonás definíciója miatt az $x^2-4x+4\geq 0$ feltétel teljesül. Az $x^2-4x+4=(x-2)^2$, ezért az $x^2-4x+4\geq 0$ feltétel bármely valós szám esetén fennáll, így az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Továbbá az egyenlet bal oldalán a négyzetgyökvonás elvégezhető, így az $|x-2|=2x-1$ egyenlethez jutunk, amely az eredeti egyenlettel ekvivalens. Az abszolút érték definíciója alapján:

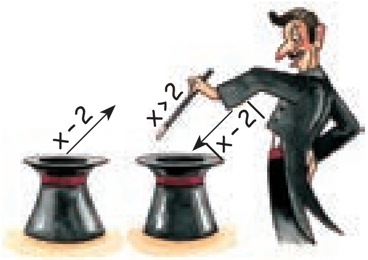
$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{ha } x-2\geq 0, \text{ azaz } x\geq 2;\\ -x+2, & \text{ha } x-2<0, \text{ azaz } x<2.\end{cases}$$

A feladat megoldását két esetre kell bontanunk. Egyik esetben az egyenlet megoldását a 2-nél nem kisebb valós számok között, a másik esetben a 2-nél kisebb valós számok között keressük.

I. eset: ha $x\geq 2$, akkor az egyenlet (1) $x-2=2x-1$ alakba írható. Az egyenlet megoldására $x=-1$ adódik, ami nem tesz eleget az $x\geq 2$ feltételnek, ezért az eredeti egyenletnek sem megoldása.

II. eset: ha $x<2$, akkor az egyenlet (1) $-x+2=2x-1$ alakba írható. Az egyenlet megoldására $x=1$ adódik, ami eleget tesz az feltételnek, a vizsgált tartományba esik. Mivel az (1) alatti egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az $x=1$ az eredeti egyenletnek is megoldása.

Az I. és a II. eset miatt az eredeti egyenlet megoldása $x=1$.



5.5. ábra Nem varázslat

5.6. ábra Nem bűvésztrükk

4. példa Oldjuk meg a $2|x+2|+|x-3|=7-x$ egyenletet az egész számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenlet alaphalmaza és értelmezési tartománya az $\mathbb{Z}$. A felírt egyenlet két abszolút értékes kifejezést is tartalmaz. A definíció szerint:

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, & \text{ha } x+2\geq 0, \text{ azaz } x\geq -2;\\ -x-2, & \text{ha } x+2<0, \text{ azaz } x<-2.\end{cases}$$

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & \text{ha } x-3\geq 0, \text{ azaz } x\geq 3;\\ -x+3, & \text{ha } x-3<0, \text{ azaz } x<3.\end{cases}$$

Az $x+2$ kifejezés az $x=-2$-nél, az $x-3$ kifejezés az $x=3$-nál vált előjelet. Mivel a kifejezések előjelét ugyanazon x-ek esetén kell ismernünk ahhoz, hogy az abszolútérték jeleket „el tudjuk tüntetni", ezért az egyenletet az $x=-2$ és az $x=3$ által meghatározott három intervallumon (I. $x<-2$, II. $-2\leq x<3$ és III. $x\geq 3$) kell vizsgálnunk.

5.7. ábra Ahány gyerek, annyi eset

5.8. ábra Ifjú matematikusok beszélgetnek

I. Ha $x < -2$, akkor

$$\begin{aligned} 2(-x-2)+(-x+3) &= 7-x \\ -3x-1 &= 7-x \\ -8 &= 2x \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Az $x=-4$ a vizsgált tartományba esik, $-4 \in \mathbb{Z}$, és az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti egyenletnek is megoldása.

II. Ha $-2 \le x < 3$, akkor

$$\begin{aligned} 2(x+2)+(-x+3) &= 7-x \\ x+7 &= 7-x \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Az $x=0$ a vizsgált tartományba esik, $0 \in \mathbb{Z}$, és az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti egyenletnek is megoldása.

III. Ha $x \ge 3$, akkor

$$\begin{aligned} 2(x+2)+(x-3) &= 7-x \\ 3x+1 &= 7-x \\ 4x &= 6 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Az $x=\frac{3}{2}$ nem esik a vizsgált tartományba $\left(\frac{3}{2}<3\right)$ és nem is egész szám, így az eredeti egyenletnek sem megoldása.
Az egyenletnek tehát két megoldása van, az egész számok halmazán az $x_1=-4$ és az $x_2=0$.

5. példa Oldjuk meg az $|x-1| = 1-x$ egyenletet a pozitív számok halmazán!

Megoldás:
Az egyenlet alaphalmaza, értelmezési tartománya a $\mathbb{R}^+$. Az egyenlet bal oldalán egy kifejezés abszolút értéke, jobb oldalán pedig a kifejezés ellentettje áll. A kérdés tehát az, hogy egy szám abszolút értéke mikor egyenlő a szám ellentettjével. Az abszolút érték definíciója szerint ez akkor és csakis akkor teljesül, ha a szám negatív vagy nulla. Így az egyenlet minden olyan x-re fennáll, amelyre $x-1 \le 0$ teljesül, ahonnan $x \le 1$ adódik.

Az egyenlet értelmezési tartománya a $\mathbb{R}^+$, ezért az egyenlet megoldáshalmaza $]0;1]$.

6. példa Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $|3x-2|\leq\frac{5}{3}$ b) $|12-5x|>2$

Megoldás:

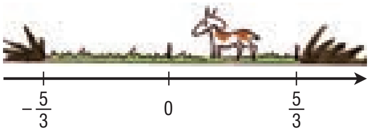
a) A $|3x-2|\leq\frac{5}{3}$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a valós számokat, amelyek abszolút értéke egyenlő $\frac{5}{3}$-dal vagy kisebb $\frac{5}{3}$-nál. Ez akkor teljesül, ha a szám $-\frac{5}{3}$ vagy annál nagyobb, és $\frac{5}{3}$ vagy annál kisebb, azaz

$$-\frac{5}{3}\leq 3x-2\leq\frac{5}{3};\qquad /+2$$

$$\frac{1}{3}\leq 3x\leq\frac{11}{3};\qquad /:3$$

$$\frac{1}{9}\leq x\leq\frac{11}{9}.$$

Az a) egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $\left[\frac{1}{9};\frac{11}{9}\right]$.



5.9. ábra Határok között

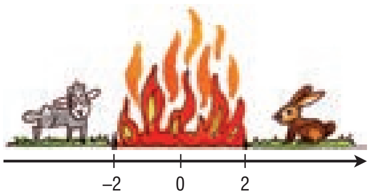
b) A $|12-5x|>2$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a valós számokat, amelyek abszolút értéke nagyobb 2-nél. Ez akkor teljesül, ha a szám nagyobb, mint 2, vagy ha a szám kisebb, mint –2, azaz

$$12-5x>2 \quad\text{vagy}\quad 12-5x<-2;$$

$$-5x>-10 \quad\text{vagy}\quad -5x<-14;$$

$$x<2 \quad\text{vagy}\quad x>\frac{14}{5}.$$

A b) egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]-\infty;2[\,\cup\,\left]\frac{14}{5};\infty\right[$.



5.10. ábra Csak –2 alatt és 2 felett vagyunk „biztonságban”

7. példa Oldjuk meg az

$|x-3|\leq-\frac{1}{2}x+3$ egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

Megoldás:

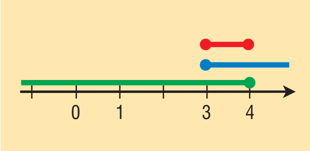
1. módszer:

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$. A 2. példához hasonlóan, az abszolút érték definíciója alapján az

$$|x-3|=\begin{cases}x-3, & \text{ha } x-3\geq 0,\ \text{azaz } x\geq 3;\\ -x+3, & \text{ha } x-3<0,\ \text{azaz } x<3.\end{cases}$$

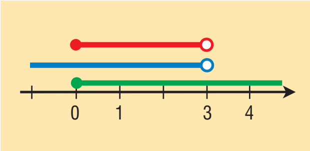
MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 287 2012.06.25. 14:55:17

A megoldást tehát most is két esetre kell bontanunk. Egyik esetben az egyenlőtlenség megoldását a 3-nál nem kisebb valós számok között, a másik esetben a 3-nál kisebb valós számok között keressük.



5.11. ábra I. eset

I. eset: ha $x \geq 3$, akkor az egyenlőtlenség $x-3 \leq -\frac{1}{2}x+3$ alakban írható, ahonnan az $x \leq 4$ adódik, amit összevetve az $x \geq 3$ feltétellel (5.11. ábra), az egyenlőtlenség megoldáshalmazát kapjuk: $[3;4]$.



5.12. ábra II. eset

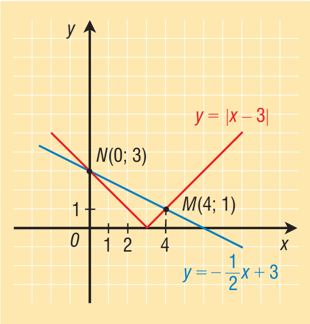
II. eset: ha $x < 3$, akkor az egyenlőtlenség $-x+3 \leq -\frac{1}{2}x+3$ alakban írható, ahonnan az $x \geq 0$ adódik, amit összevetve az $x < 3$ feltétellel (5.12. ábra), az egyenlőtlenség megoldáshalmazát kapjuk: $[0;3[$.

Az I. és a II. eseteket összegezve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $[0;4]$.

2. módszer:

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget grafikus úton is!

Az egyenlőtlenség két oldalának megfelelő $f(x)=|x-3|$, $g(x)=-\frac{1}{2}x+3$ valós függvények grafikonjainak két közös pontja van: $N(0;3)$ és $M(4;1)$.



5.13. ábra A 7. példa grafikus megoldása

Az 5.13. ábráról leolvasható, hogy ha 0-nál kisebb vagy 4-nél nagyobb értékeket írunk az x helyébe, akkor az f függvény grafikonja a g függvény grafikonjától pozitív irányban van, azaz a 0-nál kisebb vagy 4-nél nagyobb x értékek esetén az $f(x) > g(x)$. Ha viszont a $[0;4]$ intervallumba eső értékeket írunk az x helyébe, akkor a g függvény grafikonja halad az f függvény grafikonjától pozitív irányban, azaz $g(x) \geq f(x)$. Így az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $[0;4]$ intervallum.

8. példa Oldjuk meg a $2|x-1|-|x+1|>3$ egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$.

A felírt egyenlőtlenség két abszolút értékes kifejezést is tartalmaz. A definíció szerint:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x+1 \geq 0, \text{ azaz } x \geq -1; \\ -x-1, & \text{ha } x+1 < 0, \text{ azaz } x < -1. \end{cases}$$

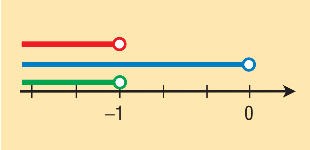
$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x-1 \geq 0, \text{ azaz } x \geq 1; \\ -x+1, & \text{ha } x-1 < 0, \text{ azaz } x < 1; \end{cases}$$

Az $x+1$ kifejezés az $x=-1$-nél, az $x-1$ kifejezés az $x=1$-nél vált előjelet. Mivel a kifejezések előjelét ugyanazon x-ek esetén kell ismernünk ahhoz, hogy az abszolútérték jeleket „el tudjuk tüntetni”, ezért az egyenletőtlenséget az $x=-1$ és az $x=1$ által meghatározott három intervallumon (I. $x<-1$, II. $-1 \leq x < 1$ és III. $x \geq 1$) kell vizsgálnunk.

I. eset: ha $x < -1$, akkor

$$2(-x+1) - (-x-1) > 3$$
$$-x + 3 > 3$$
$$x < 0$$

Vessük össze a kapott $x < 0$ feltételt az $x < -1$ feltétellel! (5.14. ábra)
Az I. eset megoldása tehát: $x < -1$.



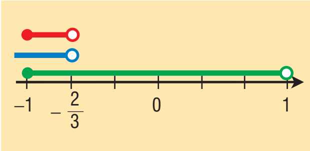
5.14. ábra I. eset

II. eset: ha $-1 \le x < 1$, akkor

$$2(-x+1) - (x+1) > 3$$
$$-3x + 1 > 3$$
$$x < -\frac{2}{3}$$

Vessük össze a kapott $x < -\frac{2}{3}$ feltételt a $-1 \le x < 1$ feltétellel! (5.15. ábra)

A II. eset megoldása tehát: $-1 \le x < -\frac{2}{3}$.

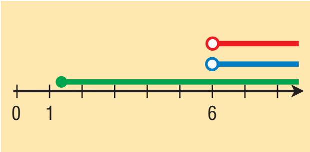


5.15. ábra II. eset

III. eset: ha $x \ge 1$, akkor

$$2(x-1) - (x+1) > 3$$
$$x - 3 > 3$$
$$x > 6$$

Vessük össze a kapott $x > 6$ feltételt az $x \ge 1$ feltétellel! (5.16. ábra)
A III. eset megoldása tehát: $x > 6$.



5.16. ábra III. eset

Az I–II–III. esetekből az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]6; \infty\right[.$$

Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

a) $|x-3| = 4$ b) $2|x+3| - 4 = 0$ c) $\left|\frac{1}{2}x - 9\right| - \frac{3}{2} = 0$ d) $|5-6x| + 10 = 0$

e) $\sqrt{x^2} = 3$ f) $\sqrt{1-6x+9x^2} - 1 = 0$ g) $|x-1| < 3$ h) $|x+2| \ge 2$

i) $\left|\frac{5}{3}x - 3\right| \le 1\frac{1}{2}$ j) $\sqrt{x^2+2x+1} \ge 3$ k) $2\sqrt{x^2-4x+4} - 7 > 0$ l) $\sqrt{25+10x+x^2} > 0$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

a) $|2x-3| = 5-3x$ b) $|6-5x| - 9 = -2x$ c) $\left|\frac{2}{3}x + 8\right| - \frac{1}{2}x = 7$

d) $|x+4| > 3x+2$ e) $|5-2x| \le 23+4x$ f) $\frac{4}{5}x - \left|\frac{7}{6}x + \frac{11}{4}\right| \ge 2 - x$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

a) $|x-3|+|x+2|=3x-1$ b) $|x-6|-2|x+2|=9-x$ c) $4-|x-3|+3|x-1|=4x$

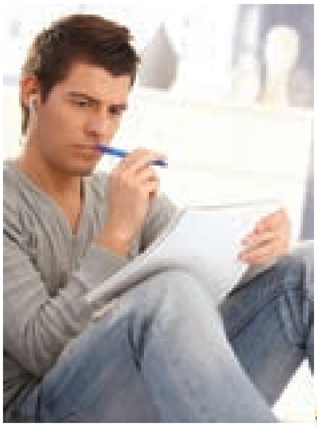
d) $|x+2|+|x-4|\geq 2-x$ e) $|2x-9|+|2x+5|<7-2x$ f) $3|x-7|-2|x+1|-5>\frac{3}{2}x$

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

a) $\left||x-2|-2\right|=\frac{x+4}{3}$ b) $\left|3-|x-1|\right|\geq -\frac{1}{3}x+2$

c) $\left|\left||x+2|-6\right|-3\right|=1$ d) $\left|\left|2|x-2|-4\right|-6\right|\leq -\frac{2}{3}x+6$

6. Szöveges feladatok I.



6.1. ábra Törjük a fejünket!

6.2. ábra Mindkettőnk életkora azonos számjegyekből áll

A szöveges feladatok megoldásának lehetséges lépései:

- először megértjük a szöveget, majd
- a szövegben megfogalmazott feltételeket, összefüggéseket átfordítjuk a matematika nyelvére, megválasztjuk az ismeretlent (gyakran célszerű a szövegben feltett kérdés alapján választani),
- egyenleteket írunk fel, azután megoldjuk a felírt egyenletet,
- megvizsgáljuk, hogy a kapott megoldás(ok) eleget tesz(nek)-e a feladat feltételeinek, és
- végül válaszolunk a szövegben feltett kérdésre.

Erre mutatunk most néhány példát!

1. példa Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha a számjegyeket felcseréljük, az eredeti számnál 27-tel kisebb számot kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

Megoldás:

A feladat szövege egy kétjegyű számról, és annak számjegyeiről szól. De milyen kapcsolat van egy kétjegyű szám számjegyei, és maga a szám között a tízes számrendszerben?

Vegyük például a 37-et, ez egy kétjegyű szám, amelynek számjegyei a 3 és a 7. A 3 a tízes, a 7 az egyes helyi értéken álló számjegy, ezek segítségével magát a számot $3\cdot 10+7$ alakban írhatjuk fel.

Általánosan a tízes számrendszerben minden kétjegyű szám $10a+b\ (=\overline{ab})$ alakban írható fel, ahol az a a tízes, a b az egyes helyi értéken álló számjegyet jelöli.

Legyen x az eredeti számban a tízes helyi értéken álló számjegy!

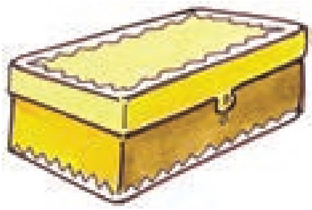
Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11.	tízesek száma x	egyesek száma $11-x$	eredeti szám: $10x+11-x=9x+11$
Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor	$11-x$	x	a felcserélés után kapott szám: $10(11-x)+x=110-9x$
az eredeti számnál 27-tel kisebb számot kapunk.			$9x+11-27=110-9x$

A kapott $9x+11-27=110-9x$ egyenlet **értelmezési tartománya** az egyjegyű pozitív egészek halmaza. A megoldás:

$$18x-16=110,$$
$$18x=126,$$
$$x=7.$$

Az eredeti szám így a 74. A felcserélés után kapott szám 47, és 74 – 27 = 47 miatt a keresett kétjegyű szám a 74.

2. példa Egy díszdobozokat gyártó cégnél a gyártásnál felhasznált papírmennyiség 3%-a hulladék, egy doboz felszíne 216 cm^2. Hány díszdoboz készült el azon a napon, amikor 0,324 m^2 hulladék keletkezett a dobozok gyártásakor?



6.3. ábra Mintadarab

Megoldás:

1. módszer:

Válasszuk ismeretlennek a kérdéses napon legyártott díszdobozok számát, és jelöljük ezt x-szel! Mivel egy doboz felszíne 216 cm^2, ezért a dobozok elkészítéséhez szükséges (hasznos) papírmennyiség $216x\ \text{cm}^2$.

A gyártásnál felhasznált (összes) papírmennyiség 3%-a hulladék, ezért a hasznos papírmennyiség az összes papírmennyiség 97%-a. A feladat szövege szerint a 0,324 m^2 megfelel az összes papírmennyiség 3%-ának, ahonnan a hasznos papírmennyiség $\frac{0{,}324}{3}97\cdot 10\,000\ \text{cm}^2$.

A hasznos papírmennyiséget felírtuk kétféleképpen, így a $\frac{0{,}324}{3}97\cdot 10000=216x$ egyenlethez jutunk, amelynek a megoldása $x=485$.

6.4. ábra Az ideális kihasználás

Ellenőrzés: a dobozokhoz felhasznált papírmennyiség $216\cdot 485\ \text{cm}^2$, ez az összes mennyiség 97%-a, így a gyártáskor keletkező hulladék mennyisége $216\cdot 485\ \text{cm}^2\ \frac{3}{97}=3240\ \text{cm}^2=0{,}324\ \text{m}^2$.

Tehát a kérdéses napon 485 darab díszdoboz készült el.

2. módszer:
A dobozok számát megkereshetjük egyenlet felírása nélkül is. Induljunk ki abból, hogy a keletkező hulladék mennyisége, a 0,324 m^2 megfelel az összes papírmennyiség 3%-ának, így az összes papírmennyiség 1%-a $\frac{0,324\ m^2}{3} = 1080\ cm^2$, ahonnan a dobozok készítésére felhasznált mennyiség $97 \cdot 1080\ cm^2$. Mivel egy doboz felszíne 216 cm^2, ezért a legyártott dobozok száma $\frac{97 \cdot 1080\ cm^2}{216\ cm^2} = 485$.

6.5. **ábra** Oldjuk fel a problémát!

3. példa Hány liter 28%-os és hány liter 43%-os töménységű sóoldatot keverjünk össze ahhoz, hogy 40 liter 34%-os töménységű sóoldatot kapjunk?

Megoldás:
A feladat megoldásához szükséges összefüggéseket kémiából ismerjük, miszerint az

$$\begin{matrix}\text{oldott anyag}\\ \text{térfogata}\end{matrix}(1\,\text{liter}) = \begin{matrix}\text{oldat}\\ \text{térfogata}\end{matrix}(1\,\text{liter})\frac{\text{oldat töménysége}(\%)}{100}.$$

Feltételezzük, hogy keveréskor az oldatok térfogata nem változik, az oldott anyag térfogata összeadódik.
Jelölje x a 28%-os töménységű sóoldat térfogatát!
A feladat feltételeinek elemzését, az egyenlet felírását megkönnyítheti az adatok táblázatba foglalása. Adataink áttekintésére az alábbi táblázatot állíthatjuk össze:

	Oldat térfogata (l)	Töménység (%)	Oldott anyag (só) térfogata (l)
I. oldat	x	28	$0,28x$
II. oldat	$40 - x$	43	$0,43(40 - x)$
Keverék	40	34	$0,34 \cdot 40$

6.6. **ábra** Miből mennyi?

Az oldott anyag térfogata összeadódik keveréskor, így a keverékben található oldott anyag térfogata egyenlő az oldatokban található oldott anyagok térfogatának összegével. Innen:

$$\begin{aligned} 0,28x + 0,43(40 - x) &= 0,34 \cdot 40 \\ 0,28x + 17,2 - 0,43x &= 13,6 \\ -0,15x + 17,2 &= 13,6 \\ -0,15x &= -3,6 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Az I. oldatból 24 litert, a II. oldatból 16 litert kell összekevernünk.

Ellenőrzés: a 24 liter 28%-os sóoldatban $24\cdot 0,28=6,72$ liter, a 16 liter 43%-os sóoldatban $16\cdot 0,43=6,88$ liter oldott anyag van, ezek összege $13,6=40\cdot 0,34$ liter.

Tehát 24 liter 28%-os és 16 liter 43%-os sóoldatot kell összekevernünk ahhoz, hogy 40 liter 34%-os sóoldatot kapjunk.


6.7. ábra Károly pénze

4. példa Károly a kaszinóban elveszíti pénzének egyharmadát, majd nyer 200 €-t. Azután elveszíti a meglevő pénzének $\frac{4}{7}$-ed részét és még 100 €-t, ezután elkártyázza a megmaradt pénzének a felét és még 50 €-t, így 200 €-ja maradt. Mennyi pénzzel ült le játszani?

Megoldás:
1. módszer
Kövessük nyomon Károly rendelkezésre álló pénzének alakulását a játszmái során!
Jelöljük x-szel a kezdeti pénzösszegét!

	Rendelkezésre álló pénzösszeg (€)	Elveszített pénzösszeg (€)	Megmaradt pénzösszeg (€)
1. játék	x	$\frac{1}{3}x$	$x-\frac{1}{3}x+200=\frac{2}{3}x+200$
2. játék	$\frac{2}{3}x+200$	$\frac{4}{7}\left(\frac{2}{3}x+200\right)+100=\frac{8}{21}x+\frac{1500}{7}$	$\frac{2}{3}x+200-\left(\frac{8}{21}x+\frac{1500}{7}\right)=\frac{2}{7}x-\frac{100}{7}$
3. játék	$\frac{2}{7}x-\frac{100}{7}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}x-\frac{100}{7}\right)+50=\frac{1}{7}x+\frac{300}{7}$	$\frac{2}{7}x-\frac{100}{7}-\left(\frac{1}{7}x+\frac{300}{7}\right)=\frac{1}{7}x-\frac{400}{7}$

A 3. játék után a megmaradt pénzösszeg egyenlő 200 €-val, így az $\frac{1}{7}x-\frac{400}{7}=200$ egyenlet írható fel, ahonnan $x=1800$ adódik.

Ellenőrzés: az első játék során elvesztett $\frac{1}{3}1800=600$ €-t, nyert 200 €-t, így 1400 €-ja maradt. A második játék alkalmával bukott $\frac{4}{7}1400+100=900$ €-t, tehát 500 €-ja maradt. A harmadik játékban $\frac{1}{2}500+50=300$ € volt a vesztesége, így 200 €-ja maradt.
Tehát Károly 1800 €-val ült le játszani.


6.8. ábra Mennyi is maradt?

2. módszer
A feladatot egyenlet felírása nélkül is megoldhatjuk úgy, hogy az utolsó játék után megmaradó pénzösszegből indulunk ki, és megadjuk az előző játékban rendelkezésre álló pénzösszeget (időben visszafelé haladva). Ezt az eljárást **lebontogatásnak** nevezik.

6.9. ábra Bontogatunk, bontogatunk

200 € a 3. játék végén

$\Downarrow +50$

$250 = 200 + 50$ €, az 50 € elvesztése előtt = a 3. játék elején meglevő pénz fele

$\Downarrow \cdot 2$

$\mathbf{500} = 250 \cdot 2$ €, a rendelkezésre álló pénz felének elbukása előtt, **a 3. játék elején**

$\Downarrow +100$

$600 = 500 + 10$ €, a 100 € elvesztése előtt = a 2. játék elején meglevő pénz $\frac{3}{7}$ része

$\Downarrow \; : \frac{3}{7}$ vagy szorozva $\frac{7}{3}$-dal

$\mathbf{1400} = 600 \cdot \frac{7}{3}$ €, **a 2. játék elején meglevő pénz**

$\Downarrow -200$

$1200 = 1400 - 200$ €, a 200 € elvesztése előtt, az 1. játék elején rendelkezésre álló pénz $\frac{2}{3}$ része

$\Downarrow \; : \frac{2}{3}$ vagy szorozva $\frac{3}{2}$-del

$\mathbf{1800} = 1200 \cdot \frac{3}{2}$ €, **a 1. játék elején meglevő pénz**

Tehát Károly 1800 €-val ült le játszani.

6.10. ábra Mennyi ideje van még a gazellának?

5. példa A gepárd a világ egyik leggyorsabb állata, maximális sebessége $110\frac{\text{km}}{\text{h}}$, egyik tápláléka a gazella, amelynek maximális sebessége $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mennyi idő alatt képes a gepárd utolérni a gazellát attól a pillanattól számítva, amikor 200 méter távolságban vannak egymástól? Feltesszük, hogy mind a két állat maximális sebességgel és azonos irányban fut (a gepárd egyenesen a gazella nyomában).

	Sebesség $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	Idő (s)	Út (m)
Gepárd	$\frac{110}{3,6} = \frac{275}{9}$	t	$\frac{275}{9}t$
Gazella	$\frac{60}{3,6} = \frac{50}{3}$	t	$\frac{50}{3}t$

6.11. ábra Adatok rendszerezése

Megoldás:

1. módszer:

A feladat megoldásához felhasználjuk az $\text{út} = \text{sebesség} \cdot \text{idő}$ összefüggést.

Jelöljük t-vel az indulástól a találkozásig eltelt időt, és legyen a mértékegysége másodperc (s)!

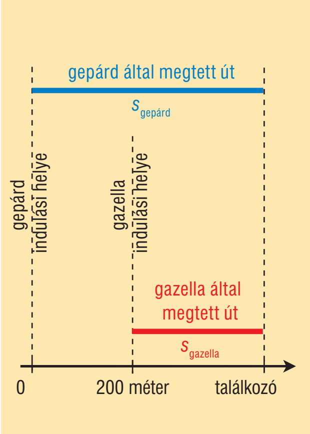
Foglaljuk táblázatba az adatokat, és készítsünk ábrát a gepárd és a gazella mozgásáról!

Az 6.14. ábra alapján felírható, hogy $S_{\text{gepárd}} = 200 + S_{\text{gazella}}$, ahonnan a táblázat út rovata szerint a $\frac{275}{9}t = 200 + \frac{50}{3}t$ egyenlethez jutunk. Az egyenlet megoldása:

$$\frac{125}{9}t = 200$$

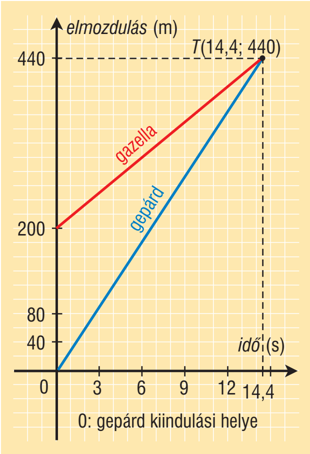
$$t = 14{,}4.$$

Valóban, 14,4 másodperc alatt a gepárd $\frac{275}{9} \cdot 14{,}4 = 440$ métert, és a gazella $\frac{50}{3} \cdot 14{,}4 = 240$ métert tesz meg. Mivel $440 = 240 + 200$, ezért a gepárd 14,4 másodperc alatt képes utolérni a gazellát attól a pillanattól számítva, amikor 200 méter távolságban vannak egymástól.



6.12. ábra Szemléltetés

2. módszer:
Ábrázoljuk a gepárd és a gazella elmozdulás–idő grafikonját! (6.13. ábra) A $t = 0$ időpillanatban legyen a gepárd a koordináta-rendszer kezdőpontjában, ekkor a gazella az elmozdulástengely $(0;200)$ koordinátájú pontjában van. A gepárd elmozdulásának nagyságát az idő függvényében – az út = sebesség · idő alapján – az $s(t)_{\text{gepárd}} = \frac{275}{9}t$, a gazelláét pedig az $s(t)_{\text{gazella}} = \frac{50}{3}t + 200$ elsőfokú, valós függvények írják le. Mindkét függvény grafikonja egyenes, közös pontjuk a $T(14{,}4;440)$. Tehát a gepárd 14,4 másodperc alatt képes utolérni a gazellát.



6.13. ábra Grafikus megoldás

6. példa Egy medencét három csapon keresztül tölthetünk meg. Az első csapon át 6, a másodikon 10, a harmadikon 15 óra alatt telik meg a medence. Mennyi idő alatt telik meg az üres medence, ha mindhárom csapot egyszerre megnyitjuk?

Megoldás:
Az első csap egy óra alatt az egész medence $\frac{1}{6}$ részét tölti meg, ezért t idő alatt a medence $\frac{t}{6}$ részét tölti meg. Ha a három csap együtt van nyitva, és t idő alatt töltik meg a medencét, akkor együtt $\frac{t}{6} + \frac{t}{10} + \frac{t}{15}$ részét töltik meg a medencének. Mivel a medencét t idő alatt megtöltik, így $\frac{t}{6} + \frac{t}{10} + \frac{t}{15} =$ a medence egész része, azaz

$$\frac{t}{6} + \frac{t}{10} + \frac{t}{15} = 1$$

$$5t + 3t + 2t = 30$$

$$t = 3$$

6.14. ábra Egyszerre gyorsabb

Ellenőrzés: 3 óra alatt az első csap a medence $\frac{3}{6}=0,5$ részét, a második csap $\frac{3}{10}=0,3$ részét, a harmadik csap $\frac{3}{15}=0,2$ részét tölti meg, tehát együtt megtöltik a medencét.
Tehát 3 óra alatt telik meg az üres medence, ha mindhárom csapot egyszerre megnyitjuk.

6.15. ábra Hányan rendeltek somlói galuskát?

7. példa Egy 35 fős osztály cukrászdába ment. A sütizés végén kiderült, hogy háromféle édességet ettek: gyümölcskosarat, túrótortát, somlói galuskát, és mindenki rendelt valamilyet a három közül. Túrótortát 14-en, gyümölcskosarat 15-en, somlói galuskát 13-an kértek. Egy diák rendelt mindháromból. A túrótortát rendelők közül 11-en nem kértek gyümölcskosarat; a csak gyümölcskosarat rendelők eggyel többen voltak, mint a csak somlói galuskát rendelők. Hány olyan tanuló volt, aki csak somlói galuskát rendelt?

Megoldás:
Jelöljük *O*-val az adott osztály tanulóinak halmazát, *T*-vel a túrótortát, *S*-sel a somlói galuskát, *Gy*-vel a gyümölcskosarat evő és az adott osztályba járó diákok halmazát, *x*-szel azon nebulók számát, akik csak somlói galuskát rendeltek! Szemléltessük Venn-diagrammal a fenti halmazokat!
A feladat feltételeit most már leírhatjuk a halmazműveletek segítségével:

I. Mindenki rendelt valamilyet a három közül: $|O|=|T\cup S\cup Gy|=35.$

II. a) Túrótortát 14-en: $|T|=14;$

b) gyümölcskosarat 15-en: $|Gy|=15;$

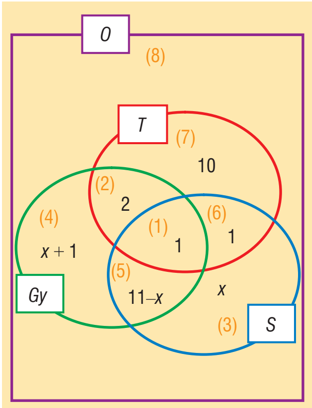
c) somlói galuskát 13-an kértek: $|S|=13.$

III. A túrótortát rendelők közül 11-en nem kértek gyümölcskosarat: $|T\setminus Gy|=11.$

IV. Egy diák rendelt mindháromból: $|T\cap Gy\cap S|=1.$

V. A csak somlói galuskát rendelők száma: $|S\setminus(T\cup Gy)|=x.$

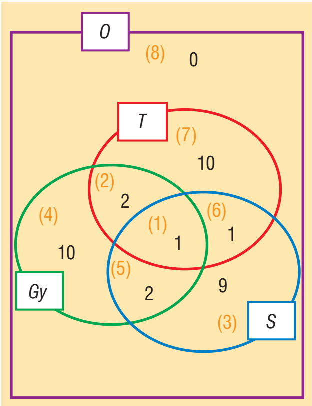
VI. A csak gyümölcskosarat rendelők száma: $|Gy\setminus(T\cup S)|=x+1.$



6.16. ábra Szemléltetés Venn-diagrammal

A 6.16. halmazábra tartományaiba írjuk be az elemszámokat! A IV. szerint az (1) tartományba 1-et kell írnunk, a (2) tartományba a II. a) és a III. miatt 2 kerül, a (3) tartományba V. miatt *x*, a (4) tartományba VI. miatt $x+1$. A beírt számok és a II. b) miatt az (5) tartományba $11-x$ -et, a (6) tartományba II. c) miatt $13-(11-x+x+1)=1$-et, a (7) tartományba a II. a) miatt $14-(1+2+1)=10$ -et írunk.
I. miatt a (8) tartomány elemszáma 0, és

$$35=10+1+1+2+(x+1)+(11-x)+x,$$
$$35=26+x,$$
$$9=x.$$



6.17. ábra Ellenőrzés

Az ellenőrzést a 6.17. ábra alapján elvégezhetjük. A kapott megoldás a feladat minden feltételének eleget tesz.
Tehát kilenc olyan tanuló volt, aki csak somlói galuskát rendelt.

Oldjuk meg!

1. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor az eredeti szám 4-szeresénél 3-mal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

2. Egy kereskedő 1000 darab pólót vett 3000 euróért. A pólók egy részét 16%-os haszonnal, másik részét 4%-os veszteséggel adta el, így 330 euró haszonra tett szert. Hány pólót adott el nyereséggel, és hányat veszteséggel?

3. Hány liter 23%-os és hány liter 35%-os töménységű sósavat keverjünk össze ahhoz, hogy
a) 24 liter 29%-os töménységű sóoldatot kapjunk?
b) 36 liter 25%-os töménységű sóoldatot kapjunk?

4. Egy apa vagyona négy fiára maradt. Fiai a következőképp osztották fel egymás között a vagyont.
Az elsőé legyen 3000 livres-rel kevesebb, mint a vagyon fele.
A másodiké 1000 livres-rel kevesebb, mint a vagyon harmada.
A harmadiké legyen épp a vagyon negyede.
A negyedik 600 livres-rel többet kapjon, mint a vagyon ötöde.
Mekkora volt az egész vagyon, és mennyi jutott egy-egy fiúnak? (*Euler*)

5. Hárman játszottak, az első játszmában az első játékos annyit vesztett, hogy a második és a harmadik játékos is megkétszerezte a pénzét. A következőben a második vesztett úgy, hogy az első és a harmadik duplázta meg a pénzét. Végül a harmadik játszmában az első és a második játékos annyit nyert a harmadiktól, hogy mindkettő megkétszerezte a pénzét. Ekkor abbahagyták a játékot, és kiderült, hogy mindegyiküknek ugyanannyi pénze van, mégpedig 24 louis. Milyen összeggel kezdtek az egyes játékosok a játékhoz? (*Euler*)

6. Egy lakásfelújításnál a burkolási munkákat két azonos teljesítményű burkoló együtt 6 nap alatt végezte volna el, 2 nap elteltével azonban az egyik munkás megbetegedett, így a munkát a másik burkoló egyedül fejezte be. Hány nap alatt készült el a burkolat?

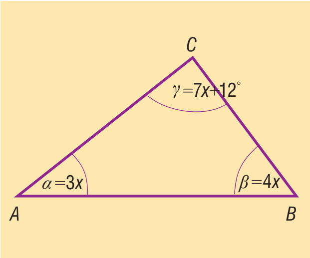
7. Egy kettős vágányú villamosvonal egyik sínpárján egy 14 m hosszúságú villamos $20\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a másik sínpáron egy 28 m hosszúságú villamos $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad. Mennyi idő alatt haladnak el egymás mellett, ha
a) ugyanabban az irányban;
b) egymással szemben közlekednek?

7. Szöveges feladatok II.

A geometriai feladatok egy részének megoldásában szintén segítségünkre lehet a probléma egyenletre fordítása. Egyenletet a szövegben szereplő adatok közötti összefüggések és a tanult tételek alapján tudunk felírni. A megoldást általában megkönnyíti az is, hogyha ábrát készítünk az adataink feltüntetésével. Erre mutatunk most néhány példát!

1. példa Egy háromszög két kisebb szögének aránya 3:4. A legnagyobb szöge a másik két szög összegénél 12°-kal nagyobb. Mekkorák a háromszög szögei?

7.1. ábra Hogy is van ez?



7.2. ábra Háromszög

Megoldás:
A szövegben egy háromszög szögeiről, két szögének arányáról van szó. Az első mondat szerint két szög aránya 3:4. De mit is jelent az, hogy két szám aránya 3:4?

Ez azt jelenti, hogy az egyik szám egy adott egység 3-szorosa, a másik szám pedig ennek az egységnek a 4-szerese, azaz a számok felírhatóak $3x, 4x$ alakban. Próbáljuk most átfordítani a feladatot a matematika nyelvére!

Legyen a háromszög két kisebb szöge α, β, a legnagyobb szöge γ! (7.2. ábra)

Szavakkal kifejezve:	**Az algebra nyelvén:**
A háromszög két kisebb szögének aránya 3:4.	$\alpha = 3x$, $\beta = 4x$
A legnagyobb szög a másik két szög összegénél 12°-kal nagyobb.	$\gamma = \alpha + \beta + 12° = 7x + 12°$

Milyen összefüggést ismerünk az adatok, a szögek között? A háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért felírhatjuk a $3x + 4x + 7x + 12° = 180°$ egyenletet.
Az $\alpha > 0, \beta > 0$ és $\gamma > 0$ miatt az egyenlet alaphalmaza a $\mathbb{R}^+$.

Az egyenlet megoldása: $14x + 12° = 180°$,

$$14x = 168°,$$

$$x = 12°.$$

A háromszög szögei tehát $\alpha = 3x = 36°$, $\beta = 4x = 48°$, $\gamma = 7x + 12° = 96°$.

7.3. ábra Trapézban

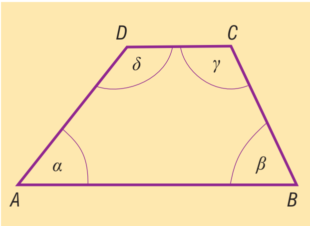
2. példa Egy trapéz három belső szögének aránya 3:7:9. Mekkorák a trapéz szögei?

Megoldás:
A trapéz három belső szögének aránya 3:7:9, ez alapján a trapéz három szögét $3x$, $7x$, $9x$ alakban adhatjuk meg.

Mivel a trapéz szögeinek mérőszáma csak pozitív lehet, ezért az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell.

A feladat szövegéből azonban nem derül ki, hogy a trapéz (7.4. ábra) mely három szögéről van szó, ezért több esetet kell vizsgálnunk.

Mivel az adott szögek közül kettőnek a trapéz ugyanazon szárán kell nyugodni, ezért 3 esetet különböztetünk meg. Minden esetben felhasználjuk majd, hogy a trapéz egy-egy szárán nyugvó szögeinek összege egyenlő $(\alpha + \delta = \beta + \gamma)$, és a trapéz egy szárán fekvő szögeinek összege 180°. Mivel az egyik száron fekvő szögek felcserélhetők, ezért egy-egy eseten belül két megoldást kaphatunk.



7.4. ábra Trapéz

	I. eset	II. eset	III. eset
A trapéz egyik szárán nyugvó két szög	$3x,\ 7x$	$3x,\ 9x$	$9x,\ 7x$
A trapéz szárán fekvő szögek összege 180°.	$3x+7x=180°$ $10x=180°$ $x=18°$	$3x+9x=180°$ $12x=180°$ $x=15°$	$9x+7x=180°$ $16x=180°$ $x=11,25°$
Tehát a trapéz szögei rendre:	18°; 54°; 126°; 162° vagy 18°; 126°; 54°; 162°	45°; 75°; 105°; 135° vagy 45°; 105°; 75°; 135°	33,75°; 78,75°; 101,25°; 146,25° vagy 33,75°; 101,25°; 78,75°; 146,25°

7.5. ábra Trapézon

3. példa Egy háromszög oldalainak mérőszáma a, b, c pozitív egész számok és $a+b=5c$. Határozzuk meg az ezzel a tulajdonsággal rendelkező háromszögek közül a legkisebb kerületű háromszög oldalait!

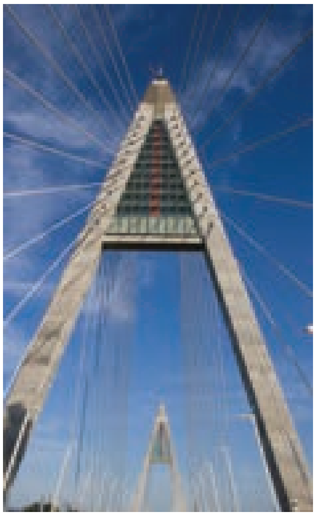
Megoldás:
A háromszög kerülete $K=a+b+c$, a feladat feltétele alapján $K=5c+c=6c$.

A kerület nagysága csak c-től függ, ezért a lehető legkisebb, olyan c pozitív egészet kell megtalálnunk, amely eleget tesz a feladat feltételeinek!

Ha $c=1$, akkor $a+b=5c$ miatt az $a+b=5$. Az 5 kétféleképpen bontható fel két pozitív egész összegére: $1+4;\ 2+3$. Így a keresett háromszög oldalai 1, 1, 4, illetve 1, 2, 3 lenne. Mivel a háromszög-egyenlőtlenség miatt a háromszög bármely két oldala különbségének kisebbnek kell lennie a harmadik oldalánál, egyik esetben sem létezik a háromszög $(4-1 \not< 1; 3-2 \not< 1)$. Tehát $c=1$ esetén nincs megoldás.

Ha $c=2$, akkor $a+b=5c$ miatt az $a+b=10$, és a háromszög-egyenlőtlenség miatt $|a-b|<2$. Mivel a, b pozitív egész számok, ezért csak az $a=b=5$ lehetséges, és ez valóban megoldás is, mert minden feltételnek eleget tesz.

Tehát a keresett háromszög oldalai $a=b=5,\ \ c=2$.



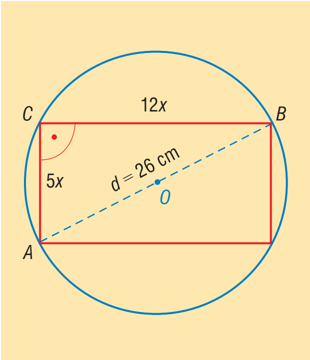
7.6. ábra A Megyeri híd háromszöget formázó tartópillérei

Megjegyzés: A $c=2$ eset $c=1$ esethez hasonlóan is megoldható. A 10 ötféleképpen bontható fel két pozitív egész összegére: $1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 5+5$. A háromszög-egyenlőtlenség egy esetben teljesül csak, amikor a háromszög oldalai $a=b=5,\ c=2$.

4. példa Egy 26 cm átmérőjű körbe írt téglalap oldalainak aránya 5 : 12. Mekkorák a téglalap oldalai?

Megoldás:
Mielőtt ábrát készítenénk, érdemes elgondolkodni azon, hogy hogyan helyezkedik el egymáshoz képest a kör és a téglalap, hol van a kör középpontja, melyik ponthalmazzal érdemes kezdeni a rajzolást.

Mivel a körbe írunk téglalapot, ezért a kört célszerű először megrajzolni. A Thalész-tétel megfordítása miatt a téglalap átlója a kör egyik átmérője (7.7. ábra). A téglalap oldalainak aránya alapján a téglalap két szomszédos oldala $5x, 12x$, ahol $x > 0$.



7.7. ábra Alkalmazzuk Thalész és Püthagorasz tételeit!

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az $ABC\triangle$ -re:

$$(5x)^2 + (12x)^2 = 26^2,$$

$$169x^2 = 676,$$

$$x^2 = 4,$$

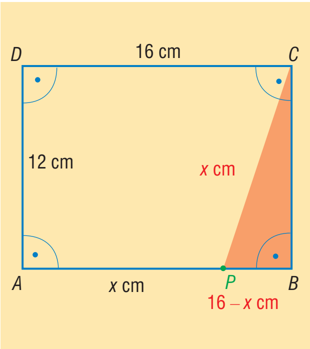
$$x = 2 \text{ az } x > 0 \text{ miatt.}$$

Tehát a téglalap oldalai 10 cm és 24 cm.

5. példa Az $ABCD$ téglalap AB oldala 16 cm, BC oldala 12 cm. Az AB oldal mely P pontja van az A és C pontoktól egyenlő távolságra, mekkora ez a távolság?

Megoldás:
Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével!

A 7.8. ábrán jól látható, hogy az $APCD$ négyszög egy derékszögű trapéz, a PBC pontok pedig egy derékszögű háromszöget jelölnek ki.



7.8. ábra 5. példa

A feladat megoldása előtt érdemes végiggondolni, hogy milyen tanult összefüggéseket kell alkalmaznunk ahhoz, hogy válaszolni tudjunk a példában feltett kérdésre.

Jelölje x (cm) az A és P pont távolságát, ekkor a feladat feltétele szerint a C és P pont távolsága is x cm, valamint B és P pont távolsága $16 - x$ cm, ahol $0 < x < 16$.

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az $PBC\triangle$ -re:

$$(16 - x)^2 + 12^2 = x^2,$$

$$256 - 32x + x^2 + 144 = x^2,$$

$$x^2 - 32x + 400 = x^2,$$

$$32x = 400,$$

$$x = 12,5.$$

Tehát az AB oldal azon P pontja van az A és C pontoktól egyenlő távolságra, amely az A ponttól 12,5 cm, a B ponttól 3,5 cm távolságban van. A keresett távolság 12,5 cm.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 300 2012.06.25. 14:57:01

Oldjuk meg!

1. Egy háromszög belső szögeinek aránya
a) $3:4:5$; b) $2:7:11$; c) $5:7:9$.
Mekkorák a háromszög szögei?

2. Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek szögfelező egyenesei 3-szor akkora szöget zárnak be, mint a szárak által bezárt szög. Mekkorák a háromszög szögei?

3. Egy trapéz három belső szögének aránya $2:3:5$. Mekkorák a trapéz szögei?

4. Egy deltoid három belső szögének aránya $1:5:13$. Mekkorák a deltoid szögei?

5. Egy 51 cm sugarú körbe írt derékszögű háromszög befogóinak aránya $8:15$.
a) Mekkorák a háromszög oldalai és a beírt körének sugara?
b) A hosszabbik befogó mely P pontja van az átfogó végpontjaitól egyenlő távolságra, mekkora ez a távolság?

6. Az $ABCD$ téglalap AB oldala 8 m, BC oldala 6 m. Az AB oldalnak mely P pontjára teljesül, hogy az A és C pontoktól vett távolságainak összege 12 m?

7. Egy háromszög oldalainak mérőszáma a, b, c egész számok, és $a+b=6c$. Határozzuk meg ezen háromszögek közül a legkisebb kerületű háromszög oldalait!

8. Elsőfokú egyenletrendszerek

1. példa A Párizs–Lyon között közlekedő TGV (Train à Grande Vitesse = nagy sebességű vonat) vonat menetideje 2 óra, a Párizs–Tours szakaszon közlekedő TGV menetideje pedig 1 óra. A Párizs–Tours közötti távolság a Párizs–Lyon közötti távolságnál 280 km-rel kevesebb. A Párizs–Lyon szakaszon közlekedő TGV sebessége $24\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val több, mint a Párizs–Tours szakaszon közlekedő TGV sebessége. Mekkora a távolság Párizs és Lyon között vasútvonalon? Mekkora a menetrend szerinti sebessége a Párizs és Lyon között közlekedő TGV-nek?

8.1. ábra Száguldó vonatok

Megoldás:
Jelöljük x-szel a Párizs–Lyon között közlekedő TGV menetrend szerinti sebességét $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban mérve, y-nal a Párizs és Lyon közötti távolságot vasútvonalon km-ben mérve, ahol $x>24$, $y>0$! A feladat szövege szerint:

	Sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	Idő (h)	Út (km)
Párizs–Lyon	x	2	y
Párizs–Tours	$x-24$	1	$y-280$

Az $\text{út} = \text{sebesség} \cdot \text{idő}$ összefüggés alapján két összetartozó egyenletet írhatunk fel. A két egyenlet összetartozását többféleképpen is jelölhetjük pl. kapoccsal vagy aláhúzással.

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x \\ y - 280 &= x - 24 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Az egyenleteket átrendezzük.

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x \\ y &= x + 256 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Így a következő alakot kapjuk.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x - y &= -256 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

8.2. ábra Messze még a cél?

A két egyenlet együtt egy **elsőfokú** (vagy **lineáris) kétismeretlenes egyenletrendszert** alkot, amelynek **általános alakja**:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right\}, \text{ ahol } a, b, c, d, e, f \text{ együtthatók valós számokat jelölnek.}$$

Nyilvánvaló, hogy nem lehet egyszerre $a = 0$ és $b = 0$, és nem lehet egyszerre $d = 0$ és $e = 0$ sem.

Az egyenletekhez hasonlóan az egyenletrendszereknek is van alaphalmaza, értelmezési tartománya. **Az egyenletrendszerek alaphalmaza, értelmezési tartománya a valós számokból képzett, rendezett számpárok halmazának valamely részhalmaza.**

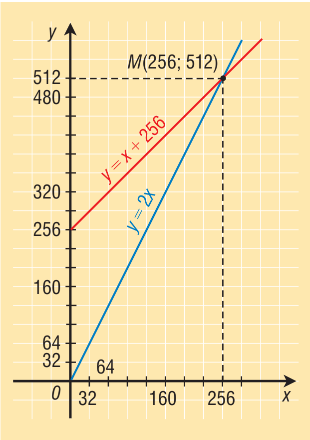
Az egyenletrendszer megoldásakor azt az $(x; y)$ számpárt keressük, amely igazzá teszi mindkét egyenletet, és eleme az egyenletrendszer értelmezési tartományának. Külön-külön mindkét egyenletnek végtelen sok megoldása van. (De nem bármely két számból álló számpár!)

Ha például az első egyenletet önmagában tekintjük, akkor könnyen találunk olyan számpárokat, amelyek megoldásai az egyenletnek. Ilyenek például:

$$x = 0,\ y = 0; \quad x = 160,\ y = 320; \quad x = 256,\ y = 512 \ \text{stb.}$$

Ezeket a megoldásokat a következő formában is megadhatjuk: $(0; 0)$; $(160; 320)$; $(256; 512)$...

Sőt felírhatjuk általánosan is: $(x; 2x)$ ahol $x \in \mathbb{R}$.



8.3. ábra Grafikus megoldás

Vegyük észre, hogy az $y = 2x$ egyenlet az $x \mapsto 2x$ elsőfokú, valós függvény képének, egy **egyenesnek az egyenlete**! Hasonlóan a második egyenlet az $x \mapsto x + 256$ elsőfokú, valós függvény képének **az egyenlete.**

A fentiek miatt ezeket **a számpárokat egy-egy egyenessel szemléltethetjük a koordináta-rendszerben** (8.3. ábra).

Az egyenletrendszer megoldását a két egyenes közös pontjának koordinátái adják. Ez a lineáris egyenletrendszerek grafikus úton történő megoldásának lényege.

A két egyenesnek egy közös pontja van, az $M(256;512)$. Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy az $x=256$, $y=512$ számpár valóban megoldása-e mindkét egyenletnek:

$$\left.\begin{aligned} 512 &= 2\cdot 256, \\ 512-280 &= 256-24. \end{aligned}\right\}$$ Mindkét egyenlet fennáll, és a feladat feltételei is teljesülnek.

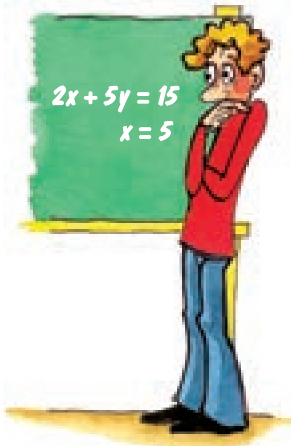
Tehát Párizs és Lyon között a távolság vasútvonalon 512 km, és a TGV menetrend szerinti sebessége ezen a szakaszon $256\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

8.4. ábra Hamarosan megérkezünk

„A vonat istentelenül porzott, az egyetlen áramszedő óriási szikrákat hányt, de a résztvevők stabilan álltak a szerelvényben. A felspécizett TGV-szerelvény 2007. április 3-án délután negyed kettő előtt két perccel $574{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel megdöntötte a sínen guruló vonatok csaknem 17 éves rekordját.” *(Index)*

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, ahol $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$!

a) $\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}x-y&=-1 \\ 2x-3y&=6 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x-2y&=-4 \\ -3x+6y&=12 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=15 \\ x&=5 \end{aligned}\right\}$



8.5. ábra Hogy is van ez?

Megoldás:

a) Oldjuk meg az egyenletrendszert grafikus módszerrel!

Mindkét egyenletből kifejezzük az y -t:

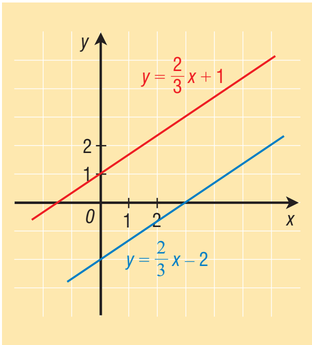
$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}x-y&=-1 \\ 2x-3y&=6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -y&=-\frac{2}{3}x-1 \\ -3y&=-2x+6 \end{aligned}\right\}, \text{ ahonnan } \left.\begin{aligned} y&=\frac{2}{3}x+1 \\ y&=\frac{2}{3}x-2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer adódik.

Felírjuk azokat az elsőfokú függvényeket, amelyek grafikonjainak az egyenletéből áll az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{2}{3}x+1, \\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto y=\frac{2}{3}x-2. \end{aligned}\right\}$$

Egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk a függvényeket. (8.6. ábra) A kapott **egyenesek párhuzamosak**, nincs közös pontjuk, tehát a felírt egyenletrendszernek **nincs megoldás**a.



8.6. ábra 2. a) példa

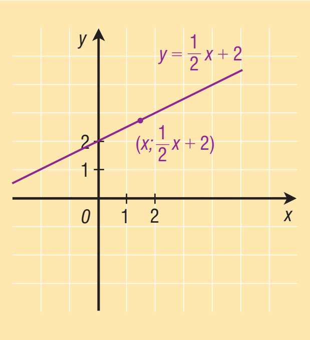
Ugyanehhez az eredményhez jutunk akkor is, ha az első egyenletet 3-mal megszorozzuk, és az így kapott $2x-3y=-3$ egyenletet összevetjük a második egyenlettel $(2x-3y=6)$. **A két egyenlet ellentmond egymásnak**, tehát az **egyenletrendszernek nincs megoldása**.

b) Az $\left.\begin{aligned} x-2y&=-4 \\ -3x+6y&=12 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerben a második egyenlet az első egyenlet –3-szorosa. Ez azt jelenti, hogy az egyik egyenletből előállítható a másik egyenlet egy nullától különböző valós számmal történő szorzással, azaz a **két egyenlet ekvivalens**.

Ilyenkor az egyenletrendszer egyik egyenlete nem ad újabb információt. Az egyenletrendszernek **végtelen sok megoldása van, és ezek egybeesnek az egyik egyenlet megoldásaival.**

Az első egyenletből az $y=\frac{1}{2}x+2$ egyenletet kapjuk. Ahonnan az első (és a második) egyenletnek eleget tevő $(x;y)$ számpárok, azaz az **egyenletrendszer megoldásai:** $\left(x;\frac{1}{2}x+2\right)$, ahol x bármilyen valós szám lehet.

Az egyenletrendszer grafikus megoldásánál az egyenletek által meghatározott egyenesek egybeesnek. (8.7. ábra)



8.7. ábra 2. b) példa

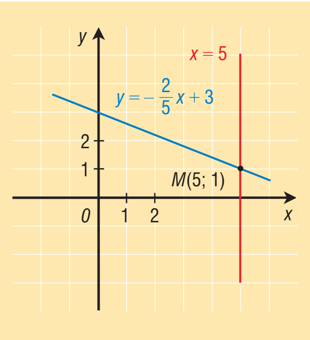
c) Megoldás:
1. módszer:
Oldjuk meg az egyenletrendszert grafikus módszerrel!

A $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=15 \\ x&=5 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer első egyenletét $y=-\frac{2}{5}x+3$ alakban írhatjuk fel, ez az $x\mapsto-\frac{2}{5}x+3$ valós függvény grafikonjának, egy egyenesnek az egyenlete.

Az egyenletrendszer második egyenletének az $x=5$-ből és bármely y valós számból álló számpár a megoldása. Ezek a számpárok egy y tengellyel párhuzamos egyenest határoznak meg. (8.8. ábra)

A két egyenesnek egy közös pontja van, az $M(5;1)$.

Ellenőrzés: $2\cdot5+5\cdot1=15$. **Tehát az egyenletrendszer megoldása az $x=5$, $y=1$ számpár, amelyet $(5;1)$ alakban is megadhatunk.**



8.8. ábra 2. c) példa

2. módszer:
Vegyük észre, hogy az egyenletrendszer második egyenlete megadja az x lehetséges értékét, vagyis $x=5$. Ezt az értéket az első egyenletbe helyettesítve olyan egyenlethez jutunk, amely csak egy ismeretlent tartalmaz:

$$2\cdot5+5y=15,$$
$$5y=5,$$
$$y=1.$$

Az egyenletrendszer megoldása: az $x=5$, $y=1$ (vagy $(5;1)$) számpár.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 304 2012.06.25. 14:57:25

A megoldást kereshetjük nemcsak grafikus módszerrel, hanem algebrai úton is.

3. példa A birkaiskola egyik vegyes osztályába tyúkok és birkák járnak, ezeknek az állatoknak összesen 30 feje és 80 lába van. Hány tyúk és hány birka jár ebbe az osztályba?

8.9. ábra Tornaórán

Megoldás:

1. módszer:

Képzeljük el, hogy testnevelés órán a tyúkok féllábon, a birkák a mellső lábaikon állnak! Ekkor az állatok a lábaik felét használják, azaz 40-et. Ebben a 40-es számban a tyúkokat fejenként egyszer, a birkákat fejenként kétszer vettük számításba. Így ha a 40-ből kivonjuk a fejek számát, a 30-at, akkor a birkák fejeinek száma marad meg. Tehát a birkák száma 10. A tyúkok száma pedig $30-10=20$.

A fenti megoldáshoz egy jó ötletre volt szükségünk. A jó ötletek azonban ritkák. Mit tegyünk, ha nem jut eszünkbe? Fordítsuk le a problémát a matematika nyelvére!

8.10. ábra Ritka, mint a fehér holló

2. módszer:

Jelöljük a kérdéses osztályba járó tyúkok számát x-szel, a birkák számát y-nal, $x\in\mathbb{Z}^+$, $y\in\mathbb{Z}^+$! Ekkor a feladat szövege alapján az

$$\left.\begin{aligned} x+y&=30\\ 2x+4y&=80 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=30\\ x+2y&=40 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszert írhatjuk fel.

A **2. c) példa** megoldásának 2. módszerében a második egyenletből kifejezett x-et az első egyenletbe helyettesítettük, így egy egyismeretlenes egyenlethez jutottunk.

Kövessük ezt az eljárást a most felírt egyenletrendszer megoldásánál is. Tehát fejezzük ki az x-et valamelyik egyenletből, mondjuk az elsőből.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=30\\ x+2y&=40 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x=30-y$$

Helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$30-y+2y=40,$$
$$y=10.$$

A kapott y értéket az $x=30-y$ egyenletbe írva: $x=30-10=20$ adódik.

Ellenőrzés: fejek száma $10+20=30$, lábak száma $2\cdot 20+4\cdot 10=80$.

Tehát ebbe az osztályba 20 tyúk és 10 birka jár.

Ez a megoldásmenet számtalan más problémára is jó, nem kell hozzá csudajó ötlet, csak egy kis algebrai tudás.

8.11. ábra Tartsuk fejben Gauss módszerét!

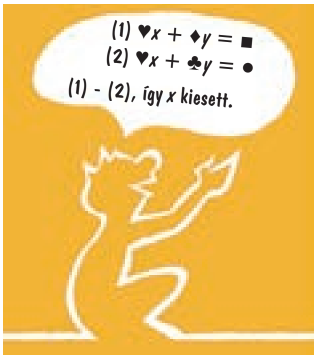
Az egyenletrendszer megoldásakor követett módszert **behelyettesítő módszernek** (Gauss-módszernek) nevezzük. **A módszer lényege a következő:**

- **az egyenletrendszer valamelyik egyenletéből kifejezzük az egyik ismeretlent;**

- **a kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe;**
- **megoldjuk az így kapott egyismeretlenes egyenletet;**
- **a kapott érték segítségével kiszámoljuk a másik ismeretlen értékét.**

4. példa Oldjuk meg a

$$\left.\begin{aligned} 4x-5y&=16 \\ 4x+7y&=-8 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszert, ahol $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$!



8.12. ábra Egy jó módszer egyenletrendszer megoldására

Megoldás:

A felírt egyenletrendszert megoldhatjuk grafikus úton, illetve a behelyettesítő módszer segítségével is. A megoldáshoz gyorsabban is eljuthatunk azonban, ha észrevesszük, hogy az egyenletekben az ***x* együtthatói egyenlők; ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor az *x*-es tagok különbsége nulla, vagyis egy egyismeretlenes egyenlethez jutunk.**

Vonjuk ki a második egyenletből az első egyenletet a következőképpen:

$$\text{2. egyenlet bal oldala} - \text{1. egyenlet bal oldala} =$$
$$= \text{2. egyenlet jobb oldala} - \text{1. egyenlet jobb oldala.}$$

Ekkor:

$$(4x+7y)-(4x-5y)=-8-16,$$
$$4x+7y-4x+5y=-24,$$
$$y=-2.$$

A másik ismeretlent megkaphatjuk, ha az $y=-2$ értéket az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe helyettesítjük. Az első egyenletbe írva:

$$4x-5(-2)=16,$$
$$4x=6,$$
$$x=\frac{3}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát a $\left(\frac{3}{2};-2\right)$ számpár.

8.13. ábra Ha már csak egy ismeretlen maradt, a jól bevált mérlegelvet követjük

Ha az egyenletekben az ***x* együtthatói egymás ellentettjei** lennének (azaz egyik egyenletben 4, a másik egyenletben pedig –4), akkor **a két egyenlet összeadásakor az *x*-es tagok összege nulla, és ekkor egy egyismeretlenes egyenletet kapnánk.**

5. példa Oldjuk meg a

$$\left.\begin{aligned} 17x-4y&=9 \\ -5x+6y&=7 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszert, ahol $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$!

Megoldás:
Az előző feladat alapján, jó lenne ha a felírt egyenletrendszer egyenleteiben az egyik ismeretlen együtthatói egyenlők vagy egymás ellentettjei lennének. Ahhoz, hogy ezt elérjük, szorozzuk meg az első egyenletet 3-mal, a második egyenletet pedig 2-vel, így az alábbi egyenletrendszerhez jutunk.

$$\left.\begin{aligned} 51x-12y&=27 \\ -10x+12y&=14 \end{aligned}\right\}$$

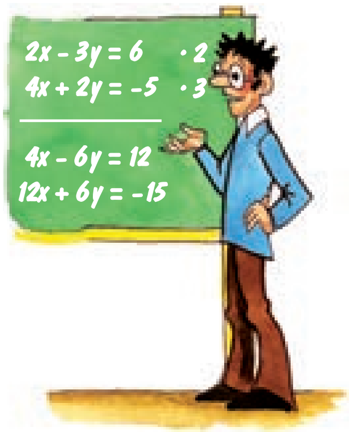
A két egyenletet összeadva:

$$\begin{aligned} (51x-12y)+(-10x+12y)&=27+14, \\ 41x&=41, \\ x&=1. \end{aligned}$$

Az $x=1$-et az első egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} 17-4y&=9, \\ -4y&=-8, \\ y&=2. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát az $(1;2)$ számpár.
Ezt a módszert az **egyenlő együtthatók módszerének** nevezzük.



8.14. ábra Valahogy így

A módszer lényege:
- **megszorozzuk az egyenleteket egy-egy olyan nullától különböző valós számmal, hogy valamelyik ismeretlen együtthatói vagy egyenlőek, vagy egymás ellentettjei legyenek;**
- **egyenlő együtthatók esetén a két egyenlet kivonásával, ellentett együtthatók esetén a két egyenlet összeadásával ezt az ismeretlent kiküszöböljük;**
- **megoldjuk az így kapott egyismeretlenes egyenletet;**
- **a kapott érték segítségével kiszámoljuk a másik ismeretlen értékét.**

Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenletrendszereket $(x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R})$!

a) $\left.\begin{aligned} x-3y&=-7 \\ 3x+2y&=6 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x-y&=1 \\ x&=-2 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=-7 \\ -4x+3y&=1 \end{aligned}\right\}$

2. Oldjuk meg algebrai úton az alábbi egyenletrendszereket $(x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R})$!

a) $\left.\begin{aligned} x+2y&=6 \\ x-2y&=4 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 5x-y&=10 \\ 2x+3y&=4 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 3x+4y&=-5 \\ 7x-6y&=19 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} -2x+\frac{1}{2}y&=\frac{1}{2} \\ 4x-y&=-1 \end{aligned}\right\}$ e) $\left.\begin{aligned} 2x-\frac{5y+2}{6}&=10 \\ \frac{11y+3}{5}-\frac{4(x-3)}{3}&=1 \end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned} \frac{x+2}{8}&=\frac{y+1}{6}-\frac{y-x}{5} \\ y-2x&=\frac{x-3}{3}-\frac{y-3}{4} \end{aligned}\right\}$

3. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a $\left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ x+ay=4 \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek:

a) az $(1;6)$ számpár a megoldása legyen;
b) a $(0;8)$ számpár ne legyen a megoldása;
c) végtelen sok megoldása legyen;
d) ne legyen megoldása;
e) egy megoldása legyen!

4. Határozzuk meg az a, b paraméterek értékét úgy, hogy a $\left.\begin{array}{r} 2x+y=-3 \\ ax-2y=6b \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek

a) végtelen sok megoldása legyen;
b) ne legyen megoldása;
c) egy megoldása legyen;
d) a $(0;-3)$ számpár ne legyen a megoldása!

9. Egyenletrendszerrel megoldható feladatok

9.1. ábra Írógép

1. példa Egy titkárnőnek egy szöveget kell legépelnie. Ha óránként 10 oldallal többet gépelt volna, akkor 2 órával hamarabb végzett volna a gépeléssel. Ha viszont óránként 6 oldallal kevesebbet gépelt volna, akkor 2 órával tovább tartott volna a gépelés.

Hány oldalt kellett gépelnie a titkárnőnek, és mennyi idő alatt végzett a munkával?

Megoldás:
Jelöljük x-szel a titkárnő által egy óra alatt legépelt oldalak számát, y-nal a szöveg legépelésére fordított időt, órában mérve! Nyilvánvalóan $x>0$, $y>0$. Foglaljuk táblázatba az adatokat!

	Az egy óra alatt legépelt oldalak száma	A gépelésre fordított idő (h)	A legépelt oldalak száma
Eredetileg a titkárnő óránként x oldalt gépelt, y ideig.	x	y	xy
Ha óránként 10 oldallal többet gépelt volna, akkor 2 órával hamarabb végzett volna a gépeléssel.	$x+10$	$y-2$	$(x+10)(y-2)$
Ha óránként 6 oldallal kevesebbet gépelt volna, akkor 2 órával tovább tartott volna a gépelés	$x-6$	$y+2$	$(x-6)(y+2)$

A legépelt oldalak száma minden esetben ugyanakkora, ezért a következő egyenletrendszert írhatjuk fel.

$$\left.\begin{aligned}(x+10)(y-2)&=xy\\(x-6)(y+2)&=xy\end{aligned}\right\}$$

A kijelölt műveletek elvégzése után rendezzük az egyenleteket.

$$\left.\begin{aligned}-2x+10y&=20\\2x-6y&=12\end{aligned}\right\}$$

Mindkét egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 2-vel.

$$\left.\begin{aligned}-x+5y&=10\\x-3y&=6\end{aligned}\right\}$$

Az egyenleteket összeadva $y=8$-at kapunk, s ebből $x=30$ adódik.

Ellenőrzés:

A titkárnőnek 8 óra alatt $8\cdot 30=240$ oldalt kellett legépelnie. Ha $30+10=40$ oldalt gépel óránként, akkor a munka $\frac{240}{40}=6=8-2$ óra hosszat tart. Ha $30-6=24$ oldalt gépel óránként, akkor a munka $\frac{240}{24}=10=8+2$ órát vesz igénybe.

Tehát a titkárnő 8 óra alatt végzett a munkával, és $8\cdot 30=240$ oldalt kellett legépelnie.

9.2. ábra Fontos a gyorsaság és a pontosság

2. példa Kata 20 év múlva kétszer annyi idős lesz, mint Béla most. Béla 2 évvel ezelőtt 4 évvel volt idősebb, mint Kata most. Hány évesek most?

Megoldás:

Ebben a feladatban két ember életkora kapcsolódik össze három időpontban: most, 20 év múlva és 2 évvel ezelőtt. Jelöljük *x*-szel Kata, *y*-nal Béla jelenlegi életkorát! Ekkor $x\geq 0$, $y\geq 0$.

	Kata életkora (év)	Béla életkora (év)
2 évvel ezelőtt	$x-2$	$y-2$
most	x	y
20 év múlva	$x+20$	$y+20$

Most újra, mondatonként elolvasva a szöveget, írjuk át a problémát a matematika nyelvére, a táblázatba foglaltak segítségével:

Szavakkal kifejezve:	Az algebra nyelvén:
Kata 20 év múlva kétszer annyi idős lesz, mint Béla most.	$x+20=2y$
Béla 2 évvel ezelőtt 4 évvel volt idősebb, mint Kata most.	$y-2=x+4$

9.3. ábra Hány éves vagy?

Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x+20&=2y,\\ x+4&=y-2.\end{aligned}\right\}$$

Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat, akkor a $16=y+2$ egyenletet kapjuk, amelyből $y=14$-et kapunk, s innen az $x=8$ adódik. A kapott értékek eleget tesznek a feladat feltételeinek, tehát most Kata 8, Béla pedig 14 éves.

9.4. ábra „Ilyen volt”

3. példa 18 m-es távolságon egy jármű első kereke 4-gyel több fordulatot tesz meg, mint a hátsó. Ha az első kerék kerületét 2,5-szeresére, a hátsó kerék kerületét pedig 2-szeresére növeljük, akkor ugyanezen a távolságon az első kerék1-gyel több fordulatot tesz meg, mint a hátsó. Mekkora az első, és a hátsó kerék kerülete?

Megoldás:
Jelöljük x-szel az első, y-nal a hátsó kerék kerületét méterben mérve! Ekkor $x>0,\ y>0.$ A feladat megoldásában felhasználjuk a következő összefüggést:

$$\text{a fordulatok száma} = \frac{\text{a forgó kerék által megtett út}}{\text{a kerék kerülete}}!$$

A szöveg szerint a forgó kerekek által megtett út minden említett esetben 18 m, ezért $\text{a fordulatok száma} = \dfrac{18\,(\text{m})}{\text{a kerék kerülete}\,(\text{m})}$.

		A kerék kerülete (m)	A fordulatok száma
Eredetileg	Az első kerék	x	$\frac{18}{x}$
	A hátsó kerék	y	$\frac{18}{y}$
A kerekek kerületének változtatása után	Az első kerék	$2,5x$	$\frac{18}{2,5x}$
	A hátsó kerék	$2y$	$\frac{18}{2y}$

9.5. ábra „Ilyen lett”

Szavakkal kifejezve:	**Az algebra nyelvén:**
Az első kerék 4-gyel több fordulatot tesz meg, mint a hátsó.	$\frac{18}{x}-\frac{18}{y}=4$
Ha az első kerék kerületét 2,5-szeresére, a hátsó kerék kerületét pedig 2-szeresére növeljük, akkor az első kerék 1-gyel több fordulatot tesz meg, mint a hátsó.	$\frac{18}{2,5x}-\frac{18}{2y}=1$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned}\frac{18}{x}-\frac{18}{y}&=4\\ \frac{18}{2{,}5x}-\frac{18}{2y}&=1\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Ha az $\frac{1}{x}$, és az $\frac{1}{y}$ helyett **új ismeretlent vezetünk be**, akkor egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Legyen $\frac{1}{x}=a$ és $\frac{1}{y}=b$, ekkor az új egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned}18a-18b&=4\\ \frac{18}{2{,}5}a-9b&=1\end{aligned}\right\},\ \text{ahol}\ a>0,\ \ b>0.$$

Az első egyenlet midkét oldalát osszuk el 2-vel: $\left.\begin{aligned}9a-9b&=2,\\ 7{,}2a-9b&=1.\end{aligned}\right\}$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat: $1{,}8a=1$,

$$a=\frac{1}{1{,}8}=\frac{5}{9}.$$

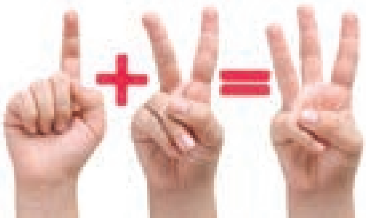
Ezt az értéket az első egyenletbe helyettesítve $9\cdot\frac{5}{9}-9b=2$ egyenletet kapjuk, amelyből $b=\frac{1}{3}$ adódik. Az $\frac{1}{x}=a$ és $\frac{1}{y}=b$ helyettesítések miatt: $x=\frac{1}{a}=\frac{9}{5}$ és $y=\frac{1}{b}=3$. Tehát az első kerék kerülete $\frac{9}{5}$ m, a hátsó kerék kerülete 3 m.

9.6. ábra Új ismeretlenek

Megjegyzések:

- Az (1) számú egyenletrendszert megoldhattuk volna úgy is, hogy kiküszöböljük az egyik ismeretlent, ez az eljárás azonban sok hiba lehetőséget rejt.
- Ha az (1) számú egyenletrendszer második egyenletének mindkét oldalát megszorozzuk kettővel, és kivonjuk a két egyenletet egymásból, akkor egy egyismeretlenes egyenletet kapunk.
- Célszerű lehet új ismeretleneket bevezetni akkor, ha az egyenletekben hasonló kifejezések vannak, és az új ismeretlen bevezetése leegyszerűsíti, áttekinthetőbbé teszi a megoldást.

9.7. ábra Régi „ismerősök”



9.8. ábra Három fontos megjegyzés

Si Huang nagy könyvégetésének esett áldozatul Kína első matematikakönyve, a Csin csang szuan su (Matematika kilenc fejezetben), amelynek keletkezése Kr. e. 250 körüli évekre tehető. A III. századi Liu Huj egészítette ki a Hai-Tao szuan csing (A tengeri sziget) című fejezettel. Ezt az így kibővült és „Szuan csing”-nek (Tíz Klasszikusnak) nevezett munkát a Tang-dinasztia (618–907) alatt az állami hivatalnokok vizsgaanyagául használták. A nyolcadik könyvben, ahol többismeretlenes lineáris egyenletrendszerekkel találkozhatunk, a megoldási mód meglepő, mert lényegében a „fang-cseng” szabály az együtthatók segítségével határozza meg a megoldást. A „fang” szó négyzetet jelent, a cseng-fu jelentése pedig pozitív-negatív. Ez a rész bevezeti az előjeles számokat, és ismerteti összeadásuknak és kivonásuknak „cseng-fu” szabályát. Európában csak a XVII. században, Leibniznél találhatunk ehhez az eljáráshoz hasonlót.

4. példa Oldjuk meg a

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{x+2y}-\frac{3}{3x-y}&=4 \\ \frac{6}{x+2y}+\frac{5}{3x-y}&=-2 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszert, ahol $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$!

Megoldás:

1. módszer:

Az egyenletrendszer alaphalmaza a valós számokból képezett, rendezett számpárok halmaza, értelmezési tartománya azon $(x;y)$ számpárok halmaza, amelyekre $x+2y\neq 0$ és $3x-y\neq 0$ feltételek teljesülnek.

A felírt egyenletrendszerből akár az *x*, akár az *y* kiküszöbölése elég bonyolult lenne, ezért ennek az egyenletrendszernek a megoldásánál célszerű **új ismeretleneket** bevezetni. Legyen $\frac{1}{x+2y}=a$ és $\frac{1}{3x-y}=b$, ekkor $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, és a megoldandó új egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2a-3b&=4 \\ 6a+5b&=-2 \end{aligned}\right\} \quad /\cdot 3$$

$$\left.\begin{aligned} 6a-9b&=12 \\ 6a+5b&=-2 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikat:

$$-14b=14,$$

$$b=-1.$$

Ezt az értéket az első egyenletbe helyettesítve a $2a+3=4$ egyenletet kapjuk, amelyből $a=\frac{1}{2}$ adódik. Az $\frac{1}{x+2y}=a$ és $\frac{1}{3x-y}=b$ helyettesítések miatt a következő egyenletrendszert kapjuk.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x+2y}&=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3x-y}&=-1 \end{aligned}\right\}$$

Vegyük az egyenletek oldalainak reciprokait.

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=2 \\ 3x-y&=-1 \end{aligned}\right\} \quad /\cdot 2$$

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=2 \\ 6x-2y&=-2 \end{aligned}\right\}$$

A két egyenletet összeadva a $7x=0$ egyenletet kapjuk, ahonnan $x=0$. Ezt az értéket az $x+2y=2$ egyenletbe helyettesítve, a $2y=2$ egyenletet kapjuk, innen pedig az $y=1$ adódik. Ellenőrizzük le a kapott értékeket, helyettesítsünk be az eredeti egyenletrendszerbe.

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{0+2}-\frac{3}{0-1}&=4\\ \frac{6}{0+2}+\frac{5}{0-1}&=-2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}1+3&=4\\ 3-5&=-2\end{aligned}\right\}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása a $(0;1)$ rendezett számpár.

2. módszer:

Ha a hasonló kifejezéseket már egy-egy (új) ismeretlenként képesek vagyunk látni, és kezelni, akkor nem szükséges új ismeretleneket bevezetnünk. Észrevehetjük, hogy mindkét egyenletben az $\frac{1}{x+2y}$-hoz és az $\frac{1}{3x-y}$-hoz hasonló kifejezések vannak. Az első egyenletben az $\frac{1}{x+2y}$ együtthatója 2, a második egyenletben pedig 6. Az első egyenletet 3-mal megszorozva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned}6\frac{1}{x+2y}-9\frac{1}{3x-y}&=12\\ 6\frac{1}{x+2y}+5\frac{1}{3x-y}&=-2\end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat a $-14\frac{1}{3x-y}=14$ egyenletet kapjuk, innen $(1)\ 3x-y=-1$ adódik.
Most vegyük az első egyenlet 5-szörösének és a második egyenlet 3-szorosának összegét:

$$5\left(\frac{2}{x+2y}-\frac{3}{3x-y}\right)+3\left(\frac{6}{x+2y}+\frac{5}{3x-y}\right)=5\cdot4+3\cdot(-2),$$

$$\frac{28}{x+2y}=14,$$

$$(2)\ x+2y=2.$$

Az $(1),(2)$ egyenletekből álló új egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned}3x-y&=-1,\\ x+2y&=2.\end{aligned}\right\}$$

Innen az 1. módszer alapján az eredeti egyenletrendszer megoldása a $(0;1)$ számpár.

„Fang-cseng” szabály.

$$\left.\begin{aligned}2a-3b&=4\\ 6a+5b&=-2\end{aligned}\right\}.$$

A fenti egyenletrendszer együtthatóit oszlopokba rendezzük. A második egyenlet együtthatóit az első oszlopba, az első egyenlet együtthatóit a második oszlopba írjuk:

$$\begin{pmatrix}6 & 2\\ 5 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Az 1. oszlopból kivonjuk a 2. oszlop 3-szorosát:

$$\begin{pmatrix}6-6 & 2\\ 5-(-9) & -3\\ -2-12 & 4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 14 & -3\\ -14 & 4\end{pmatrix}.$$

A 14, 2 átló felett 0 van. Írjuk fel most ennek a táblának megfelelő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned}14b&=-14\\ 2a-3b&=4\end{aligned}\right\}$$

Innen $b=-1$,

$a=\frac{1}{2}$ adódik.

(Sain Márton: Nincs királyi út! című munkája)

5. példa Oldjuk meg az

$\left(x+2y-7\right)^{2008}+\left|2y-3z-1\right|+\sqrt{x-3z}=0$ egyenletet a rendezett valós számhármasok halmazán!

Megoldás:
A bal oldalon három nemnegatív szám összege áll, a jobb oldalon pedig 0. Mivel nemnegatív számok összege akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha a számok külön-külön nullával egyenlők, ezért a bal oldal mindhárom tagja nulla. Így fel tudunk írni három összetartozó egyenletet, egy három egyenletből álló egyenletrendszert.

$$\left.\begin{aligned} x+2y-7&=0\\ 2y-3z-1&=0\\ x-3z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Ebben az egyenletrendszerben három ismeretlen szerepel, mindhárom legfeljebb első kitevőn, ezért ezt az egyenletrendszert **háromismeretlenes lineáris egyenletrendszer**nek nevezzük. Az egyenletrendszer alaphalmaza a valós számokból képzett rendezett számhármasok $\{(x;y;z)\}$ halmaza. Az egyenletrendszer értelmezési tartománya azon $(x;y;z)$ számhármasok halmaza, amelyekre az $x-3z\geq 0$ feltétel teljesül.

Megoldás:
1. módszer:
A három vagy többismeretlenes lineáris egyenletrendszereket megoldhatjuk úgy, hogy az egyik ismeretlent kifejezzük valamelyik egyenletből, és a kapott kifejezést az egyenletrendszer összes további egyenletébe helyettesítjük. A helyettesítéssel mind az ismeretlenek, mind az egyenletek száma eggyel csökken (egy ismeretlent kiküszöböltünk).
A felírt egyenletrendszer harmadik egyenletéből fejezzük ki az *x*-et.

$$\left.\begin{aligned} x+2y-7&=0\\ 2y-3z-1&=0\\ \underline{x-3z=0}& \end{aligned}\right\}\Leftrightarrow x=3z$$

Az $x=3z$ kifejezést helyettesítsük be az egyenletrendszer többi egyenletébe.

$$\left.\begin{aligned} 3z+2y&=7\\ 2y-3z&=1 \end{aligned}\right\}$$

A két egyenletet összeadjuk: $(3z+2y)+(2y-3z)=8$, ahonnan $y=2$-t kapjuk.
Az első egyenletből kivonjuk a másodikat: $(3z+2y)-(2y-3z)=6$, ebből $z=1$ adódik. Innen az $x=3z$ miatt $x=3$. Az eredeti egyenletbe helyettesítsük be az $x=3$, $y=2$ és $z=1$ értékeket!
Így az egyenletrendszer, a feladat megoldása a $(3;2;1)$ számhármas. Ezért a $(3+4-7)^{2008}+(4-3-1)+\sqrt{3-3}=0$ egyenlőség teljesül.

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=7\\ 2y-3z&=1\\ \underline{x-3z=0}& \end{aligned}\right\}.$$

A „fang-cseng” szabály szerint a harmadik egyenlet együtthatóit az első oszlopba, a második egyenlet együtthatóit a második oszlopba, az első egyenlet együtthatóit a harmadik oszlopba írjuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ -3 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Az 1. oszlopból kivonjuk a 3. oszlopot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ -3 & -3 & 0\\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Az 1. oszlophoz hozzáadjuk a 2. oszlopot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ -6 & -3 & 0\\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

A –6, 2, 1 átló felett mindenütt 0 van. Írjuk fel most ennek a táblának megfelelő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} -6z&=-6\\ 2y-3z&=1\\ \underline{x+2y=7}& \end{aligned}\right\}.$$

Innen az egyenletrendszer megoldása a (3;2;1) rendezett számhármas.

MATEMATIKA_9_TANKONYV.indb 314 2012.06.25. 14:58:28

Megjegyzés:

- Mivel az egyenletrendszer második egyenlete az x ismeretlent nem tartalmazta, ezért ennél a feladatnál az $x = 3z$ kifejezést csak az első egyenletbe kellett helyettesíteni.
- Az egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerével is meg lehet oldani.

2. módszer:

Rendezzük át az egyenleteket, írjuk fel az egyenleteket a következő formában:

$$\left.\begin{aligned} x+2y \quad &= 7,\\ 2y-3z &= 1,\\ x \quad -3z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

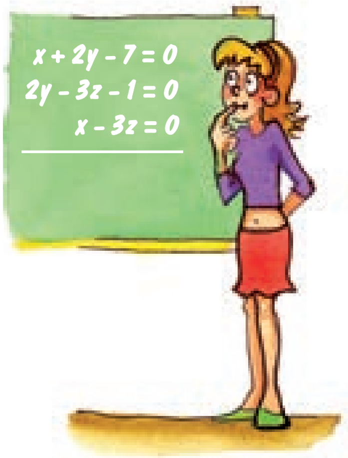
Könnyen észrevehető, hogy a felírt egyenletrendszer egyenleteiben egy-egy ismeretlen ugyanazzal az együtthatóval szerepel: az x együtthatója 1, az y együtthatója 2, a z-é pedig -3. Megfigyelhető az is, hogy mindegyik ismeretlen két-két egyenletben szerepel. Adjuk össze az egyenleteket:

$$2(x+2y-3z)=7+1+0,$$
$$x+2y-3z=4.$$

A kapott $x+2y-3z=4$ egyenletből rendre kivonva az egyenletrendszer egyenleteit, a következőket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} -3z &= -3,\\ x &= 3,\\ 2y &= 4. \end{aligned}\right\}$$

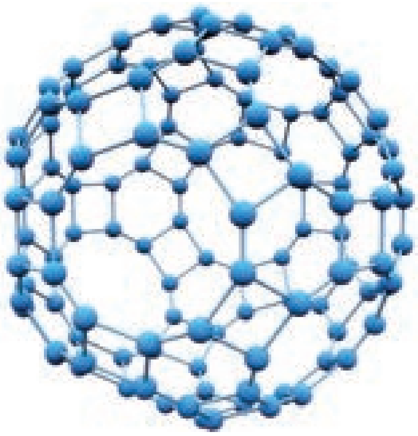
Innen az egyenletrendszer megoldása a $(3;2;1)$ számhármas.



9.9. ábra Hogy is van ez?

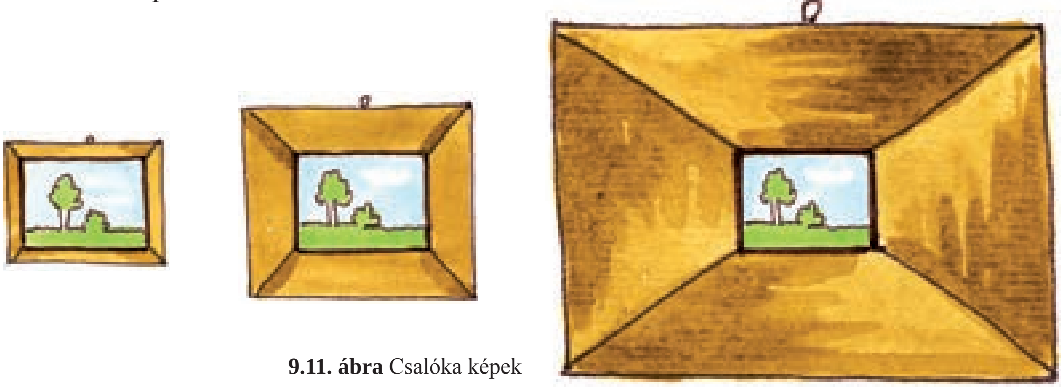
Oldjuk meg!

1. Két konvex sokszög oldalszámainak az összege 34, belső szögeik összegének a különbsége 3960°. Hány oldalúak a sokszögek? Hány átlója van a két sokszögnek együtt?



9.10. ábra Különböző konvex sokszögekkel határolt test modellje

2. Téglalap alakú, azonos belső méretű, változó keretszélességű képkereteink vannak (9.11. ábra). Ha a keret szélessége 3 cm, akkor a képkeret területe 666 cm^2-rel nagyobb, mint a belső téglalap területe. Ha a keret szélessége 5 cm, akkor a keret területe $\frac{23}{54}$-ed része a belső téglalap területének. Mekkora a képkeret belső mérete?



9.11. ábra Csalóka képek

3. Egy jet ski 32 km-t ment felfelé a folyón, majd megfordult, és 3 óra 36 perc múlva visszaért kiindulási helyére. Egy másik alkalommal ugyanezzel a sebességgel haladva 16 km-t tett meg felfelé, és 10 km-t lefelé a folyón, összesen másfél óra alatt. Mekkora a jet ski sebessége állóvízben, és mekkora a folyó sebessége?

9.12. ábra Száguldás

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$!

a) $\left.\begin{aligned} \frac{2}{5x+1} - \frac{1}{3y-2} &= 1 \\ \frac{7}{5x+1} + \frac{2}{3y-2} &= 9 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} \frac{6}{x+y} - \frac{5}{3x-2y} &= 1 \\ \frac{3}{x+y} - \frac{2}{2y-3x} &= 5 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} \frac{1}{5x-2y} - \frac{1}{2x+3y} &= 0 \\ \frac{3}{2y-5x} + \frac{3}{2x+3y} &= 0 \end{aligned}\right\}$

5. Oldjuk meg a $(2x+y-z-3)^2 + |x-y+2z+1| + \sqrt{3x+2y+z-2} = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

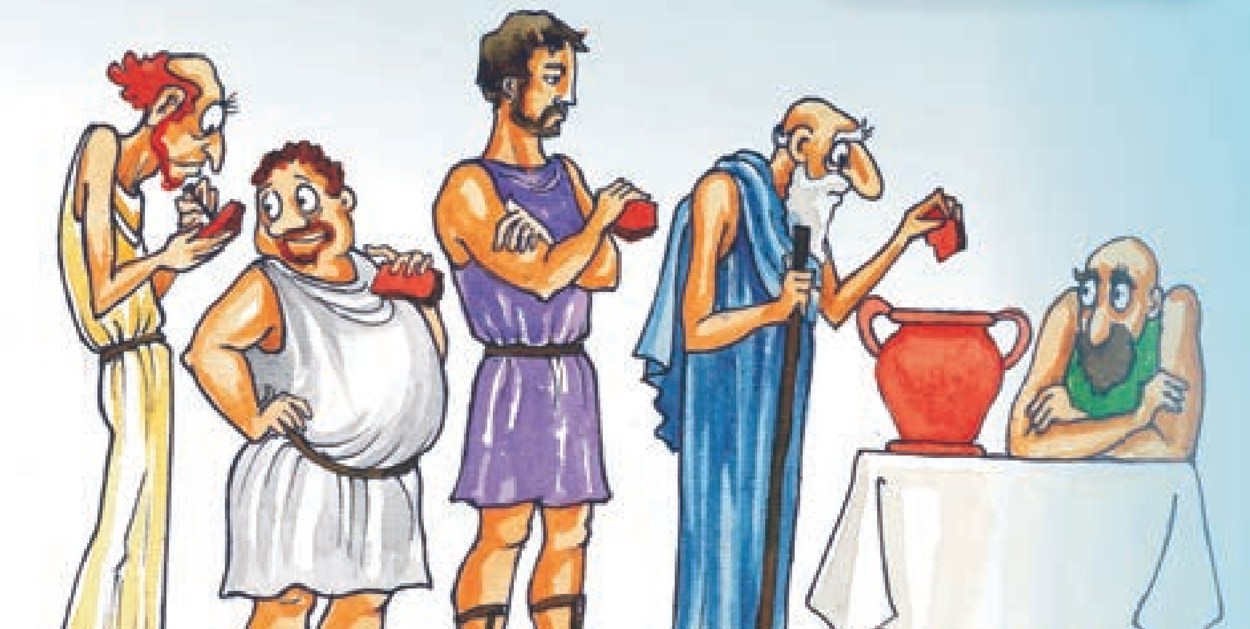
6. Egy téglatest egy csúcsba futó éleinek páronként vett összege 21 cm, 33 cm, 36 cm. Mekkorák az élei? Mekkora a téglatest testátlója?

7. Egy téglatest oldallapjainak területe rendre 12 cm^2, 36 cm^2, 48 cm^2. Mekkora a térfogata? Mekkorák az élei? Mekkora a téglatest testátlója?

9.13. ábra Több méretben is készül tégla

VI. fejezet

Statisztika



Összegzés, tömörítés, szemléltetés!

Statisztika

1. Adatok megadása, szemléltetése

A *statisztika* kifejezés a latin *status* (állam, állapot), illetve az olasz *statista* (köztisztviselő, politikus) szavakra vezethető vissza; elsőként a német Gottfried Achenwall használta 1749-ben az állam tevékenységével kapcsolatos adatok elemzésére. A 19. század során a *statisztika* szó jelentése lényegesen kibővült.

1.1. ábra Az első népszámlálást Kínában tartották

Adatok összegzésére, elemzésére, tudományos elméletek adatok segítségével történő igazolására vagy megcáfolására számtalan természet- és társadalomtudománynak szüksége van. A tömegesen előforduló jelenségek és folyamatok számbavételével, az így nyert adatok elemzésével foglalkozó tudomány a **statisztika**.

Gyakori eset, hogy egy-egy tudományhoz kapcsolódó statisztikai alkalmazásokból önálló tudományágak jönnek létre. Ilyenek például a biostatisztika, a demográfia, a gazdasági statisztika, a politikai statisztika, a pszichológiai statisztika és a társadalomstatisztika.

A statisztikus munkája során bizonyos egyedek (emberek, tárgyak, ételek stb.) bizonyos tulajdonságairól (vércsoport, kereset, pártpreferencia, élettartam, kalóriatartalom stb.) kíván tájékozódni. **Azoknak az egyedeknek az összességét, amelyekről információkat gyűjt, statisztikai sokaságnak, a vizsgált tulajdonságot ismérvnek nevezzük.**

Egy országban a legszélesebb körben végzett információgyűjtés a népszámlálás.

Ma az országok többségében a nemzeti statisztikai szolgálat feladata a népesség és a lakásállomány teljes körű számbavételét szolgáló népszámlálások lebonyolítása, az összegyűjtött adatok közzététele. Hivatalos népszámlálásokra Magyarországon 1870 óta évtizedenként került sor. A legutóbbit 2001-ben hajtották végre, amely már igazodott az ENSZ, illetve az Európai Unió Statisztikai Hivatalának (http://epp.eurostat.ec.europa.eu/) irányelveihez is, így biztosítva a nemzetközi összehasonlíthatóságot.

1.1. Adatok megadása táblázattal

Egy szegedi gimnázium 12. évfolyamán 2007-ben egy kérdőívet töltettünk ki. A kérdőív fejléce és az első néhány sora, az adatszolgáltatók nevének feltüntetése nélkül:

Név	Neme	Magassága	Tömege	Születési hely	Születési idő	Hajszíne
	lány	158	46	Szeged	1988	szőke
	lány	163	48	Szeged	1989	fekete
	lány	171	57	Makó	1989	vörös
	lány	167	58	Szeged	1988	barna

1.2. ábra Adatszolgáltatók

A magasságot egész cm-re, a tömeget egész kg-ra kerekítve adtuk meg.

Több ismérvnek megfelelő adatot gyűjtöttünk össze. Ezek: nem, hajszín (*minőségi ismérvek*), illetve magasság, tömeg (*mennyiségi ismérv*), születési hely (*területi ismérv*), születési idő (*időbeli ismérv*).

A hajszínnek megfelelő adatfajták például: szőke (SZ), barna (B), fekete (F), vörös (V). A nemnek megfelelő két adatfajta: férfi, nő. (Az olyan ismérveket, amelyeknek két adatfajta felel meg, **alternatív ismérveknek** nevezzük.)

A kérdőív alapján 50 tizennyolc éves lány hajszín- testmagasság–testtömeg-adatai:

B-154-43	B-168-52	B-176-59	SZ-170-56	F-165-51
B-156-47	B-168-53	B-179-62	SZ-173-58	F-167-56
B-157-46	B-168-49	SZ-157-49	SZ-173-59	F-169-59
B-157-50	B-169-56	SZ-158-48	SZ-174-62	F-170-61
B-161-48	B-171-56	SZ-158-50	SZ-177-67	V-155-45
B-162-49	B-171-53	SZ-159-49	F-159-50	V-158-50
B-162-53	B-172-58	SZ-161-51	F-160-47	V-164-49
B-166-52	B-174-57	SZ-163-52	F-162-52	V-165-56
B-166-56	B-174-58	SZ-163-52	F-164-53	V-168-58
B-167-50	B-175-65	SZ-166-55	F-164-64	V-169-62

1.3. ábra Mérés

Az adatok ilyen formába történő tömörítéséből is meg tudjuk mondani például, hogy a vizsgált lányok között hány barna hajú lány van, vagy hány olyan lány van, aki 168 cm magas. A válasz: 22 barna hajú lány van, és négy 168 cm magas lány.

Az egyes adatfajtáknak (x_i) a vizsgált statisztikai sokaságban való előfordulási számát az adat gyakoriságának (f_i) nevezzük. A fenti példában a barna adatfajta gyakorisága 22. Azt is megvizsgálhatjuk, hogy a barna hajszín a sokaság hányadrészében, hány %-ában fordul elő: $\frac{22}{50} = \frac{11}{25}$-öd részében, azaz $\frac{22}{50} \cdot 100\% = 44\%$-ában. **Egy adatfajta relatív gyakoriságán (g_i) az adatfajta gyakoriságának és a sokaság elemszámának (n) a hányadosát értjük $\left(g_i = \frac{f_i}{n}\right)$, ezt %-ban is megadhatjuk.**

Az adatfajtákból és gyakoriságukból álló párok a sokaság adott ismérv szerinti **gyakorisági eloszlását** alkotják, amelyet táblázatba (ún. kontingenciatáblázatba) foglalhatunk, ill. szemléltethetjük grafikusan. A továbbiakban erre mutatunk néhány példát.

1. példa Adjuk meg a fent vizsgált sokaság hajszín szerinti eloszlását!

Hajszín (x_i)	Gyakoriság (f_i)	Relatív gyakoriság (g_i)%
Barna	22	44
Szőke	13	26
Fekete	9	18
Vörös	6	12
Σ	50	100

1.4. ábra Mennyi?!

1.5. ábra Eléred?

1.6. ábra Nem is olyan nagy a különbség, még te is megnőhetsz!

1.7. ábra Melyikünk átlagos?

2. példa Adjuk meg a fent vizsgált sokaság testmagasság szerinti eloszlását!

A vizsgált sokaságban a testmagasságok 154 cm-től 179 cm-ig terjednek, az adatfajták száma (26) a sokaság méretéhez, elemszámához (50) képest nagy. Ilyenkor az adatokat célszerű tovább csoportosítani. Az adatokat ötös csoportokba oszthatjuk. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a magasságokat 5 cm-es osztályokba soroltuk (az osztályközszélesség 5).

Testmagasság (cm)	Az intervallumhoz tartozó gyakoriság (f_i)	Relatív gyakoriság (g_i) %
(151)–155	2	4
156–160	10	20
161–165	12	24
166–170	14	28
171–175	9	18
176–(180)	3	6
Σ	50	100

Az adatok osztályba sorolása az adatok jobb átláthatóságát, könnyebb kezelhetőségét teszi lehetővé, ugyanakkor információvesztéssel jár.

3. példa Adjuk meg a fent vizsgált sokaság testtömeg szerinti eloszlását!

A 2. példában látottakhoz hasonlóan járunk el, a tömegeket 3 kg-os osztályokba soroljuk (az osztályközszélesség 3).

Testtömeg (kg)	Az intervallumhoz tartozó gyakoriság (f_i)	Relatív gyakoriság (g_i) %
(42)–44	1	2
45–47	4	8
48–50	12	24
51–53	11	22
54–56	7	14
57–59	8	16
60–62	4	8
63–65	2	4
66–(68)	1	2
Σ	50	100

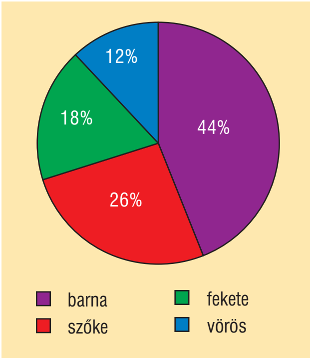
1.2. Adatok grafikus ábrázolása

Az adatok szemléltetési módját, a diagramtípus kiválasztását a vizsgált ismérv, a feladat határozza meg.

a) Osztott kördiagram: készítése során egy körben az egyes adatfajtáknak olyan diszjunkt körcikkeket feleltetünk meg, melyeknek a középponti szöge (és így területe) arányos az adatfajta gyakoriságával. Az ábrázoláshoz ki kell számolnunk az egyes adatfajtáknak megfelelő körcikkek középponti szögeit az $\alpha_i^\circ = \frac{360°}{n} f_i = \frac{360°}{100} g_i$ összefüggés alapján, ahol f_i az egyes adatfajták gyakorisága, g_i pedig a relatív gyakoriság. Általában a sokaság szerkezetét szemléltetjük így.
A hajszínre vonatkozó táblázat adatai alapján az egyes hajszíneknek megfelelő körcikkek középponti szögei:

$$\alpha_{\text{Barna}} = \frac{360°}{50} \cdot 22 = 158,4°, \quad \alpha_{\text{Szőke}} = \frac{360°}{50} \cdot 13 = 93,6°,$$

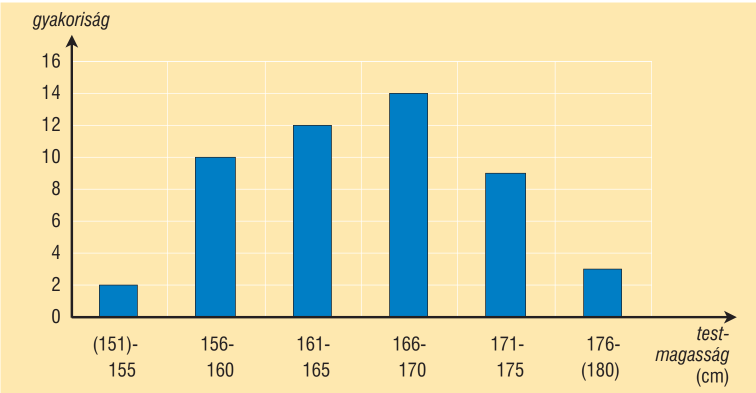
$$\alpha_{\text{Fekete}} = \frac{360°}{50} \cdot 9 = 64,8°, \quad \alpha_{\text{Vörös}} = \frac{360°}{50} \cdot 6 = 43,2°.$$



1.8. ábra 18 éves lányok hajszín szerinti eloszlása

b) Oszlopdiagram: az egyik tengelyen intervallumokat jelölünk ki, s ezeket az egyes adatfajtáknak feleltetjük meg. Ezután az intervallumokra olyan téglalapokat szerkesztünk, amelyeknek a területe arányos a megfelelő adatfajta gyakoriságával. Gyakran egyenlő hosszú intervallumokat jelölünk ki, ilyenkor a téglalapok magassága arányos a megfelelő adatfajta gyakoriságával.

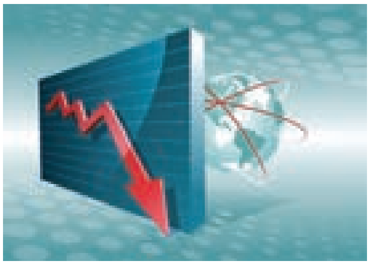
Ha az oszlopok hézag nélkül helyezkednek el, akkor **hisztogram**ról beszélünk. Általában idősorokat ábrázolunk így.



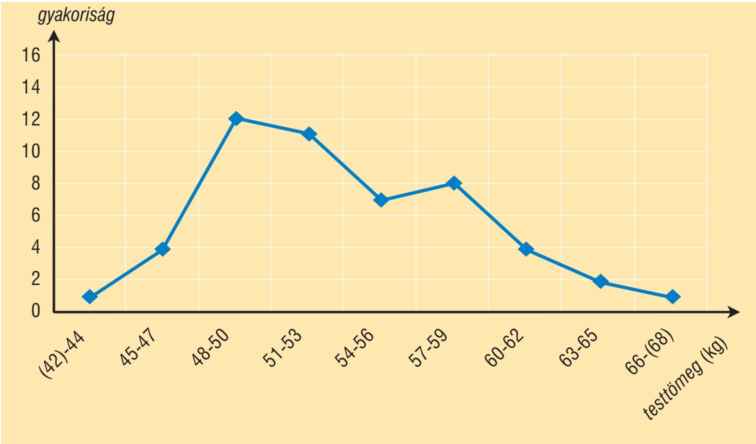
1.9. ábra: A 18 éves lányok magasságának 5 cm-es csoportgyakorisága

1.10. ábra Kör vagy oszlop?

c) Gyakorisági poligon: az egyik tengelyen intervallumokat jelölünk ki, s ezeket az egyes adatfajtáknak feleltetjük meg. Ezután az intervallumok középpontja fölött jelölünk ki a megfelelő adatfajta gyakoriságával arányos magasságban pontokat, s ezeket egyenes szakaszokkal kötjük össze.



1.11. ábra Ez jót vagy rosszat jelent?



1.12. ábra: 18 éves lányok testtömegének gyakorisági poligonja

2. Középértékek

A sokaságról gyűjtött adatok táblázatba foglalása, diagrammal történő szemléltetése már sokat elárult a sokaság adott ismérv szerinti eloszlásáról, tovább mélyítené ismereteinket azonban, ha olyan számadatokat találnánk, amelyek a gyakorlatban jól értelmezhetők, és szemléletes tartalmuk van.

A középértékek olyan mutatószámok, amelyek lehetővé teszik, hogy egy számsokaság valamely tulajdonságát egyetlen számmal jellemezzük. Ettől a számtól elvárjuk, hogy az egész sokaságot reprezentálja, tájékoztasson a számok átlagos elhelyezkedéséről és tipikus érték legyen, mely könnyen és egyértelműen kiszámítható.

2.1. ábra Ki mondta, hogy nem létezik átlag?

1. példa Egy tanuló az egyik tanévben a következő osztályzatokat szerezte matematikából: $1, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 4, 3, 3, 5$. A matematikatanára felajánlotta neki, hogy a bizonyítványba kerülő osztályzatának kiszámítási módját az alábbi értékelések közül kiválaszthatja: az év végi osztályzata matematikából egyenlő

a) az osztályzatok összegének és számának hányadosával, egészre kerekítve;

b) a legtöbbször előforduló osztályzattal;

c) a monoton növekedő sorrendbe rendezett osztályzatok közül a középső osztályzattal.

Melyik értékelési módot válassza a tanuló, ha a legjobb osztályzatot szeretné kapni?

Megoldás:
Vizsgáljuk meg mindhárom módozatban az elérhető osztályzatot!
a) Az osztályzatok összegének és számának hányadosa:
$\frac{1+3+4+3+5+3+4+4+3+3+5}{11} \approx 3,45$, amely nem más, mint **a leggyakrabban használt számított középérték, a számtani közép vagy átlag**.

Definíció **Számsokaság átlaga vagy számtani közepe egyenlő a számsokaságban szereplő számok összegének és számának hányadosával. Jelölése: $\bar{x}$. (Olvasva: x átlag.)**

Matematikai jelekkel: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a számsokaságban előforduló számok, n a számsokaság elemszáma (pozitív egész).

Tehát $\bar{x} \approx 3,45$, amelynek egészre kerekített értéke alapján az a) változat szerint elérhető osztályzat a 3-as.

b) Az osztályzatok gyakorisági eloszlása:

Osztályzatok	1	2	3	4	5
Gyakoriság	1	0	5	3	2

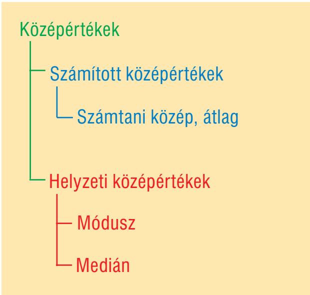
A leggyakrabban előforduló osztályzat az az osztályzat, amelynek a gyakorisága a legnagyobb, ennél a feladatnál tehát a 3-as. Ez az osztályzat a tipikus, a leginkább jellemző értéket adja, e körül sűrűsödnek az adatok, így egyik fontos jellemzője a sokaságnak.

Definíció **A számsokaságban legtöbbször előforduló számot a számsokaság móduszának nevezzük. Jelölése: *Mo*.**

A módusz a helyzeti középértékek közé tartozó mutató. Előfordulhat, hogy több olyan szám is van a sokaságban, amelyeknek maximális a gyakorisága, ilyenkor a sokaságnak több módusza van.
(A *módusz* szó a *mode* szóból származik, jelentése: tipikus, divatos.)
Az osztályzatok módusza tehát: $Mo = 3$, a b) változatban kapható érdemjegy a 3-as.

c) Az osztályzatok monoton növekedő sorrendbe rendezve: 1, 3, 3, 3, 3, **3,** 4, 4, 4, 5, 5 .
A középső osztályzat a sorrendben a hatodik adat, azaz a 3-as. Ez az adat (a pirossal jelölt 3-as) két azonos elemszámú részre osztja a sokaságot, a sorrendben előtte álló adatok nála nem nagyobbak, a mögötte állók pedig nem kisebbek. A 3-at a számsokaság **medián**jának nevezzük. Mivel az adatok elhelyezkedéséről ad információt, ezért a helyzeti középértékek közé tartozó mutató.

2.2. ábra *Mo* vagy *Me* vagy $\bar{x}$?



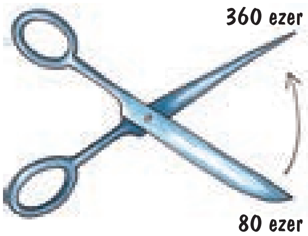
2.3. ábra Kapcsolat

Definíció Rendezzük nagyság szerint nem csökkenő sorrendbe a számsokaság számait!
Ha páratlan sok adatunk van $(n = 2k + 1)$, akkor a számsokaság mediánja a középső adat (a $k + 1$-edik szám).
Ha páros sok adatunk van $(n = 2k)$, akkor a medián a két középső (a k-adik és a $k + 1$-edik szám) szám számtani közepe. Jelölése: *Me*.
(A medián latin eredetű szó, jelentése középső, középen levő.)

A medián tulajdonságai:

- az adatoknak legalább a fele nem nagyobb, és legalább a fele nem kisebb a mediánnál;
- Tekintsük az x_1; x_2; … x_n számsokaságot és x egy tetszőleges valós szám. Ekkor az $|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|$ az adatok mediántól vett távolságainak összege minimális, ha $x = Me$.

Az osztályzatok mediánja tehát: $Me = 3$, így a c) változatban kapható osztályzat a 3-as.
Tehát a tanuló mindhárom esetben 3-as osztályzatot kapna, ezért bármelyik értékelési rendszert választhatja.



2.4. ábra Micsoda különbség!

2. példa Egy takarító kft. dolgozóinak nettó keresetének gyakorisági eloszlása a következő:

	Takarítók	Ellenőrök	Asszisztens, könyvelő	Ügyvezető
Nettó keresetek (ezer forintban)	80	100	180	360
Gyakoriság	8	3	2	1

a) Határozzuk meg a keresetek móduszát, mediánját!
b) Határozzuk meg az átlagkeresetet!


2.5. ábra Ki nevet a végén?

Megoldás:
a) A táblázatból jól látható, hogy a 80 ezer forintos keresetek fordulnak elő legtöbbször a sokaságban, ezért a sokaság módusza: $Mo = 80$ ezer forint.
Az adatsokaságunk 14 számból áll, tehát a medián a keresetek nem csökkenő sorrendjében a hetedik és a nyolcadik adat számtani közepével egyenlő. A sorrendben először a 8 db 80 ezer forintos, aztán a 3 db 100 ezer forintos, majd az 2 db 180 ezer forintos és végül 1 db 360 ezer forintos kereset következik. Tehát a hetedik és a nyolcadik adat is 80 ezer forint, így az átlaguk, vagyis a sokaság mediánja: $Me = 80$ ezer forint.
b) Vegyük észre, hogy több olyan adat is van, amely nemcsak egyszer fordul elő a számsokaságban, ezt figyelembe véve az átlag kiszámítását végezhetjük gyorsabban:

$$\overline{x} = \frac{8\cdot 80 + 3\cdot 100 + 2\cdot 180 + 360}{8+3+2+1} \approx 118{,}6 \text{ ezer forint.}$$

Az átlagfizetést összevetve az előforduló fizetésekkel megállapíthatjuk, hogy a számtani közép **önmagában** nem jellemzi jól a fizetésviszonyokat, néhány kiugróan magas fizetés nagyon megemelte, eltorzította.

Az átlag tulajdonságai:

- érzékeny a szélsőséges adatokra;
- az adatok átlagtól vett eltéréseinek összege nulla;
- az adatoknak az átlagtól vett eltéréseinek négyzetösszege minimális.

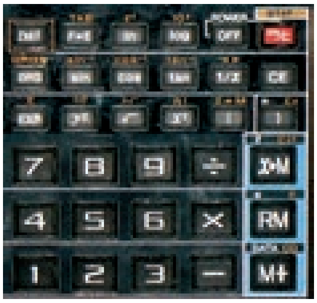
A statisztikus általában nagyon sok adattal foglalkozik; ma már a vizsgált sokaságra jellemző középértékek, mutatók számítását számítógépek segítségével végzik.

A középiskolában használatos számológépek is lehetőséget adnak bizonyos statisztikai jellemzők kiszámítására. Az alábbiakban a 2. példában szereplő adatok átlagának számítását mutatjuk be lépésről lépésre, két különböző „logikájú" számológépen.

Az egyik „A" típusnál:

	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: statisztikai üzemmód beállítása	2ndF ON/C	**STAT** 0
2. lépés: az adatok bevitele	8 0 x 8 DATA M+	**STAT** 8
	1 0 0 x 3 DATA M+	**STAT** 11
	1 8 0 x 2 DATA M+	**STAT** 13
	3 6 0 x 1 DATA M+	**STAT** 14
3. lépés: az átlag előhívása	$\bar{x}$ X→M	**STAT** 118,57143 $(\approx \overline{x})$

2.6. ábra Kaviáros szendvics = $= \dfrac{1 \text{ adag kaviár} + 1 \text{ szelet kenyér}}{2}$



2.7. ábra Számológép „A"

2.8. ábra Ugye, milyen szemléletes?

2.9. ábra Számológép „B”

Egy másik „B” típus esetén:

	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: statisztikai szerkesztő képernyő megjelenítése	SHIFT MODE REPLAY ▼	1:ab/c 2:d/c 3:STAT 4:Disp 5:<CONT>
	3	Frequency? 1:ON 2:OFF
	Az 1 billentyű megnyomásával statisztikai módban, a kijelzőn megjelenik a frekvencia (a gyakoriság) oszlopa.	
	MODE	1:COMP 2:STAT 3:TABLE
	2	1:1-VAR 2:A+BX 3:-+CX2 4:lnX 5:C^X ...
	1	X FREQ 1 2 3
2. lépés: az adatok bevitele	8 0 =	X FREQ 1 80 1 2 3
	REPLAY ► REPLAY ▲ 8 =	X FREQ 1 80 8 2 3
	Az x oszlopába az adatok számértékét kell bevinni, a **FREQ** oszlopába pedig az adat gyakoriságát. Az oszlopok mezői a **REPLAY** billentyű megfelelő irányba mutató nyilának lenyomásával érhető el. REPLAY	X FREQ 1 80 8 2 100 3 3 180 2 4 360 1
3. lépés: statisztikai számítási képernyő; az átlag előhívása	SHIFT STAT 1	1:Type 2:Data 3:Edit 4:Sum 5:Var 6:MinMax
	5	1: n 2: $\bar{x}$ 3: xσn 4: xσn–1
	2 =	$\bar{x}$ STAT 118.5714186

2.10. ábra Kövessük az utasításokat!

Oldjuk meg!

1. Az alábbi lista 25 tizenöt éves fiú adatait tartalmazza, az összetartozó adatok rendre testmagasság – az előző tanév végi matematika osztályzat. A testmagasságokat egész cm-re kerekítve adtuk meg.

Gyakoriság	154-3	159-5	161-5	164-3	165-3
	156-3	160-2	162-3	164-4	166-4
	157-4	160-2	163-3	164-4	167-2
	157-5	161-3	164-2	164-4	167-3
	158-4	161-4	164-2	165-3	168-2

a) Adjuk meg a testmagasságok gyakorisági eloszlását táblázattal, és szemléltessük oszlopdiagrammal!
b) Adjuk meg a matematika osztályzatok gyakorisági eloszlását táblázattal, és szemléltessük kördiagrammal!

2. Egy osztály történelem tantárgyból elért félévi osztályzatainak gyakorisági eloszlása:

Osztályzatok (x_i)	5	4	3	2	1
Gyakoriság (f_i)	5	6	7	2	1

a) Határozzuk meg az osztályzatok átlagát, móduszát, mediánját!
b) Szemléltessük kördiagramon az osztályzatok gyakoriságát!

3. Egy kosárlabda-mérkőzésen az egyik játékos kipontozódása után a pályán levő játékosok magasságának egész centiméterre kerekített átlaga 1 cm-rel kisebb, mint amennyi volt az említett játékos távozása előtt. Hány centiméter magas a kipontozódott játékos? (2.11. ábra)

4. Hogyan változik az $1, 3, 3, 3, 3, 7, 7, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5$ számokból álló sokaság átlaga, módusza, mediánja,
a) ha minden eleméhez hozzáadunk 5-öt?
b) ha minden elemét megszorozzuk –2-vel?

5. Egy osztály matematikadolgozatának eredménye a következőképpen alakult: négy jeles, valahány jó, tíz közepes, nyolc elégséges és három elégtelen.
a) Hányan írtak jó osztályzatú dolgozatot, ha az osztályátlag 3,00-nál nagyobb és 3,05-nál kisebb?
b) Ábrázoljuk oszlopdiagrammal az osztályzatok gyakoriságát!
c) Adjuk meg az osztályzatok móduszát, mediánját!

6. Van-e olyan kilenc pozitív egész számból álló számsokaság, amelynek mediánja 3, az átlaga 2008 és módusza
a) 2;
b) 28;
c) 1848;
d) 8128?

2.11. ábra Milyen magas vagyok?

Szakkifejezések listája

Javasolt linkek gyűjteménye

Ha valaki szeretne elmélyedni a tankönyvben tárgyalt tananyagban, az internetet is segítségül hívhatja. A következőkben olyan oldalak listáját adjuk meg, amelyeken érdemes böngészni. Hangsúlyozzuk, hogy a válogatásunk szubjektív, és az összeállítás időpontjában fennálló pillanatnyi állapotnak felel meg.

Feladatok

http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/tevekenysegek-matematika-feladatok-gyujtemenye

http://www.versenyvizsga.hu/hun/index.html

http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmpo11.htm

http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmpo12.htm

http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmpo13.htm

http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmte02.htm
http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmte03.htm
http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmte11.htm
http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmte12.htm
http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmte21.htm
http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmte22.htm
http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmte23.htm

Érdekességek

http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/1998/afrika/start.htm
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/arany/
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/keresztrejtveny/

Ötletek, javaslatok

http://matek.fazekas.hu/euklides/hun/euklides.htm
http://www.calculus.hu/autograph/index.htm
http://www.calculus.hu/derive6/index.htm
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/Bolyai/index.html
http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/oktatas/halmazmuveletek
http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/oktatas/arki-tamas-problemamegoldas-a-dinamikus-geometria-eszkozeivel
http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/oktatas/arki-tamas-dinamikus-geometria-es-tengelyes-tukrozes
https://www.cs.elte.hu/local/palyazat/maple/

Olvasmányok

http://primes.utm.edu/largest.html
http://hu.wikipedia.org/
http://matek.fazekas.hu
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/index.html
http://mathforum.org/
http://mbuttons.bolyai.hu/
http://tudasbazis.sulinet.hu/hu
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/
http://www.eyelid.co.uk/numbers.htm
http://www.komal.hu/
http://www.mek.iif.hu/porta/szint/termesz/matemat/elemek1/html/
http://www.ngkszki.hu/~trembe/
http://civertan.blogter.hu/236863/indiai_szorzas_i
http://civertan.blogter.hu/236863/indiai_szorzas_ii

- Kiadja: Maxim Könyvkiadó Kft., 6728 Szeged, Kollégiumi út 11/H
- E-mail: info@maxim.co.hu
- Telefon: (62) 548 444
- Fax: (62) 548 443
- Felelős kiadó: Puskás Norbert
- Nyomda: Generál Nyomda Kft., felelős vezető: Hunya Ágnes